

# 复杂电机与电力系统非线性动力学 行为与控制研究

■ 罗晓曙 韦笃取 著



科学出版社

# 复杂电机与电力系统非线性 动力学行为与控制研究

罗晓曙 韦笃取 著

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

电机与电力系统是一种强非线性系统,它在国民经济的许多部门如电力电子和工矿企业中具有极为广泛的应用。本书是关于复杂电机与电力系统非线性动力学行为与混沌控制研究的一部专著,是作者及其课题组多年来在这一研究领域所做工作的总结和深化。书中系统阐述电机与电力系统的建模、非线性动力学行为分析及其控制方法,全面深入地研究电机与电力系统的稳定性、分岔的类型、产生混沌行为的主要参数及参数区间、非线性电力系统的随机动力学行为等,给出作者及其课题组一系列理论研究和实验研究成果,介绍当前国内外在该领域的研究动态与趋势。

本书可供电子、通信和电力与自动化类的硕士研究生、博士研究生和相关科研人员阅读与参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

复杂电机与电力系统非线性动力学行为与控制研究/罗晓曙,韦笃取著. —北京:科学出版社,2015.10

ISBN 978-7-03-045819-3

I. ①复… II. ①罗… ②韦… III. ①电机—非线性—动力学—研究 ②电力系统—非线性—动力学—研究 IV. ①TM

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第229022号

责任编辑:陈 静 董素芹 / 责任校对:郭瑞芝

责任印制:张 倩 / 封面设计:迷底书装

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新科印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2015年10月第 一 版 开本:720×1 000 1/16

2015年10月第一次印刷 印张:13 1/4

字数:267 120

定价:65.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

# 前 言

电机与电力系统是一种强非线性、强耦合、动态的复杂动力系统，而大电网之间的互联是现代电力系统发展的必然趋势，它将使电网的发电和输电变得更经济、更高效。与此同时，电力系统与电力网络的稳定性受到了前所未有的挑战。近几十年来，国内外一些大电网相继发生电压、频率振荡失稳甚至崩溃的事故。例如，2003年8月14日美国东北部、中西部和加拿大东部联合电网大停电，2005年5月23日莫斯科大停电等，这些事故给国民经济和人们的生活造成了巨大损失和严重危害。因此，研究电机与电力系统的复杂非线性动力学行为及其控制对保证电力系统与电力网络的稳定运行具有极其重要的理论探索价值和应用参考价值。近三十年以来，混沌动力学理论的进展和完善，特别是混沌控制理论和方法的提出，为电机与电力系统这类复杂系统的分析与控制研究提供了新的思路。

根据目前国内外电机与电力系统的非线性动力学行为、混沌控制和复杂电力网络的研究现状与发展动态，本书对电机与电力系统的稳定性、在外噪声微扰下的随机分岔、随机混沌等动力学行为进行了深入系统的研究；并将确定性非线性系统的混沌控制理论与方法发展完善，应用于电机与电力系统的分岔、混沌控制。在此基础上，考虑真实的电力网络结构，构造复杂电力网络模型，进一步深入研究、探索单机和多机电力系统的随机分岔、随机混沌行为与电力网络发生电压、频率振荡失稳甚至崩溃事故的内在关系的物理机制，研究结果有望为改善现有的电力网络或设计未来的电力网络，为大规模的停电少发生甚至不发生提供新思路与解决方法。研究成果不仅对复杂电机与电力系统的动力学行为研究具有较重要的理论探索价值，而且有望对保证大规模电力网络的稳定运行提供有价值的参考。

本书主要介绍作者近年来研究电机与电力系统的非线性动力学行为及其混沌控制的成果，同时适当参考了国内外的一些相关资料和研究报告。全书共7章，第1章首先简要阐述非线性动力学系统的稳定性、分岔理论，为后续各章内容的理论分析打下基础。第2章首先阐述几种电力系统和永磁同步电动机的动力学模型及其非线性动力学行为，主要为后续各章研究其混沌控制提供理论模型和分析基础，并简要分析电力系统、永磁同步电动机混沌控制的研究现状及存在问题。第3章主要研究采用自适应混合控制方法实现对电力系统和永磁同步电动机的混沌控制。首先简要介绍最优控制理论和自适应控制理论，然后具体研究简单电力系统混沌振荡的无源自适应控制、考虑励磁限制的电力系统的混沌振荡的自适应鲁棒控制、永磁同步电动机混沌运动的鲁棒自适应动态面控制和基于LaSalle不变集定理自适应控制永磁同步电动机的混沌运动。第4章主要研究基于无源性与微分几何理论的电力系统与同步电动机混沌运动的控制

设计。首先介绍无源非线性系统的基本理论,然后阐述基于无源化的励磁反馈镇定器设计和 $L_2$ 性能准则、基于无源系统理论的励磁系统非线性鲁棒镇定器设计、无源自适应控制磁阻同步电动机的混沌运动控制,最后介绍基于微分几何方法的永磁同步电动机的混沌运动的控制的研究成果。第5章主要介绍基于状态反馈和延迟反馈的永磁同步电动机混沌控制研究成果。第6章在随机动力学的理论基础上,引入一定的随机项,首先运用 Chebyshev 正交多项式逼近法,得到了含随机参数激励作用的简单电机系统的稳态随机响应,探究了该随机系统的分岔现象;其次,利用拟不可积随机平均法,研究了最简单电力系统在高斯白噪声外激励下的平稳响应和首次穿越;最后,借助随机 Melnikov 积分方法,研究多种随机非线性电力系统在噪声激励或参数随机干扰的情况下,在均值和均方意义下可能出现 Smale 马蹄混沌的临界条件,给出在均方意义上出现简单零点的条件,数值仿真结果证明了理论分析的正确性。第7章首先综述复杂网络理论在电力网络中的应用研究现状,然后提出一些新的复杂电网模型并分析其发生级联故障的内在机制,最后研究复杂电力网络在噪声作用下的非线性动力学行为,研究成果有望对复杂电力网络的稳定运行提供有价值的新见解。

在本书的撰写过程中,作者历届的研究生李爱芸、邹代国、覃英华等结合学位论文课题完成的研究工作,也丰富了本书的内容,在此向他们表示衷心的感谢。

最后,感谢国家自然科学基金项目(批准号为 10862001、61263021)的资助。

由于作者水平有限,本书难免存在不足之处,敬请读者批评指正。

罗晓曙 韦笃取

2015 年 3 月

# 目 录

## 前言

|                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| 第 1 章 非线性系统的稳定性、分岔与混沌动力学理论简介 .....   | 1  |
| 1.1 概述 .....                         | 1  |
| 1.2 系统稳定性的基本概念 .....                 | 2  |
| 1.3 李雅普诺夫稳定性定义 .....                 | 5  |
| 1.4 李雅普诺夫稳定性理论 .....                 | 8  |
| 1.4.1 李雅普诺夫第一方法 .....                | 8  |
| 1.4.2 李雅普诺夫第二方法 .....                | 13 |
| 1.5 分岔理论 .....                       | 17 |
| 1.5.1 分岔理论概述 .....                   | 17 |
| 1.5.2 几种典型分岔的讨论 .....                | 17 |
| 1.6 混沌理论概述 .....                     | 21 |
| 1.6.1 混沌的定义 .....                    | 21 |
| 1.6.2 通向混沌的道路 .....                  | 22 |
| 1.6.3 混沌的度量与判断 .....                 | 23 |
| 参考文献 .....                           | 29 |
| 第 2 章 电力系统、永磁同步电动机的非线性动力学行为 .....    | 30 |
| 2.1 引言 .....                         | 30 |
| 2.2 电力系统的非线性动力学模型及其混沌特性 .....        | 31 |
| 2.2.1 简单互联电力系统模型 .....               | 31 |
| 2.2.2 考虑励磁限制的电力系统模型 .....            | 32 |
| 2.2.3 考虑负荷的电力系统模型 .....              | 34 |
| 2.3 永磁同步电动机的动力学模型及其混沌特性 .....        | 35 |
| 2.3.1 均匀气隙 PMSM .....                | 36 |
| 2.3.2 非均匀气隙 PMSM .....               | 36 |
| 2.4 电力系统、永磁同步电动机混沌控制的研究现状及存在问题 ..... | 37 |
| 2.5 本章小结 .....                       | 38 |
| 参考文献 .....                           | 38 |

|                                             |    |
|---------------------------------------------|----|
| 第3章 电力系统、永磁同步电动机的混合自适应混沌控制 .....            | 42 |
| 3.1 自适应控制理论概述 .....                         | 42 |
| 3.1.1 最优控制理论概述 .....                        | 42 |
| 3.1.2 自适应控制理论简介 .....                       | 43 |
| 3.1.3 模型参考自适应控制 .....                       | 45 |
| 3.1.4 梯度法的局部参数最优化的设计方法 .....                | 47 |
| 3.2 简单电力系统混沌振荡的无源自适应控制 .....                | 48 |
| 3.2.1 引言 .....                              | 48 |
| 3.2.2 无源非线性系统基本概念 .....                     | 49 |
| 3.2.3 电力系统混沌振荡的无源自适应控制 .....                | 50 |
| 3.2.4 数值仿真结果 .....                          | 51 |
| 3.2.5 控制策略的鲁棒性和抗干扰性能分析 .....                | 52 |
| 3.2.6 小结 .....                              | 53 |
| 3.3 考虑励磁限制的电力系统的混沌振荡的自适应鲁棒控制 .....          | 53 |
| 3.3.1 引言 .....                              | 53 |
| 3.3.2 自适应控制方法及其在考虑励磁限制的电力系统混沌振荡控制中的应用 ..... | 54 |
| 3.3.3 考虑励磁限制的电力系统混沌的自适应控制 .....             | 55 |
| 3.3.4 数值仿真结果 .....                          | 55 |
| 3.3.5 控制系统的鲁棒性和抗干扰性能分析 .....                | 55 |
| 3.3.6 小结 .....                              | 57 |
| 3.4 永磁同步电动机混沌运动的鲁棒自适应动态面控制 .....            | 57 |
| 3.4.1 引言 .....                              | 57 |
| 3.4.2 自适应动态面控制方法 .....                      | 58 |
| 3.4.3 稳定性分析 .....                           | 59 |
| 3.4.4 数值仿真结果和分析 .....                       | 62 |
| 3.4.5 小结 .....                              | 63 |
| 3.5 基于 LaSalle 不变集定理自适应控制永磁同步电动机的混沌运动 ..... | 63 |
| 3.5.1 基于 LaSalle 不变集定理自适应控制方法 .....         | 63 |
| 3.5.2 基于 LaSalle 不变集定理设计自适应混沌控制器 .....      | 64 |
| 3.5.3 PMSM 混沌运动的自适应控制及仿真 .....              | 65 |
| 3.5.4 小结 .....                              | 66 |
| 参考文献 .....                                  | 66 |
| 第4章 基于无源性与微分几何理论的电力系统与同步电动机混沌运动的控制设计 .....  | 68 |
| 4.1 引言 .....                                | 68 |
| 4.2 无源非线性系统的基本理论 .....                      | 68 |

|       |                             |     |
|-------|-----------------------------|-----|
| 4.2.1 | 无源性的基本概念                    | 68  |
| 4.2.2 | 非线性系统的 KYP 引理               | 70  |
| 4.2.3 | 微分几何的理论基础                   | 70  |
| 4.3   | 研究模型描述                      | 71  |
| 4.4   | 基于无源化的励磁反馈镇定器设计和 $L_2$ 性能准则 | 73  |
| 4.4.1 | 坐标变换和标准链式结构                 | 73  |
| 4.4.2 | 基于无源化的单机无穷大励磁系统反馈镇定控制器设计    | 74  |
| 4.4.3 | $L_2$ 增益干扰抑制控制问题设计          | 76  |
| 4.4.4 | 系统仿真                        | 78  |
| 4.5   | 基于无源系统理论的励磁系统非线性鲁棒镇定器设计     | 79  |
| 4.5.1 | 鲁棒无源性基础                     | 79  |
| 4.5.2 | 单机无穷大励磁系统的无源性               | 81  |
| 4.5.3 | 单机无穷大励磁系统的鲁棒镇定              | 82  |
| 4.5.4 | 数值仿真分析                      | 83  |
| 4.5.5 | 小结                          | 84  |
| 4.6   | 无源自适应控制磁阻同步电动机的混沌运动         | 84  |
| 4.6.1 | 引言                          | 84  |
| 4.6.2 | 磁阻同步电动机数学模型                 | 85  |
| 4.6.3 | 无源控制方法                      | 86  |
| 4.6.4 | 无源自适应控制磁阻同步电动机的混沌运动         | 87  |
| 4.6.5 | 数值仿真                        | 89  |
| 4.6.6 | 小结                          | 90  |
| 4.7   | 基于微分几何方法的永磁同步电动机的混沌运动的控制    | 90  |
| 4.7.1 | 引言                          | 90  |
| 4.7.2 | PMSM 混沌模型及其动力学特性            | 91  |
| 4.7.3 | 基于微分几何精确线性化的 PMSM 中混沌运动的控制  | 91  |
| 4.7.4 | PMSM 混沌控制系统的状态反馈精确线性化条件     | 91  |
| 4.7.5 | 求 PMSM 混沌系统的控制律             | 94  |
| 4.7.6 | 控制方法的仿真研究                   | 95  |
| 4.7.7 | 小结                          | 96  |
|       | 参考文献                        | 96  |
| 第 5 章 | 基于状态反馈和延迟反馈的永磁同步电动机混沌控制研究   | 100 |
| 5.1   | 引言                          | 100 |
| 5.2   | 状态反馈控制理论                    | 100 |
| 5.2.1 | 状态反馈控制系统的构成                 | 100 |

|       |                             |     |
|-------|-----------------------------|-----|
| 5.2.2 | 状态反馈控制系统极点任意配置的条件           | 101 |
| 5.2.3 | 单输入系统极点配置方法                 | 103 |
| 5.3   | 基于极点配置的非均匀气隙永磁同步电动机混沌状态反馈控制 | 104 |
| 5.3.1 | 非均匀气隙 PMSM 的混沌数学模型及混沌特性     | 104 |
| 5.3.2 | 受控系统的方程式                    | 105 |
| 5.3.3 | 反馈增益的确定                     | 105 |
| 5.3.4 | 数值仿真结果                      | 106 |
| 5.3.5 | 小结                          | 107 |
| 5.4   | 基于有限时间稳定理论的永磁同步电动机混沌状态反馈控制  | 107 |
| 5.4.1 | 概述                          | 107 |
| 5.4.2 | 有限时间稳定基本概念和定理               | 108 |
| 5.4.3 | 基于有限时间稳定理论抑制 PMSM 的混沌运动     | 109 |
| 5.4.4 | 数值仿真                        | 111 |
| 5.4.5 | 小结                          | 112 |
| 5.5   | 永磁同步电动机时滞反馈电流控制系统混沌行为研究     | 112 |
| 5.5.1 | 引言                          | 112 |
| 5.5.2 | PMSM 延迟反馈电流控制系统模型           | 113 |
| 5.5.3 | PMSM 延迟反馈电流控制系统混沌行为         | 113 |
| 5.5.4 | 时滞反馈电流作用机理分析                | 117 |
| 5.5.5 | 小结                          | 119 |
|       | 参考文献                        | 119 |
| 第 6 章 | 非线性电力系统的随机动力学行为分析           | 122 |
| 6.1   | 引言                          | 122 |
| 6.2   | 随机动力学系统分析的基本方法与理论           | 124 |
| 6.2.1 | 随机函数的正交分解                   | 124 |
| 6.2.2 | 随机 Melnikov 方法              | 126 |
| 6.2.3 | 随机平均法                       | 131 |
| 6.3   | 随机电机系统响应的 Chebyshev 正交多项式逼近 | 132 |
| 6.3.1 | 引言                          | 132 |
| 6.3.2 | 含随机参数激励简单电机模型的等效确定性系统       | 132 |
| 6.3.3 | 含随机参数激励简单电机模型的分岔研究          | 135 |
| 6.3.4 | 小结                          | 136 |
| 6.4   | 一类非线性电机模型的随机混沌行为            | 137 |
| 6.4.1 | 引言                          | 137 |
| 6.4.2 | 白噪声激励下非线性电力系统的振荡模型          | 137 |

|       |                               |     |
|-------|-------------------------------|-----|
| 6.4.3 | 随机 Melnikov 积分及其动力学特性 .....   | 138 |
| 6.4.4 | 系统可能出现混沌的参数分析与仿真 .....        | 142 |
| 6.4.5 | 小结 .....                      | 144 |
| 6.5   | 随机激励下简单电力系统的平稳响应与首次穿越 .....   | 144 |
| 6.5.1 | 引言 .....                      | 144 |
| 6.5.2 | 电机模型的随机平均 .....               | 144 |
| 6.5.3 | 系统的首次穿越 .....                 | 146 |
| 6.5.4 | 小结 .....                      | 148 |
| 6.6   | 有界噪声诱导简单互联电力系统混沌运动 .....      | 148 |
| 6.6.1 | 引言 .....                      | 148 |
| 6.6.2 | 含有有界噪声简单互联的电力系统模型 .....       | 148 |
| 6.6.3 | 确定性电力系统混沌运动分析 .....           | 149 |
| 6.6.4 | 随机电力系统混沌运动分析 .....            | 151 |
| 6.6.5 | 数值模拟 .....                    | 152 |
| 6.6.6 | 小结 .....                      | 153 |
| 6.7   | 随机噪声诱导单机无穷大母线电力系统混沌 .....     | 153 |
| 6.7.1 | 引言 .....                      | 153 |
| 6.7.2 | 含有随机噪声单机无穷大母线电力系统数学模型 .....   | 154 |
| 6.7.3 | 数值模拟 .....                    | 155 |
| 6.7.4 | 随机噪声诱导电力系统混沌的可能物理机制 .....     | 156 |
| 6.7.5 | 小结 .....                      | 159 |
| 6.8   | 随机参数激励下单机无穷大母线电力系统动力学分析 ..... | 159 |
| 6.8.1 | 引言 .....                      | 159 |
| 6.8.2 | 含有随机参数激励单机无穷大母线电力系统数学模型 ..... | 160 |
| 6.8.3 | Melnikov 条件以及随机参数诱导混沌 .....   | 161 |
| 6.8.4 | 数值模拟 .....                    | 163 |
| 6.8.5 | 小结 .....                      | 165 |
| 6.9   | 随机相位作用下电力系统动力学分析 .....        | 165 |
| 6.9.1 | 引言 .....                      | 165 |
| 6.9.2 | 含有随机相位单机无穷大母线电力系统数学模型 .....   | 166 |
| 6.9.3 | 随机相位诱导电力系统混沌的数值仿真 .....       | 166 |
| 6.9.4 | 随机相位诱导电力系统混沌可能的物理机制 .....     | 168 |
| 6.9.5 | 小结 .....                      | 170 |
| 6.10  | 本章小结 .....                    | 170 |
|       | 参考文献 .....                    | 170 |

|       |                                |     |
|-------|--------------------------------|-----|
| 第 7 章 | 复杂电力网络的动力学模型构建、行为分析与控制 .....   | 176 |
| 7.1   | 引言 .....                       | 176 |
| 7.2   | 复杂网络理论在电力网络中的应用研究现状 .....      | 176 |
| 7.2.1 | 复杂电力网络模型的研究现状 .....            | 177 |
| 7.2.2 | 电力网络结构脆弱性研究进展 .....            | 178 |
| 7.2.3 | 复杂电网级联故障模型和机理研究进展 .....        | 179 |
| 7.3   | 基于择优重新分配的复杂电网级联故障分析 .....      | 185 |
| 7.3.1 | 概述 .....                       | 185 |
| 7.3.2 | 基于择优重新分配的电网级联故障模型 .....        | 185 |
| 7.3.3 | 仿真分析 .....                     | 187 |
| 7.3.4 | 小结 .....                       | 188 |
| 7.4   | 噪声诱导复杂电力网络崩溃 .....             | 189 |
| 7.4.1 | 概述 .....                       | 189 |
| 7.4.2 | 复杂电力网络模型 .....                 | 189 |
| 7.4.3 | 小结 .....                       | 190 |
| 7.5   | 基于环境的 PMSM 小世界网络混沌控制 .....     | 191 |
| 7.5.1 | 基于环境的 PMSM 小世界网络混沌控制模型 .....   | 191 |
| 7.5.2 | 基于环境的混沌控制器的设计 .....            | 192 |
| 7.5.3 | 基于环境的 PMSM 小世界网络控制方法与特性 .....  | 194 |
| 7.5.4 | 基于环境的 PMSM 小世界网络混沌控制数值仿真 ..... | 196 |
| 7.5.5 | 小结 .....                       | 197 |
|       | 参考文献 .....                     | 198 |

# 第 1 章 非线性系统的稳定性、分岔与混沌

## 动力学理论简介

### 1.1 概 述

对于受控的非线性动力学系统，系统的稳定性、分岔与动力学行为是至关重要的。因此，为了方便读者理解本书后续各章的内容，首先对非线性系统的稳定性与动力学理论进行简要介绍。

稳定性是控制系统最重要的特性之一，稳定性问题实质上是控制系统自身属性的问题。不稳定的系统是实际方面无用的系统，只有稳定的系统才有可能获得应用。例如，一个自动控制系统要能正常工作，它首先必须是一个稳定的系统，即系统应具有这样的性能：在它自身结构与参数产生变化或受到外界扰动后，虽然其原平衡状态会被打破，但在扰动和自身变化消失之后，它有能力自动地返回原平衡状态或者趋于另一个新的平衡状态继续工作。

在经典控制理论中，对于单输入、单输出线性系统，基于特征方程的根是否分布在根平面左半部分，采用劳斯-赫尔维茨代数判据和奈奎斯特频率判据等方法，即可得出稳定性的结论。这些方法的特点是不必求解方程，也不必求出特征根，而直接由方程的系数或频率特性曲线得出稳定性的结论，可称为直接判据。当然，也可以通过求解方程，根据解的变化规律得出稳定性的结论。相对于前一种方法，这种方法是非直接的，可称为间接判据。但是，上述的直接判据法，仅适用于线性定常系统，对于时变系统和非线性系统，这种直接判据法就不能适用了。若利用求解方程的方法判定稳定性，非线性系统和时变系统的求解通常是很困难的，一般难以获得解析解。虽然在经典控制理论中，可以利用频率分析的描述函数法和基于时域分析的相平面法来分析受控非线性系统的稳定性，但一般只能对特定的非线性系统进行稳定性分析，其结果也只能是近似性的，因而有很大的局限性。

在现代控制理论体系中，无论调节器理论、观测器理论还是滤波预测、自适应理论，都不可避免地要遇到系统稳定性的问题。在控制领域内，无论控制理论分析，还是绝大部分控制技术的实现，几乎都与稳定性有关，同时由于不稳定的系统一般不能应用于工程实践，所以在控制工程和控制理论中，稳定性问题一直是一个需要解决的最基本和最核心的问题。随着控制理论和工程所涉及的领域由线性定常系统扩展为时变系统和非线性系统，稳定性分析也日益复杂，需要新的理论分析工具。

1892年,俄国学者李雅普诺夫在《运动稳定性的一般问题》一文中,提出了著名的李雅普诺夫稳定性理论,该理论是控制系统稳定性理论分析、应用研究的重要基础。李雅普诺夫稳定性理论作为系统稳定性判据的一般方法,不仅适用于线性系统,也适用于非线性系统和时变系统。由于20世纪50年代以前的控制系统在结构上相对来说比较简单,采用经典控制理论的一些稳定判据已能解决工程应用中的问题,所以在相当长的时间里李雅普诺夫稳定性理论没有受到人们的足够重视。随着科学技术和社会工业化、信息化和航空航天技术的发展,控制系统的结构日益复杂,经典控制理论的一些稳定性判据已不适用于现代控制系统的分析。在20世纪60年代以后,状态空间分析法的理论迅速发展,致使李雅普诺夫稳定性理论又受到人们的极大重视,而且取得了丰硕的成果,并成为现代控制理论的一个重要组成部分。

李雅普诺夫的稳定性理论,主要有两种判断系统稳定性的方法。第一种方法的基本思路是先求解系统的微分方程,然后根据解的性质来判断系统的稳定性。这种思想与经典理论是一致的,所以称为间接法。第二种方法的基本思路是不必求解系统的微分方程,而是构造一个李雅普诺夫函数,根据这个函数的性质来判别系统的稳定性。这种方法由于不用求解方程就能直接判断系统的稳定性,所以称为直接法。这种方法不局限于线性定常系统,对于非线性、时变等任何复杂系统都是适用的。

## 1.2 系统稳定性的基本概念

首先对于系统稳定性<sup>[1]</sup>的有关基本概念进行简要介绍,以利于读者掌握有关系统稳定性判据。

### 1. 自治系统

在研究稳定性问题时,对于没有指定输入作用的系统,人们通常称这类系统为自治系统。自治系统为不显含时间 $t$ 的动力学,非自治系统则显含时间 $t$ 。一般而言,自由振动系统为自治系统,受迫振动系统则为非自治系统,在一般情况下,自治系统可用如下方程描述

$$\dot{X} = f(X, t), \quad t \geq t_0, \quad X(t_0) = X_0 \quad (1.1)$$

式中, $X$ 为 $n$ 维状态向量; $f(\cdot, \cdot)$ 为 $n$ 维向量函数。

### 2. 零输入响应

假定式(1.1)的解满足存在性、唯一性条件,并且解对于初始条件是连续相关的,那么就可将其由初始时刻 $t_0$ 的初始状态 $X_0$ 所引起的运动表示为

$$X(t) = \Phi(t, X_0, t_0), \quad t \geq t_0 \quad (1.2)$$

它是时间 $t$ 和 $X_0$ 、 $t_0$ 的函数,显然有 $\Phi(t, X_0, t_0) = X_0$ ,通常称此 $X(t)$ 为系统的零输入响应。 $X(t)$ 是从 $n$ 维状态空间中某一点出发的轨迹。

### 3. 系统平衡状态

稳定性问题是系统自身的一种动态属性，与外部输入无关。考察系统在零输入的情况，即输入  $u=0$  的自由运动状态。

设系统的状态方程如式 (1.1) 所示。 $f(X, t)$  是线性或非线性，定常或时变的  $n$  维函数，其展开式为

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

在上述状态方程 (式 (1.1)) 中，必存在一些状态点  $X_e$ ，当系统运动到达该点时，系统状态各分量将维持平衡，即  $\dot{X}|_{X=X_e} = 0$ ，该类状态点  $X_e$  就是系统的平衡状态。

若对所有  $t$ ，状态  $X(t)$  满足  $\dot{X} = 0$ ，则称该状态  $X(t)$  为系统平衡状态，记为  $X_e$ ，所以有

$$f(X_e, t) = 0 \quad (1.4)$$

成立。

如果系统是线性定常的，则

$$f(X_e, t) = AX \quad (1.5)$$

式中， $A$  为  $n \times n$  的矩阵。当  $A$  为非奇异矩阵时，系统仅存在唯一的平衡状态  $X_e = 0$ 。可见，对于线性定常系统，只有坐标原点处是系统仅有的一处平衡状态点。而当  $A$  为奇异矩阵时，则存在无穷多个平衡状态。这些平衡状态相应于系统的常数解（对于所有的  $t$ ， $X \equiv X_e$ ），显然，平衡状态的确定，不可能包含微分方程式，即式 (1.1) 的所有解，而只是代数方程式，即式 (1.4) 的解。如果平衡状态彼此是孤立的，则称它们为孤立平衡状态（孤立平衡点）。

对于非线性系统，系统平衡状态的解一般是不唯一的，其方程  $f(X, t) = 0$  的解可能有多，由具体系统方程决定，如

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2^3 \end{cases} \quad (1.6)$$

根据式 (1.4)，其平衡状态满足

$$\begin{cases} -x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_2^3 = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

解上述方程得

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0, 1, -1 \end{cases} \quad (1.8)$$

则该系统存在如下三个平衡状态，即

$$x_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

可见, 与线性系统不同, 非线性系统的平衡点除原点外, 可能出现其他非零平衡点。由于非零平衡点总可以通过坐标变换将其移到状态空间的坐标原点, 所以, 为方便讨论又不失一般性, 下面只取坐标原点作为系统状态的稳定性、渐近稳定性和不稳定问题, 进行讨论。

#### 4. 范数的概念

李雅普诺夫稳定性定义中采用了范数的概念, 因此在介绍李雅普诺夫稳定性定义之前, 首先简要介绍一下范数的定义。

##### 1) 范数的定义

$n$  维状态空间中, 向量  $X$  的长度称为向量  $X$  的范数, 用  $\|X\|$  表示, 则

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = (X^T X)^{\frac{1}{2}} \quad (1.10)$$

##### 2) 向量的距离

长度  $\|X - X_e\|$  称为向量  $X$  与  $X_e$  的距离, 写成

$$\|X - X_e\| = \sqrt{(x_1 - x_{e_1})^2 + \cdots + (x_n - x_{e_n})^2} \quad (1.11)$$

当  $X - X_e$  的范数限定在某一范围之内时, 则记为

$$\|X - X_e\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad (1.12)$$

式 (1.12) 的几何意义是, 在三维状态空间中表示以  $X_e$  为球心, 以  $\varepsilon$  为半径的一个球域, 可记为  $S(\varepsilon)$ , 如图 1.1 所示。

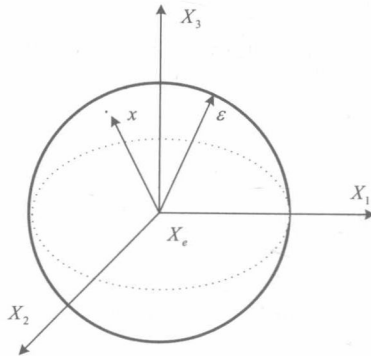


图 1.1 范数的三维状态空间示意图

下式表示在  $n$  维平衡状态  $X_e$  周围, 半径为  $k$  的超球域

$$\|X - X_e\| \leq k, \quad k > 0$$

式中,  $\|X - X_e\| = \sqrt{(x_1 - x_{1e_1})^2 + (x_2 - x_{2e_1})^2 + \cdots + (x_n - x_{ne_n})^2}$  称为欧几里得 (Euclid) 范数。

### 1.3 李雅普诺夫稳定性定义

#### 1. 系统平衡状态李雅普诺夫意义下稳定的定义

如果对给定的任一实数  $\varepsilon > 0$ ，都对应地存在一个实数  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ ，使得由满足不等式

$$\|X_0 - X_e\| \leq \delta(\varepsilon, t_0), \quad t \geq t_0 \quad (1.13)$$

的从任意初态  $X_0$  出发的解  $\Phi(t, X_0, t_0)$  都满足不等式

$$\|\Phi(t, X_0, t_0) - X_e\| \leq \varepsilon, \quad t \geq t_0 \quad (1.14)$$

则称平衡状态  $X_e$  在李雅普诺夫意义下是稳定的。

下面给出系统平衡状态  $X_e$  在李雅普诺夫意义下稳定的几何解释。假定原点为平衡点（非原点的平衡点可以通过坐标平移方法平移至原点）。当在  $n$  维状态空间中指定一个以原点为圆心，以任意给定的正实数  $\varepsilon$ （即前面所提到的范数）为半径的一个超球域  $S(\varepsilon)$  时，若存在另一个与之对应的以  $X_e$  为球心，以  $\delta(\varepsilon, t_0)$  为半径的超球域  $S(\delta)$ ，且有由  $S(\delta)$  中的任一点出发的运动轨线  $\Phi(t, X_0, t_0)$  对于所有的  $t \geq t_0$  都不超出球域  $S(\varepsilon)$ ，那么就称原点的平衡状态  $X_e$  是李雅普诺夫意义下稳定的。

#### 2. 平衡状态 $X_e$ 的一致稳定

在上面的论述中， $\delta(\varepsilon, t_0)$  表示  $\delta$  的选取是依初始时刻  $t_0$  和  $\varepsilon$  的选取而定的，如果  $\delta$  只依赖于  $\varepsilon$  而与  $t_0$  的选取无关，则称平衡状态  $X_e$  是一致稳定的。显然对于定常系统，稳定和一致稳定是等价的。通常要求系统是一致稳定的，以便在任一初始时刻  $t_0$  出现的运动轨道都是在李雅普诺夫意义下稳定的。

在二维空间中，上述李雅普诺夫意义下稳定的几何解释和状态轨迹变化如图 1.2 所示。

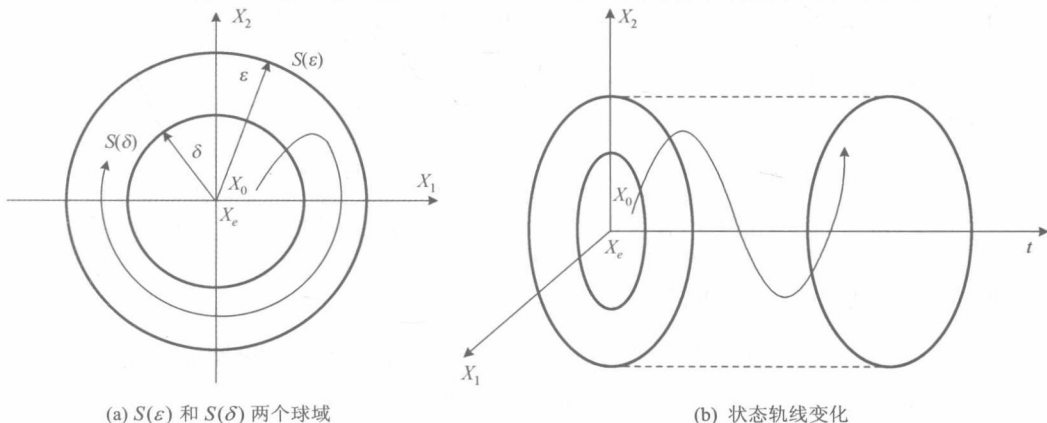


图 1.2 李雅普诺夫意义下稳定的几何解释和变化轨线

对于非时变的定常系数,  $\delta$  与  $t_0$  无关, 此时稳定的平衡状态一定是一致稳定的。

### 3. 平衡状态 $X_e$ 的渐近稳定

对于系统  $\dot{X}=f(X,t)$ , 若给定任意实数  $\varepsilon>0$ , 存在  $\delta(\varepsilon,t_0)>0$ , 使当  $\|X_0-X_e\|\leq\delta$  时, 从任意初始状态  $X_0$  发出的解  $\Phi(t,X_0,t_0)$  满足

$$\|\Phi(t,X_0,t_0)-X_e\|\leq\varepsilon, \quad t\geq t_0 \quad (1.15)$$

且对于任意小量  $\beta>0$ , 总有

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\|\Phi(t,X_0,t_0)-X_e\|\leq\beta \quad (1.16)$$

则称系统平衡状态  $X_e$  是渐近稳定的。如果  $\delta$  只依赖于  $\varepsilon$  而和  $t_0$  的选取无关, 则称平衡状态  $X_e$  是一致渐近稳定的。显而易见, 定常系统的一致渐近稳定和渐近稳定也是等价的。从实际控制工程应用的角度看, 一致渐近稳定是最重要的, 因为平衡状态  $X_e$  的渐近稳定性与  $t_0$  有关, 即与系统的初始值  $X_0$  有关, 所以在渐近稳定性条件下系统的运动轨迹并不一定最终意味着收敛到希望的结果。系统平衡状态  $X_e$  渐近稳定性的最大区域称为吸引域, 显然吸引域是状态空间的一部分, 从吸引域开始的每个运动轨线都是渐近稳定的。

渐近稳定在二维空间中的几何解释和变化轨线, 如图 1.3 所示。

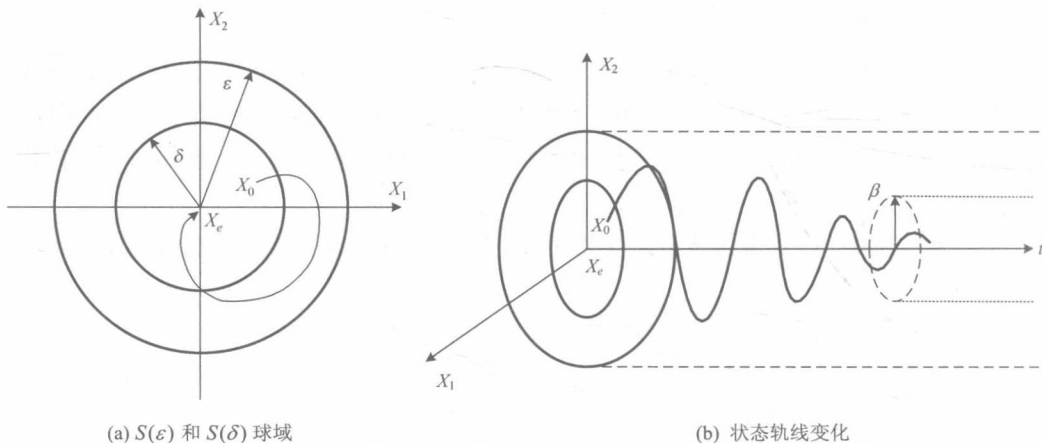


图 1.3 渐近稳定性的几何解释和变化轨线

### 4. 系统平衡状态 $X_e$ 的大范围渐近稳定

如果从状态空间的任一有限非零初始状态  $X_0$  出发的运动轨迹  $\Phi(t,X_0,t_0)$  都是有界的, 并且满足  $t\rightarrow\infty$ ,  $\Phi(t,X_0,t_0)\rightarrow X_e$ , 就称平衡状态  $X_e$  为大范围渐近稳定的<sup>[2]</sup>。即如果  $X_e$  是稳定的平衡状态, 并且  $t\rightarrow\infty$ , 式 (1.1) 的每个解都收敛于  $X_e$ , 则此平