APPLIED PROBABILITY AND STATISTICS

Applied probability and statistics
应用概率统计

（普及类·第五版）

宋占杰　孙晓晨　编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

应用概率统计

Applied Probability and Statistics

（普及类·第五版）

宋占杰　孙晓晨　编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是天津大学理学院数学系所编《应用概率统计》第五版，依据教育部最新的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"对原书第四版进行修订而成．内容包括：随机事件与概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、多维随机变量、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析．

本书内容丰富、说理透彻、文字流畅，收入大量实际问题的实例，对于揭示概念和理论的本质有较大作用．同时编写了《应用概率统计学习指导及习题解析》一书，并制作有电子课件，便于教师和学生参考．

本书可作为高等院校工科、经济、管理、农医等专业概率统计课程的教材，也可作为工程技术人员、实际工作者的自学参考用书．

图书在版编目(CIP)数据

应用概率统计：普及类/宋占杰，孙晓晨编．—5版．—天津：天津大学出版社，2015.4

ISBN 978-7-5618-5293-4

Ⅰ.①应… Ⅱ.①宋… ②孙… Ⅲ.①概率统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O211

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第074865号

出版发行 天津大学出版社
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编：300072)
电　　话 发行部：022-27403647
网　　址 publish.tju.edu.cn
印　　刷 天津市蓟县宏图印务有限公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 185mm×260mm
印　　张 16.25
字　　数 406千
版　　次 2015年5月第1版
印　　次 2015年5月第1次
定　　价 34.00元

第五版前言

在自然界，随机现象远多于确定性现象，因此加强随机数学的训练和培养在提高大学生能力和素质方面占重要地位。本书的第一版就是为这一目的编排和设计的，历次的修订，都始终体现这一目的。

本书问世26年来，一直保持再版和重印，这是和国内兄弟院校许多同行和学生的大力支持和帮助密切相关的。正是广大热心师生提出的许多宝贵的修改意见，使本书扬长避短、布局合理、日臻完善。

本书是天津大学几代概率任课教师几十年来经验的积累和集体智慧的结晶。从1988年由马逢时教授主持编写第一版开始，教材得到国内同行的认可，并被多所高校选定为教材，累计印数近十万册。之后历经欧俊豪副教授、王家生副教授、宋占杰教授、胡飞副教授以及广大任课教师刘嘉焜、徐漪萍、马利霞等的多次精心修订，逐步成为一本成熟教材。本次的修订工作，依然保持原版的主体风格，概率论部分由宋占杰教授执笔，统计部分由孙晓晨副教授执笔。

在体系的构建方面，本书参考了多所国际一流大学关于随机数学的教学理念，在完整包含教育部最新制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”的同时，也进行了大胆改革尝试。比如，将概率母函数、特征函数以及信息论中熵等重要概念加入并作为特殊随机变量函数的期望来处理，借此强化说明数学期望的意义和重要性并启发学生的创新思维；在中心矩应用方面，增加了偏度和峰度的概念。因为这些概念在工程中有着重要应用。所有改革的核心都是围绕天津大学“卓越工程师计划”而展开的。

本书将“概率”与“统计”中涉及的基本术语都标明了英文，以便学生进一步学习时查阅国外文献，为建设世界一流大学提供过渡教材。

本书的修订，得到了天津大学教务处和数学系领导及相关工作人员的热忱帮助，兄弟院校的同行也十分关注本书的再版，在此一并致以衷心的感谢。

由于编者水平有限，疏漏和不当之处恳请同行与读者指正。

联系邮箱：zhanjiesong@tju. edu. cn

编者

2014年10月于天津大学

目 录

第1章 随机事件与概率

本章主要内容

- ○ 概率论中的基本概念及术语
- ○ 随机事件之间的关系及运算
- ○ 随机事件的概率的定义及基本性质
- ○ 古典概型、几何概型的定义及应用
- ○ 条件概率的定义,全概率公式、贝叶斯公式的应用
- ○ 事件独立性的定义及应用

在自然界和人类社会活动中出现的各种现象大体上可以分为两类:一类是在一定条件下必然出现某种结果的现象,称之为**确定性现象**(deterministic phenomenon);另一类是在一定条件下可能出现也可能不出现的现象,称之为**随机现象**(random phenomenon).

确定性现象的例子非常多.例如,在标准大气压下,水加热到 100 ℃必然沸腾;同性电荷必然互相排斥,异性电荷必然互相吸引;人们从地面向上抛一石子,经过一段时间石子必然落到地面上;在恒力作用下质点必然做匀加速运动,等等.

随机现象的例子也是广泛存在的.例如,往桌面上掷一硬币,可能是带币值的一面朝上,也可能是另一面朝上,而且在掷之前不能确定哪一面朝上;检查生产流水线上的一件产品,可能是合格品,也可能是不合格品;打靶射击,尽管经过瞄准,子弹着点却可能在靶心附近的各个位置;下一个交易日股市的股价指数可能上升,也可能下跌,而且升跌幅度的大小也不能事先确定,等等.

虽然随机现象在一定的条件下,可能出现这样或那样的结果,而且在每一次试验或观测之前不能预知这一次试验的确切结果,但经过长期的、反复的试验或观测,人们逐渐发现所谓结果的"不能预知",只是对一次或较少次数试验或观测而言的.当在相同条件下进行大量重复试验或观测时,这些不确定的结果会呈现出某种规律性.例如,多次抛掷均匀硬币时,出现带币值的一面朝上的次数约占抛掷总次数的一半.这种在大量重复试验或观测时,试验结果呈现出的规律性,就是后绪章节所讲的统计规律性.**概率论**(probability theory)是根据随机现象的特点建立确切的数学模型.系统研究模型的性质和特征,从而对随机现象出现的某一确定结果的可能性作出确切数值判定,并综合分析其共性,形成一门系统化、理论化的学科.数理统计(mathematical statistics)是以概率论的理论为基础,利用对随机现象的观测数据,判断统计方法、条件、模型、结论的可靠性的一门学科.

作为数学的一个重要分支,概率论与数理统计学科于 1654 年诞生.在 17 世纪研究概率论的先驱中,最著名的有惠更斯、巴斯卡、费尔马和 J. 伯努利等人,后继者中不乏历代的大数学家和科学家.当时,由于赌徒们所提出的一些还未能归入数学范围的问题,引起了巴斯卡和费尔马的通信讨论,在讨论过程中逐渐结晶出了概率及数学期望等重要概念.当时研究的模型较简单,就是现在统称的古典概型.

其后,随着生产实践的发展,特别是在射击理论、人寿保险、测量误差等工作中提出的一些概率问题,促使人们在概率论的极限定理方面进行深入研究.起初主要对伯努利试验概型进行研究,其后则推广到更为一般的场合.极限定理的研究在 18 世纪和 19 世纪的整整 200 年中成了概率论研究的中心课题.在 20 世纪初,由于新的更有力的数学方法的引入,这些问题才得到了较好的解决.

虽然概率论的历史悠久,但它严格的数学基础的建立及理论研究与实际应用的极大发展却推迟到 20 世纪初.1933 年前苏联著名数学家柯尔莫哥洛夫建立了概率论的公理化体系.这一体系的建立标志着概率论已经成为一门成熟的数学学科.

由于物理学(如统计物理)、生物学及工程技术(如自动电话、无线电技术)发展的推动,概率论与数理统计得到了飞速的发展.概率统计的思想随着其理论课题的不断扩大与深入,渗入自然科学诸领域并成为现代科学发展的明显标志之一.目前,概率统计在交通运输、测量学、地质学、天文学、气象学、物理学、化学、电子技术、通信技术、自动化科学、生物学、医

学、经济学、军事科学以及各尖端技术中获得了广泛的应用，在工业、农业、商业、军事等部门发挥了重要的作用．概率论与数理统计已经成为最活跃、最重要的数学学科之一．

1.1 样本空间与随机事件

1.1.1 随机试验

为了研究随机现象内部存在的数量规律性，必须对随机现象进行观察或试验．今后我们把对随机现象所进行的观察或试验统称为试验．

例 1.1.1 抛一硬币，观察正、反面出现的情况．

例 1.1.2 掷一枚骰子，观察出现的点数．

例 1.1.3 把一硬币连抛两次，观察正、反面出现的情况．

例 1.1.4 一射手进行射击，直到击中目标为止，记录射击次数．

例 1.1.5 在同一生产条件下生产的一种电子元件，任意抽取一件测试其寿命．

上面列举的5个试验的例子，有以下共同特点：①试验可以在相同条件下重复进行；②试验的可能结果不止一个，并且所有可能的结果是预先知道的；③进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现．

我们把具有以上3个特点的试验称为**随机试验**(random experiment)，简称试验(trial)，记为 E．

1.1.2 样本空间

在一个随机试验 E 中，试验的所有可能结果组成的集合称为随机试验 E 的**样本空间**(sample space)，通常用字母 Ω 表示．Ω 中的元素，称作**样本点**(sample point)，常用 ω 表示．

在上述例 1.1.1 中，试验的所有可能结果有两个：正(抛得正面朝上)，反(抛得反面朝上)．因此样本空间 $\Omega=\{正,反\}$．若记

$$\omega_1=正,\omega_2=反,$$

则样本空间可记为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}.$$

在例 1.1.2 中，试验的所有可能结果有6个：1点，2点，…，6点．若记

$$\omega_i=i\text{ 点},i=1,2,\cdots,6,$$

则样本空间可记为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}.$$

在例 1.1.3 中，试验的所有可能结果有4个：(正，正)，(反，反)，(正，反)，(反，正)．这里记号(正，反)表示“第一次抛得正面，第二次抛得反面”这一结果，其余类似．因此若记

$$\omega_1=(正,正),\omega_2=(反,反),\omega_3=(正,反),\omega_4=(反,正),$$

则样本空间可记为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}.$$

在例 1.1.4 中，若用 n 表示“击中目标所需要的射击次数为 n”这一结果，$n=1,2,\cdots$，则

样本空间可记为

$$\Omega=\{1,2,3,\cdots\}.$$

在例 1.1.5 中，若用 x 表示“电子元件的寿命为 x h”这一结果，$0\leqslant x<+\infty$，则样本空间可记为

$$\Omega=\{x:\ 0\leqslant x<+\infty\}.$$

上述例 1.1.1、例 1.1.2、例 1.1.3 各随机试验的样本空间都只有有限个样本点. 例 1.1.4的样本空间含有无穷多个样本点，但这些样本点可以依照某种次序排列出来，我们称它的样本点数为可列无穷多个. 例 1.1.5 的样本空间也含有无穷多个样本点，但它们充满区间$[0,+\infty)$，此时我们称它的样本点数为不可列无穷多个.

1.1.3 随机事件

在随机试验中，可能发生也可能不发生的事情称为**随机事件**(random event). 如例 1.1.1中，抛一枚硬币，“正面朝上”；例 1.1.2 中，掷一枚骰子，“出现的点数小于 3”；例 1.1.3 中，一枚硬币连续抛两次，“两次都抛得正面朝上”“仅有一次抛得正面朝上”“至少有一次抛得正面朝上”；例 1.1.4 中，“射击次数是 5”；例1.1.5中，“电子元件寿命为 1 000 h”“电子元件寿命不超过 2 000 h”，等等. 上述情况在试验中，它们可能发生，也可能不发生，因此都是随机事件. 随机事件常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 因此，这些随机事件也可分别记为

$A=\{$正面朝上$\}$；

$B=\{$点数小于 3$\}$；

$C_1=\{$两次都抛得正面朝上$\}$；

$C_2=\{$仅有一次抛得正面朝上$\}$；

$C_3=\{$至少有一次抛得正面朝上$\}$；

$D=\{$射击次数是 5$\}$；

$E_1=\{$电子元件寿命为 1 000 h$\}$；

$E_2=\{$电子元件寿命不超过 2 000 h$\}$.

对于一个随机试验来说，它的每一个可能结果构成一个随机事件，它们是随机试验中最简单的随机事件，称为**基本事件**(elementary event; fundamental event). 如上述的事件 A，C_1,D,E_1 都是相应随机试验中的基本事件.

在一个随机试验中，除了基本事件外，还有由若干个可能结果所组成的事件，相对于基本事件，称这种事件为**复合事件**(compound event). 例如，上述随机事件 B,C_2,C_3,E_2 都是复合事件.

随机试验中的事件，也可以用样本空间 Ω 的子集来表示. 例如前面所列举的事件就可以用样本空间的子集表示如下：$A=\{$正$\}$，$B=\{1,2\}$，$C_1=\{($正,正$)\}$，$C_2=\{($正,反$)$,$($反,正$)\}$，$C_3=\{($正,正$)$,$($正,反$)$,$($反,正$)\}$，$D=\{5\}$，$E_1=\{1\ 000\}$，$E_2=\{x:\ 0\leqslant x\leqslant 2\ 000\}$.

由此可见，当一个随机事件 B 用样本空间 Ω 的子集来表示时，B 就是样本点的集合. 对于基本事件来说，由于它仅包含某个样本点，所以用以这个样本点为元素的单点集来表示它. 对于复合事件来说，由于它是由若干个样本点所组成的，所以用以这若干个样本点为元素的集合来表示它. **当 B 中某一个样本点出现，称事件 B 发生.**

在随机试验中，每次试验一定发生的事情称为**必然事件**(certain event)；每次试验一定不发生的事情称为**不可能事件**(impossible event). 必然事件用 Ω 表示，不可能事件用 $\varnothing$ 表示. 这是因为样本空间 Ω 包含所有的样本点，它是 Ω 自身的子集，在每次试验中，必然有 Ω 中的某一个样本点出现，所以事件 Ω 在每次试验中一定发生，故 Ω 是必然事件. 又因为在每次试验中，不可能有 $\varnothing$ 中的样本点出现($\varnothing$ 为空集，不含样本点)，所以事件 $\varnothing$ 在每次试验中一定不发生，故 $\varnothing$ 是不可能事件.

必然事件 Ω 和不可能事件 $\varnothing$ 本质上不是随机事件. 为今后研究问题方便，我们把必然事件和不可能事件作为随机事件的两个极端情形统一处理.

1.1.4 事件的关系和运算

由于事件定义为样本空间的某个子集，因此事件之间的关系与运算和集合论中集合之间的关系与运算是一致的. 对应着集合的关系与运算，定义事件的关系与运算如下.

若事件 A 发生时，必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**(contain)事件 A，记为 $A\subset B$，或 $B\supset A$(图 1.1.1).

若事件 B 包含事件 A，并且事件 A 也包含事件 B，即有 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**(equivalent)，记为 $A=B$.

表示事件A与事件B中至少有一个发生的事件，称为事件A与事件B的**和事件**(union event)，亦称为事件A与B的**并**(union)，记为$A\cup B$(图 1.1.2).

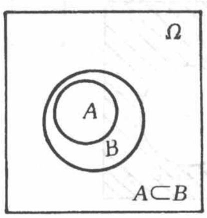

图 1.1.1

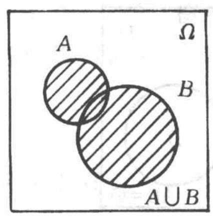

图 1.1.2

关于事件的并，可以推广到有限个甚至无穷多个事件的情形：

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$

表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生；

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$$

表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少有一个发生.

表示事件 A 与 B 同时发生的事件，称为事件 A 与 B 的**积事件**(intersection event)，亦称为事件 A 与事件 B 的**交**，记为 $A\cap B$ 或 AB(图 1.1.3).

事件的交，可以推广到有限个甚至无穷多个事件的情形：

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$$

表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生；

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots$$

表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生.

表示事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，称为事件 A 与 B 的**差事件**(difference event)，记为 $A-B$(图 1.1.4).

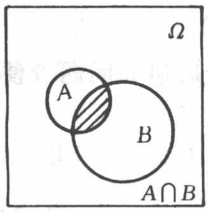

图 1.1.3

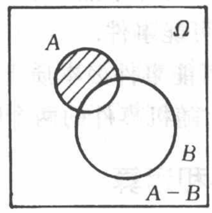

图 1.1.4

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 是**互不相容事件**(mutually exclusive events)(或称是**互斥事件**(exclusive events))(图 1.1.5).

若事件 A 与 B 满足 $A\cup B=\Omega$，且 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互为**逆事件**(inverse events)，亦称事件 A 与 B 互为**对立事件**(complementary events). 这是指对每次试验来说，事件 A 和 B 中必有一个发生，且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$(图 1.1.6)，则 $\overline{A}=\Omega-A=B$. 必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 显然互为对立事件.

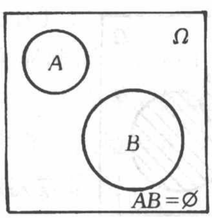

图 1.1.5

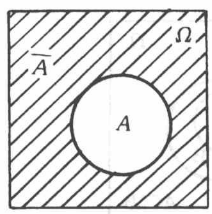

图 1.1.6

在进行事件运算时，经常要用到下述运算规律.

(1) 关于事件和(并)的运算规律：

$A\cup B=B\cup A$； (交换律)

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$； (结合律)

$A\cup A=A$； (幂等律)

$A\cup\Omega=\Omega$；

$A\cup\varnothing=A$；

若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$.

(2) 关于事件积(交)的运算规律：

$AB=BA$； (交换律)

$A(BC)=(AB)C$； (结合律)

$AA=A$； (幂等律)

$A\overline{A}=\varnothing$；

$A\Omega=A$；

$A\varnothing=\varnothing$；

若 $A\subset B$，则 $AB=A$.

(3) 关于事件积与事件和的混合运算规律：

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$； (分配律)

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$； (分配律)

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$. (对偶律)

对偶律对任意有限个事件或可列无穷多个事件的并、交均成立.

例 1.1.6 设 A,B,C 是随机试验 E 中的随机事件，则：

事件"A 与 B 发生，C 不发生"可表示成 $AB\overline{C}$；

事件"A,B,C 中至少有一个发生"可表示成 $A\cup B\cup C$；

事件"A,B,C 中恰好发生一个"可表示成 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

例 1.1.7 把事件 $A\cup B$ 写成互不相容事件的和事件的形式，则有

$A\cup B=A\cup(B-A)=A\cup(B-AB)$.

1.2 概率与频率

上节介绍了随机试验、样本空间和随机事件等基本概念. 在一个随机试验中，对随机事件发生的可能性大小应如何作定量分析研究呢？以下将要给出的"概率"这一概念正是对随机事件发生可能性大小的一种度量. 为此，先介绍一点预备知识——频率的概念.

1.2.1 频率

设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 m 次，则称比值

$$f_n(A)=\frac{m}{n} \tag{1.2.1}$$

为事件 A 在 n 次重复试验中发生的**频率**(frequency).

人们经过长期的实践发现，虽然随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，带有不确定性，但当重复试验次数 n 充分大时，随机事件 A 发生的频率总在一确定的数值附近摆动，有稳定于该确定值的趋势.

例 1.2.1 掷硬币试验.

历史上进行过"掷硬币"的试验，用来观察"正面向上"这一事件发生的规律，下表是试验结果的具体记录.

实验者	投掷次数 n	正面向上次数 m	频率 f_n
蒲丰　(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊(K. Pearson)	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊(K. Pearson)	24 000	12 012	0.500 5

从上面的试验记录可以看到，在多次重复(掷硬币)试验中，事件"正面向上"发生的频率虽不完全相同，但却在一固定的数值 0.5 附近摆动而呈现出一定的稳定性，频率随着试验次

数 n 的增大有越来越接近于数值 0.5 的趋势. 频率的这种稳定性表明一个随机事件发生的可能性有一定的大小可言:频率若稳定于较大的数值,表明相应事件发生的可能性较大;频率若稳定于较小的数值,表明相应事件发生的可能性较小;而频率所接近的这个固定数值就是相应事件发生可能性大小的一个客观的定量的度量,称为相应事件的概率.

为了进一步揭示概率的本质,我们先来看看与概率有密切关系的频率所具有的性质. 由式(1.2.1)知,频率具有如下性质:

(1) 对任何事件 A, $f_n(A)\geqslant 0$; (非负性)

(2) $f_n(\Omega)=1$; (规范性)

(3) 若事件 A,B 互不相容,即 $AB=\varnothing$,则

$$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B).$$

一般地,对任意有限多个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$, $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$,则有

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}f_n(A_i). \qquad \text{(有限可加性)}$$

1.2.2 概率的定义

由频率的稳定性和频率的上述性质得到启发,前苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)在 1933 年给出度量随机事件发生可能性大小的概率的定义.

定义 设 Ω 是随机试验 E 的样本空间, A 是 E 中任一事件, $P(A)$ 是 A 的实函数,且满足

(1) $P(A)\geqslant 0$; (非负性) (1.2.2)

(2) $P(\Omega)=1$; (规范性) (1.2.3)

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互不相容,即

$$A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots),$$

则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i), \qquad \text{(可列可加性)} \quad (1.2.4)$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

由概率的上述定义可推得概率的如下性质.

性质 1 不可能事件 $\varnothing$ 的概率为 0,即

$$P(\varnothing)=0.$$

证明 因 $\Omega=\Omega\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$,由概率的可列可加性即式(1.2.4)可得

$$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots,$$

而 $P(\varnothing)\geqslant 0$,故由上式知 $P(\varnothing)=0$.

性质 2 概率具有有限可加性,即若 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i). \qquad (1.2.5)$$

证明 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=P(A_1\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\cdots)$,

由式(1.2.4)及 $P(\varnothing)=0$ 得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

性质 3　$P(A)=1-P(\overline{A})$.

证明　因 $A\cup\overline{A}=\Omega$，且 $A\overline{A}=\varnothing$，故由式(1.2.3)及式(1.2.5)得

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}).$$

从而　$P(A)=1-P(\overline{A})$.

性质 4　设 A,B 是两个事件，若 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A), \tag{1.2.6}$$

$$P(B)\geqslant P(A). \tag{1.2.7}$$

证明　因 $A\subset B$，所以 $B=A\cup(B-A)$，且 $A(B-A)=\varnothing$，再由概率的有限可加性式(1.2.5)，得 $P(B)=P(A)+P(B-A)$，移项得式(1.2.6).

又因 $P(B-A)\geqslant 0$，所以 $P(B)\geqslant P(A)$.

性质 5　对任意事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.2.8}$$

证明　因 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，且 $A(B-AB)=\varnothing$，$AB\subset B$，故由式(1.2.5)及式(1.2.6)得 $P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

式(1.2.8)还可推广到多个事件的情形. 设 A_1,A_2,A_3 为任意三个事件，则

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)=&P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-\\&P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

一般地，对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n). \tag{1.2.10}$$

例 1.2.2　已知 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，在下列 3 种情况下分别求出 $P(B\overline{A})$ 的值.

(1)A 与 B 互不相容；(2)$B\subset A$；(3)$P(AB)=\dfrac{1}{4}$.

解　(1)由于 $AB=\varnothing$，所以 $B\subset\overline{A}$，$B\overline{A}=B$，故 $P(B\overline{A})=P(B)=\dfrac{1}{3}$.

(2)当 $B\subset A$ 时，$B\overline{A}=\varnothing$，故 $P(B\overline{A})=0$.

(3)由于 $B\overline{A}=B-A=B-AB$，而 $AB\subset B$. 所以

$$P(B\overline{A})=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12}.$$

注：此类问题用文氏图解答既快又准，读者不妨一试.

1.3　古典概型

概率的公理化定义虽然告诉人们如何去识别概率，但它没有告诉人们如何确定概率. 在

概率论发展的早期，受到当时数学发展水平的局限，只能计算一类特定的随机试验对应的随机事件的概率. 这类随机试验具有如下两个重要特征：

(1)试验的样本空间 Ω 中只含有有限个样本点，不妨设为 n 个，并记为 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$；

(2)每个样本点作为基本事件出现的可能性相同，即

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\}).$$

为简便记，后文将 $P(\{\omega\})$ 简化为 $P\{\omega\}$.

一般把这类随机现象的数学模型称为**古典概型**(classical probability). 古典概型中事件 A 发生的概率计算公式为

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{\text{事件 } A \text{ 所含的样本点数}}{\text{样本点总数}}=\frac{m}{n}.$$

其理由如下.

设随机试验 E 的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$. 由于 E 是古典概型，故每个基本事件出现的概率都相同，即有

$$P\{\omega_1\}=P\{\omega_2\}=\cdots=P\{\omega_n\}.$$

由基本事件两两互斥，且 $\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\cdots\cup\{\omega_n\}=\Omega$，得

$$1=P(\Omega)=P(\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\cdots\cup\{\omega_n\})=P\{\omega_1\}+P\{\omega_2\}+\cdots+P\{\omega_n\},$$

故 $$nP\{\omega_i\}=1,P\{\omega_i\}=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n).$$

设事件 A 含有 m 个样本点，$A=\{\omega_{j_1},\omega_{j_2},\cdots,\omega_{j_m}\}$，则

$$A=\{\omega_{j_1}\}\cup\{\omega_{j_2}\}\cup\cdots\cup\{\omega_{j_m}\},$$

由概率的有限可加性得

$$P(A)=\sum_{k=1}^{m}P\{\omega_{j_k}\}=\frac{m}{n}.$$

古典概型有许多方面的应用，产品抽样检查是其中最为广泛的应用之一. 如灯泡的寿命检验、某器件的耐磨损程度检验等都具有破坏性，我们只能从产品中随机地抽取若干件进行检验，并根据检验结果来判断整批产品的质量. 另外，在理论物理以及运筹学中，古典概型也有重要的应用.

例 1.3.1 在某次集会中，共有 30 人参加，若不考虑闰年，假定一个人在一年内每一天出生的可能性都相同，试求下列事件的概率：

(1)$A=\{30$ 人生日全不相同$\}$；

(2)$B=\{30$ 人中至少有两个人在同一天出生$\}$.

解 因每个人在一年内每一天出生的可能性都相同，故样本点总数为 365^{30}，30 人生日全不同，相当于第一个人有 365 种选择，第二个人有 364 种选择，……，最后一人有 336 种选择，即 A 中包含的样本点数为 A_{365}^{30}，故

$$P(A)=\frac{\mathrm{A}_{365}^{30}}{365^{30}}\approx 0.29.$$

又因为 B 是 A 的对立事件，故

$$P(B)=1-P(A)=0.71.$$

下面给出部分 n 个人中至少有两人生日相同的概率表.

n个人中至少有两人生日相同的概率表

人数 n	10	15	20	25	30	35	40	45	50
对应概率 P	0.12	0.25	0.41	0.57	0.71	0.81	0.89	0.94	0.97

从上表可以看出：在 40 人左右的人群里，十有八九发生"两人或两人以上生日相同"这一事件.

例 1.3.2　某城市有 N 辆卡车，车号为 1 到 N. 有一个外地人到该城市去，把遇到的 n 辆车的号码抄下(遇到一辆车抄一辆，可能重复抄到某个车号)，求下列事件的概率：

(1)$A=\{$抄到的 n 个号码全不相同$\}$；

(2)$B=\{$抄到的最大车号不大于 $k(1\leqslant k\leqslant N)\}$；

(3)$C=\{$抄到的最大车号恰为 $k(1\leqslant k\leqslant N)\}$.

解　(1)由已知条件，这个外地人可能重复抄到某个车号，即每次遇到 N 个车号之一，故样本点总数为 N^n，而抄到的 n 个号码全不相同，则 A 所包含的样本点数为 A_N^n，故

$$P(A)=\frac{\mathrm{A}_N^n}{N^n}.$$

(2)抄到的最大车号不大于 k，相当于每次抄号只能从 $1,2,\cdots,k$ 中任择其一，所以事件 B 所包含的样本点数为 k^n，故

$$P(B)=\frac{k^n}{N^n}=\left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

(3)抄到的最大车号恰为 k，相当于抄到最大车号不大于 k 的 n 个车号的抄写方式 k^n 减去抄到最大车号不大于 $k-1$ 的 n 个车号的抄写方式 $(k-1)^n$，即事件 C 中包含 $k^n-(k-1)^n$ 个样本点，故

$$P(C)=\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}=\left(\frac{k}{N}\right)^n-\left(\frac{k-1}{N}\right)^n.$$

上述的(3)曾在第二次世界大战中被盟军用来估计敌方的军火生产能力，依据被击毁的战车上的出厂号码的大量统计资料预估出 $P(C)$，利用(3)的结果推测其生产批量 N，从而得到较精确的情报.

例 1.3.3　袋内有 a 个白球与 b 个黑球. 每次从袋中任取一个球，取出的球不再放回去，接连取 k 个球$(k\leqslant a+b)$，求第 k 次取得白球的概率.

解　设 $A=\{$第 k 次取得白球$\}$，分析第 k 次取球的所有可能情况，故样本点总数为 C_{a+b}^1，而第 k 次取得白球所包含的样本点数为 C_a^1，所以

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_a^1}{\mathrm{C}_{a+b}^1}=\frac{a}{a+b}.$$

例 1.3.4　从 6 副不同的手套中任取 4 只手套，求其中至少有两只手套配成一副的概率.

解　设 $A=\{$取到的 4 只手套至少有两只配成一副$\}$，则 $\overline{A}=\{$取到的 4 只手套分别取自不同的 4 副手套$\}$，从 6 副手套中一只一只地任取 4 只共有 $N=\mathrm{A}_{12}^4=12\times11\times10\times9$ 种不同取法. 由于 A 的取法直接计算不便，但对立事件 $\overline{A}$ 的取法较简捷，其取法共有 $M=\mathrm{A}_6^4\times 2^4=12\times10\times8\times6$ 种.