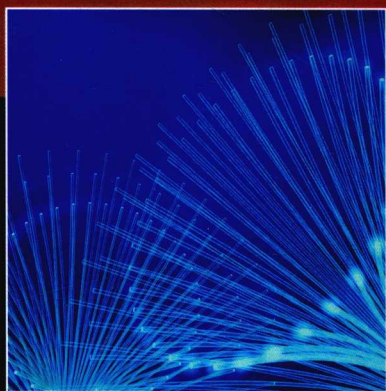


# 复杂电磁场边值问题 分域变量分离方法

马西奎 著



科学出版社

# 复杂电磁场边值问题 分域变量分离方法

马西奎 著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书讨论分域变量分离方法在解决复杂电磁场边值问题中的应用,内容包括理论、方法和应用。理论部分主要介绍电磁场理论和数学基础,特别是在数学基础方面涉及无穷阶联立一次方程组解的一般理论,以及傅里叶级数收敛性的改进方法。一般来说,变量分离方法所求得解是特征函数的无穷级数,这种级数往往收敛得很慢,改进其收敛性是使其实用的必经之路。方法部分主要论述分域划分方法、每个分域的通解中的特征函数和待定系数的决定方法。应用部分,分别以微波传输线问题、盐浴炉中的恒定电流场问题、电机槽中气隙磁场分布问题、电机槽内导体条中的涡流问题、部分填充介质波导、重入式谐振腔和波导阶梯不连续中的电磁波问题为对象,介绍了分域变量分离方法在解决复杂电磁场边值问题中的应用。

本书可供从事电气工程、电子工程、电磁场与微波技术、计算电磁学及相关专业领域研究和开发工作的科技人员参考,也可作为高等学校相关专业高年级本科生和研究生的参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

复杂电磁场边值问题分域变量分离方法/马西奎著. —北京:科学出版社, 2016. 4

ISBN 978-7-03-048105-4

I. ①复… II. ①马… III. ①电磁场-边值问题-计算方法 IV. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 085895 号

责任编辑:耿建业 陈构洪 王 苏 / 责任校对:桂伟利

责任印制:张 倩 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京通州皇家印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2016年4月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2016年4月第一次印刷 印张:10 1/2

字数:172 000

定价:88.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

## 前 言

电磁场边值问题在众多的应用领域中有着重要的意义,其求解方法大致可分为解析方法和数值方法两大类。解析方法的优点是可以得到一个通解,通过这个通解能够得到问题的各种参数作为变量对场分布影响的全貌,即当改变某一个参数时,其影响能够较容易地判断出来;此方法的计算量小、精度高。但是解析方法有着很大的局限性,只有在极少数简单的情况下方能得到通解。能求得解析解的情况,其所涉及物体的几何形状一般都是比较简单的(如平面、圆柱面、球面、椭圆柱面等)。此时物体的表面与特殊的正交曲线坐标系的坐标曲面相重合,这样就可以用变量分离法求解。相比之下,数值方法的应用范围更为广泛,但是也有缺点,即此时参数隐含在由一组给定数据所算出的数值结果中。若要判断出各种参数作为变量对场分布影响的全貌,数值方法必须对参数的各组数据分别进行计算,显然,其缺点是常常需要巨大的计算工作量。此外,稳定性是数值方法中特别基本的概念,并非所有求解常微分或偏微分方程的数值方法都是稳定的,正是这样的原因使得电磁场问题有时候难以得到有意义的数值解。例如,在混合有限元法中,一种情况是,精度很好的逼近结果却是不稳定的。可以这样说,偏微分方程的有效数值处理不是一种工艺,而是一种艺术。

近 30 多年来,随着计算机的能力越来越强,越来越多的复杂电磁场边值问题企图借助计算机用数值方法来解决,使得人们对解析方法的应用研究有所偏废,变得过分依赖计算机,忽视了解析方法解决复杂边值问题的可能性。实际情况是这样的,由达朗贝尔、伯努利和欧拉在 18 世纪中叶创立的变量分离方法,是求解偏微分方程最老的、系统的解析方法,但至今仍然是最有用的一种方法,占有很重要的地位,若处理得当,能够解决一些复杂电磁场边值问题(复杂性包括复杂的边界形状和复杂的边界条件)。

1986 年 8 月,我在《电子科学学刊》上发表了一篇论文《矩形同轴带状线电容的计算》,巧妙采用分域求解的手段,应用变量分离方法得到了电容的解析计算式。自此以后,我就有意识地寻找复杂电磁场边值问题,加以解决,并陆续在《通信学报》、《光纤与电缆及其应用技术》、《电炉》和《工业加热》等几种期刊上发表了数篇应用分域变量分离方法求解复杂电磁场边值问题的论文。

基于这些研究结果,我萌生了写一本关于复杂电磁场边值问题分域变量分离方法的书的念头。虽然由于种种原因,未能及时成稿,这个念头却在我心中发了芽、生了根,经过慢慢积累,慢慢发酵,今天总算是最后定稿。

写这本书的愿意是对解析法在解决复杂电磁场边值问题中的应用有一点促进和推动作用。希望本书的出版能够达到这个目的,或部分地达到这个目的。本书是根据我自1986年以来在应用变量分离方法寻求复杂电磁场边值问题解析解的一些科研工作整理而成的,也是我学习应用解析法的一些粗浅体会的总结,包括理论、方法和应用三部分内容。理论部分主要介绍电磁场理论和数学基础,特别是在数学基础方面涉及无穷阶联立一次方程组解的一般理论,以及傅里叶级数收敛性的改进方法。一般来说,变量分离方法所求得解是特征函数的无穷级数,这种级数往往收敛得很慢,改进其收敛性是使其实用的必经之路。方法部分主要论述分域划分方法、每个分域的通解中的特征函数和待定系数的决定方法。应用部分,分别以微波传输线问题、盐浴炉中的恒定电流场问题、电机槽中气隙磁场分布问题以及电机槽内导体条中的涡流问题、部分填充介质波导、重入式谐振腔和波导阶梯不连续中的电磁波问题为对象,介绍了分域变量分离方法在解决复杂电磁场边值问题中的应用。

本书的出版与我所在单位同事和朋友多年来的支持是密不可分的,在此感谢所有支持我的科研工作的人们。特别要感谢,我有一个耐心和支持我工作的家庭,感谢我的妻子丁西亚教授和我的女儿马丁,她们在我多年的教学和科研工作中给予了许多理解和默默的支持。

限于作者水平,虽然数易其稿,书中仍可能有不足和疏漏之处,希望读者不吝指正。

马西奎

2015年12月

于西安交通大学

# 目 录

## 前言

|                         |    |
|-------------------------|----|
| 第 1 章 基础理论和知识           | 1  |
| 1.1 简单媒质中的电磁场           | 1  |
| 1.1.1 电磁场基本方程组          | 1  |
| 1.1.2 媒质的本构方程           | 1  |
| 1.1.3 分界面衔接条件           | 2  |
| 1.2 静电场和恒定电场            | 2  |
| 1.2.1 静电场               | 2  |
| 1.2.2 恒定电场              | 3  |
| 1.2.3 边值问题              | 3  |
| 1.3 恒定磁场和涡流场            | 4  |
| 1.3.1 恒定磁场              | 4  |
| 1.3.2 涡流场               | 5  |
| 1.4 傅里叶级数               | 7  |
| 1.4.1 周期函数的傅里叶级数        | 7  |
| 1.4.2 函数的周期性延拓          | 10 |
| 1.4.3 傅里叶级数的若干性质        | 11 |
| 1.4.4 从最小二乘意义上来看傅里叶级数展开 | 13 |
| 1.5 贝塞尔函数简介             | 14 |
| 1.5.1 贝塞尔方程及其通解         | 14 |
| 1.5.2 贝塞尔函数的递推公式        | 15 |
| 1.5.3 贝塞尔函数的根           | 16 |
| 1.5.4 贝塞尔函数的正交性         | 18 |
| 1.5.5 贝塞尔函数的其他类型        | 18 |
| 1.5.6 贝塞尔函数的渐近公式        | 19 |
| 1.5.7 贝塞尔函数的微分和积分公式     | 21 |
| 1.6 变量分离方法——直角坐标系       | 21 |
| 1.7 变量分离方法——圆柱坐标系       | 25 |

|            |                         |           |
|------------|-------------------------|-----------|
| 1.7.1      | 平行平面场                   | 25        |
| 1.7.2      | 轴对称场                    | 26        |
| 1.8        | 复杂电磁场边值问题               | 29        |
| 1.9        | 傅里叶级数收敛性改进方法            | 31        |
|            | 参考文献                    | 36        |
| <b>第2章</b> | <b>分域变量分离方法</b>         | <b>37</b> |
| 2.1        | 经典分域变量分离方法              | 37        |
| 2.1.1      | 场域延伸至无穷远且同时包含了坐标原点的情况   | 37        |
| 2.1.2      | 在场域中电介质分片均匀分布情况         | 39        |
| 2.1.3      | 电荷分布在部分区域内的情况           | 41        |
| 2.2        | 多边形问题的分域变量分离方法          | 45        |
| 2.3        | 边界条件不一致性问题的分域变量分离方法     | 49        |
| 2.4        | 无穷阶联立一次方程组问题            | 53        |
|            | 参考文献                    | 55        |
| <b>第3章</b> | <b>微波传输线问题的分域变量分离方法</b> | <b>56</b> |
| 3.1        | 用场匹配法决定级数系数             | 56        |
| 3.1.1      | 电位分布的分域变量分离算法解          | 57        |
| 3.1.2      | 电位 $C_0$ 的计算            | 60        |
| 3.2        | 全矩形同轴线                  | 62        |
| 3.3        | 带端盖同轴圆柱导体               | 65        |
| 3.4        | 带状线                     | 68        |
| 3.4.1      | 分域变量分离方法解               | 68        |
| 3.4.2      | 保角变换法解                  | 71        |
| 3.5        | 用局部适合法决定级数系数            | 73        |
| 3.5.1      | 局部适合法                   | 73        |
| 3.5.2      | 圆柱-正 $N$ 棱柱同轴线          | 74        |
| 3.6        | 用变分法决定级数系数              | 79        |
| 3.6.1      | 部分嵌入接地导电平面内的圆柱微带传输线     | 79        |
| 3.6.2      | 广义十字同轴传输线               | 82        |
|            | 参考文献                    | 85        |
| <b>第4章</b> | <b>盐浴炉问题的分域变量分离方法</b>   | <b>87</b> |
| 4.1        | 埋入式相对平行板电极盐浴炉熔盐电阻       | 87        |
| 4.1.1      | 电位分布的分域变量分离方法解          | 88        |

---

|                                       |            |
|---------------------------------------|------------|
| 4.1.2 $K_R$ 的计算公式 .....               | 90         |
| 4.2 埋入式同侧平行板电极盐浴炉的熔盐电阻 .....          | 93         |
| 4.3 马蹄形电极盐浴炉熔盐电阻 .....                | 99         |
| 4.4 一个重要的定理 .....                     | 103        |
| 参考文献 .....                            | 104        |
| <b>第 5 章 恒定磁场和涡流问题的分域变量分离方法 .....</b> | <b>105</b> |
| 5.1 电枢开槽时的气隙磁场 .....                  | 105        |
| 5.2 铁心槽内的 T 形导体 .....                 | 108        |
| 5.3 铁心槽内的 L 形导体 .....                 | 113        |
| 5.4 高频电子电路用矩形截面圆环磁心中的涡流损耗 .....       | 117        |
| 5.4.1 边值问题和计算方法 .....                 | 118        |
| 5.4.2 损耗功率 .....                      | 120        |
| 5.4.3 数值结果举例 .....                    | 124        |
| 参考文献 .....                            | 125        |
| <b>第 6 章 电磁波问题的分域变量分离方法 .....</b>     | <b>126</b> |
| 6.1 电磁波解的构成 .....                     | 126        |
| 6.1.1 直角坐标系中解的构成 .....                | 127        |
| 6.1.2 圆柱坐标系中解的构成 .....                | 129        |
| 6.2 部分填充介质矩形波导中的波 .....               | 130        |
| 6.3 介质平板波导中的波 .....                   | 133        |
| 6.4 双重入式谐振腔的电磁波严格解 .....              | 137        |
| 6.5 单重入式谐振腔谐振频率的静态近似解 .....           | 140        |
| 6.6 波导中的不连续性问题 .....                  | 145        |
| 6.6.1 波导阶梯不连续 .....                   | 145        |
| 6.6.2 电感膜片 .....                      | 148        |
| 参考文献 .....                            | 152        |
| <b>附录 A 若干傅里叶级数的和 .....</b>           | <b>153</b> |
| <b>附录 B 若干常用不定积分和定积分公式 .....</b>      | <b>155</b> |
| <b>附录 C 本征值及本征函数 .....</b>            | <b>157</b> |



# 第 1 章 基础理论和知识

本章是本书的电磁场理论基础和数学基础。它包括三部分内容：第一部分介绍电磁场的基本理论，它们是电磁场基本方程组、静电场和恒定电场、恒定磁场和涡流场；第二部分是对傅里叶级数和贝塞尔函数的初步介绍，它们是变量分离方法的理论基础，对于求电磁场问题的变量分离形式解非常有用；最后一部分简要介绍直角坐标系和圆柱坐标系中的变量分离方法，以及傅里叶级数收敛性改进方法。在这里罗列这些最基本的电磁场理论基础知识和数学基础知识的目的，只是方便读者以后的阅读。

## 1.1 简单媒质中的电磁场

### 1.1.1 电磁场基本方程组

一切宏观电磁现象都能统一用麦克斯韦方程组(也称电磁场基本方程组)来描述，其数学形式如下：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.1.4)$$

式中， $\mathbf{E}$  是电场强度； $\mathbf{B}$  是磁感应强度； $\mathbf{H}$  是磁场强度； $\mathbf{D}$  是电位移矢量； $\mathbf{J}$  是传导电流体密度； $\rho$  是自由电荷体密度。

### 1.1.2 媒质的本构方程

某一电磁材料或电磁媒质对电磁场的影响是由场量  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{J}$  之间的本构关系所反映的。对于常见的各向同性、线性媒质来说，其本构关系如下：

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.1.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.1.6)$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad (1.1.7)$$

式中,  $\epsilon$ 、 $\mu$  和  $\gamma$  分别是媒质的介电常数、磁导率和电导率。

### 1.1.3 分界面衔接条件

在两种媒质的分界面上,分界面两侧的场可由下述分界面衔接条件联系起来:

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0} \quad (1.1.8)$$

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \quad (1.1.9)$$

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (1.1.10)$$

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma \quad (1.1.11)$$

式中,  $\mathbf{K}$  是分界面上的面传导电流密度;  $\sigma$  是分界面上的自由电荷面密度;  $\mathbf{e}_n$  是垂直于分界面由媒质 1 指向媒质 2 的单位矢量。

## 1.2 静电场和恒定电场

如果激发电磁场的场源(电荷  $\rho$  和电流  $\mathbf{J}$ )不随时间变化,那么电磁场基本方程组中的时间偏导数就不会存在,电场和磁场之间也就没有相互联系,此时可以分别独立地分析和计算电场或磁场<sup>[1-2]</sup>。

### 1.2.1 静电场

对于静电场,电磁场基本方程组简化为如下形式:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

如果引入电位函数  $\varphi$  (简称电位),可以使得一个静电场问题变得易于求解:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (1.2.2)$$

对于各向同性、线性和均匀的媒质,电位  $\varphi$  满足如下泊松方程:

$$\nabla^2 \varphi = \rho \quad (1.2.3)$$

在自由电荷体密度  $\rho = 0$  的区域内,式(1.2.3)变为

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (1.2.4)$$

这就是电位  $\varphi$  的拉普拉斯方程。

所有静电场问题的求解都可归结为在一定条件下寻求泊松方程或拉普拉斯方程解的过程。

### 1.2.2 恒定电场

在导电媒质中,恒定电场的基本方程组有如下形式:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

也可以引入电位  $\varphi$ ,有

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

在各向同性、线性和均匀的导电媒质中,电位  $\varphi$  满足拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

同样,所有恒定电场问题的求解都可归结为在一定条件下寻求拉普拉斯方程解的过程。

### 1.2.3 边值问题

寻求泊松方程或拉普拉斯方程的解答是一个积分过程,在所得的通解中必然会出现一些未确定的常数,这说明只由泊松方程或拉普拉斯方程不能唯一地确定静电场或恒定电场的解,还必须利用边界条件及电位函数的性质来确定通解中的常数。也就是说,静电场问题变为求满足给定边界条件的泊松方程或拉普拉斯方程的解的问题,称为静电场边值问题。同样的,恒定电场问题变为求满足给定边界条件的拉普拉斯方程的解的问题,称为恒定电场边值问题。

以静电场问题为例,在场域  $D$  的边界面  $S$  上给定边界条件的方式有以下几种类型。

(1) 已知在场域  $D$  的边界面  $S$  上各点的电位值,即给定:

$$\varphi|_S = f_1(s) \quad (1.2.6)$$

这种形式的边界条件称为第一类边界条件。这类问题称为第一类边值问题。在数学上,第一类边值问题也称为狄利克雷(Dirichlet)问题。

(2) 已知在场域  $D$  的边界面  $S$  上各点的电位法向导数值,即给定:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = f_2(s) \quad (1.2.7)$$

这种形式的边界条件称为第二类边界条件。这类问题称为第二类边值问题。在数学上,第二类边值问题也称为诺依曼(Neumann)问题。

(3) 已知在场域  $D$  的边界面  $S$  上各点电位和电位法向导数的线性组合值,即给定:

$$\left( \alpha \varphi + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \Big|_S = f_3(s) \quad (1.2.8)$$

这种形式的边界条件称为第三类边界条件。这类问题称为第三类边值问题。

如果待研究场域伸展到无限远处,则必须提出所谓无限远处的边界条件。对于电荷分布在有限区域的情况,在无限远处电位为有限值,即有

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r\varphi = \text{有限值} \quad (1.2.9)$$

这种边界条件称为自然边界条件。

此外,当在边值问题所定义的整个场域中,媒质并不是完全均匀的,但能分成几个均匀的媒质子区域时,应按各媒质子区域分别写出泊松方程或拉普拉斯方程。作为定解条件,还必须相应地引入不同媒质分界面上的衔接条件。

## 1.3 恒定磁场和涡流场

### 1.3.1 恒定磁场

对于恒定磁场,其基本方程组的形式为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

同样,如果引入矢量磁位  $\mathbf{A}$ ,也可以使得一个恒定磁场问题变得易于

求解:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.3.2)$$

对于各向同性、线性和均匀的媒质, 矢量磁位  $\mathbf{A}$  满足矢量泊松方程:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (1.3.3)$$

在传导电流密度  $\mathbf{J} = 0$  的区域内, 式(1.3.3)变为

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (1.3.4)$$

这就是矢量磁位  $\mathbf{A}$  所满足的矢量拉普拉斯方程。所有恒定磁场问题的求解都可归结为在给定边界条件下寻求矢量泊松方程或矢量拉普拉斯方程解的过程。

### 1.3.2 涡流场

在许多电工设备中都存在着大块导体(如发电机和变压器的铁心和端盖)。当这些大块导体处在变化的磁场中时, 其内部都会感应出电流。这些电流的特点是: 在大块导体内部自成闭合回路, 呈旋涡状流动。因此, 把这种电流称为涡旋电流, 简称涡流。

当忽略位移电流, 即取  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$  时, 在导电媒质中, 电磁场基本方程组将简化为如下形式:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (1.3.6)$$

#### 1. $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{J}$ 的微分方程

在电导率  $\gamma$  和磁导率  $\mu$  都为常数的导电媒质中, 容易得到电场  $\mathbf{E}$ 、磁场  $\mathbf{H}$  和电流密度  $\mathbf{J}$  分别满足如下微分方程:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.3.7)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.3.8)$$

$$\nabla^2 \mathbf{J} = \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (1.3.9)$$

它们是研究时变情况下导电媒质中电磁场分布和电流流动问题的基础。它们也是研究涡流问题的基础,通常将这些方程称为涡流方程或扩散方程。

在正弦稳态情况下,上述方程的复数形式分别为

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = k^2 \dot{\mathbf{E}} \quad (1.3.10)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} = k^2 \dot{\mathbf{H}} \quad (1.3.11)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{J}} = k^2 \dot{\mathbf{J}} \quad (1.3.12)$$

式中

$$k^2 = j\omega\mu\gamma \quad (1.3.13)$$

其中,  $\omega$  是正弦电磁场随时间变化的角频率。

## 2. 动态位 $\mathbf{A}$ 和 $\varphi$

在涡流场中,通过引入动态位  $\mathbf{A}$  和  $\varphi$  可以使得一个涡流场问题变得易于求解。电场强度  $\mathbf{E}$  和磁感应强度  $\mathbf{B}$  与动态位  $\mathbf{A}$  和  $\varphi$  之间有下列关系式:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.3.14)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \quad (1.3.15)$$

对于各向同性、线性和均匀的导电媒质,  $\mathbf{A}$  和  $\varphi$  分别满足如下两个微分方程:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0 \quad (1.3.16)$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (1.3.17)$$

当场随时间作正弦变化时,式(1.3.16)和式(1.3.17)的复数形式分别为

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} = k^2 \dot{\mathbf{A}} \quad (1.3.18)$$

$$\nabla^2 \dot{\varphi} = 0 \quad (1.3.19)$$

在涡流场中,如果给定边界面  $S$  上磁感应强度  $\mathbf{B}$  的切向分量,不仅矢量磁位  $\mathbf{A}$  的解是唯一的,而且磁场也被唯一地确定。另一方面,如果在边界面  $S$  上给定了  $\mathbf{A}$  的切向分量,则矢量磁位  $\mathbf{A}$  的解是唯一的,但磁感应强度  $\mathbf{B}$  并不能由解出的  $\mathbf{A}$  唯一地确定。为使磁场的解答成为唯一,需要另加一个条件。

可以证明,有下面的等式<sup>[3]</sup>:

$$\oint_S (\mathbf{e} \times \mathbf{H}) dS = \int_V \nabla \times \mathbf{H} dV = \int_V \mathbf{J} dV \quad (1.3.20)$$

这就是安培环路定律的广义形式。由于在边界面  $S$  上给定  $\mathbf{H}$  的切向分量就能充分保证磁场的唯一性,因此式(1.3.20)表明,除了需要给定在边界面  $S$  上  $\mathbf{A}$  的切向分量外,还要知道所围区域内电流密度的体积分。对于垂直于导体轴线的二维涡流场,这就是导体截面上电流密度的积分,也就是流过该系统的总电流。

## 1.4 傅里叶级数

### 1.4.1 周期函数的傅里叶级数

设  $f(x)$  是以  $T$  为周期的周期函数,假定它可以展开成三角级数的形式:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \quad (1.4.1)$$

利用三角函数系的正交性,容易确定  $a_0$ 、 $a_n$  和  $b_n$ 。它们分别为

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos n\omega x dx \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin n\omega x dx \end{cases} \quad (1.4.2)$$

式(1.4.2)就是在假定  $f(x)$  可以展开为三角级数这个前提下获得的傅里叶系数计算公式。式中,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 。

应该注意到,任何一个周期函数  $f(x)$ ,只要利用式(1.4.2)能计算出  $a_0$ 、 $a_n$  和  $b_n$ ,那么就能写出它的傅里叶级数。但是,这个级数是否收敛,以及收敛

时是否恰等于  $f(x)$  本身,这都是下面给出的定理要回答的问题。

**定理 1.4.1** 设  $f(x)$  是一个以  $T$  为周期的周期函数,满足如下狄利克雷条件:

(1) 在区间  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  上,或者连续或者只有有限个间断点,在间断点处函数的左、右极限存在(这样的间断点称为第一类间断点);

(2) 在区间  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  上,函数只有有限个极大值点与极小值点;

(3)  $f(\frac{T}{2}-0)$  与  $f(\frac{T}{2}+0)$  都存在。

则  $f(t)$  的傅里叶级数在区间  $(-\infty, +\infty)$  内处处收敛,并且这级数的和:

(1) 在  $f(t)$  的连续点处等于  $f(t)$ ;

(2) 在所有间断点处等于  $\frac{1}{2} [f(\frac{T}{2}+0) + f(\frac{T}{2}-0)]$ 。

按照上述定理,如果一个周期函数  $f(x)$  满足狄利克雷条件,那么它的傅里叶级数就是它的傅里叶展开式(在间断点处可能不等于  $f(x)$  自身)。

以严格的数学观点来说,狄利克雷条件是充分条件而不是必要条件。然而,代表物理问题解的大多数函数都满足这些条件<sup>[4]</sup>。

**例 1.4.1** 把函数

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0, \pm\pi \end{cases}$$

展开为傅里叶级数。

**解** 通过积分,得到

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0$$

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 2, 4, \dots \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 1, 3, \dots \end{cases}$$

这样,该函数的傅里叶级数为

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

**例 1.4.2** 把周期为  $2\pi$  的函数  $f(x) = x^2 (-\pi \leq x \leq \pi)$  展开为傅里叶



级数。

解 通过积分,得到

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{n^2}, & n = 2, 4, \dots \\ -\frac{4}{n^2}, & n = 1, 3, \dots \end{cases}$$

这样,该函数的傅里叶级数为

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\left(-\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 4x}{4^2} - \dots\right)$$

例 1.4.3 把函数

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$$

展开为傅里叶级数。

解 通过积分,得到

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$$

所以,有如下展开式

$$f(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right)$$

例 1.4.4 把一个以  $T$  为周期的奇周期函数  $f(x)$  展开为傅里叶级数。

解 因为在区间  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  上  $f(x)\cos n\omega x$  为奇函数,所以有

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = 0, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos n\omega x dx = 0$$

而  $f(x)\sin n\omega x$  为偶函数,所以有

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin n\omega x dx = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin n\omega x dx$$

最后,得到  $f(x)$  的傅里叶级数为