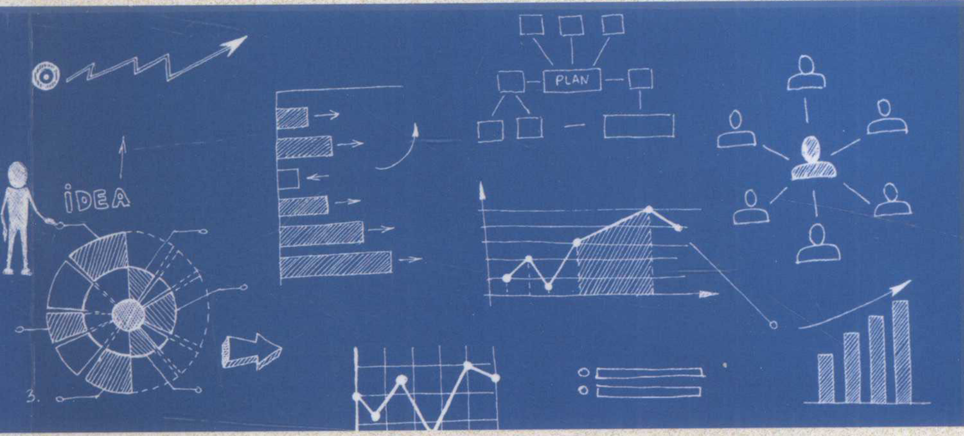
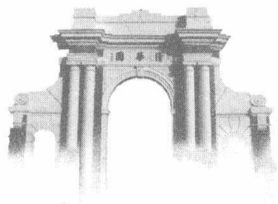
高等院校工科类、经济管理类数学系列辅导丛书

概率论与数理统计
同步练习与模拟试题



刘　强
郭文英　◎　编著
孙　阳

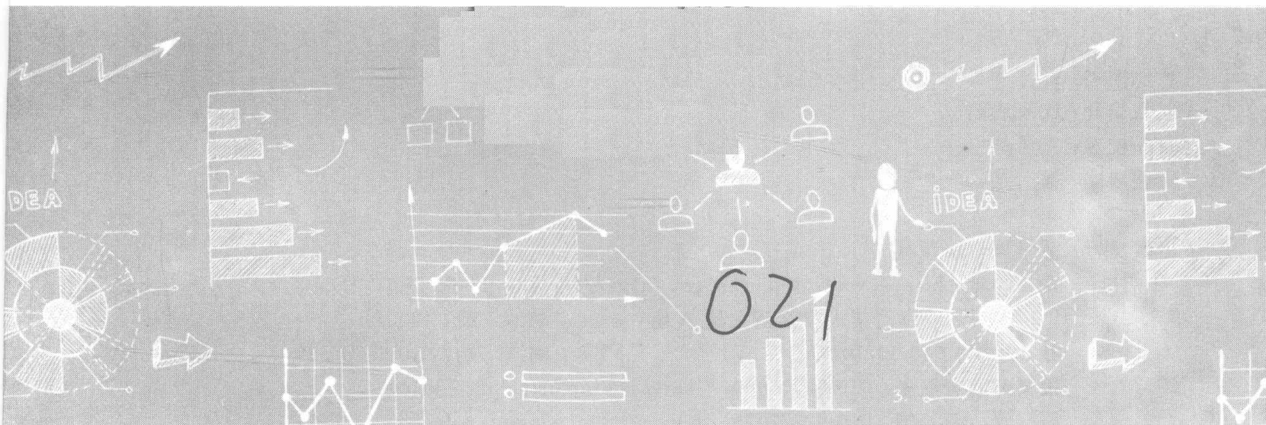
清华大学出版社



高等院校工科类、经济管理类数学系列辅导丛书

概率论与数理统计
同步练习与模拟试题

刘　强　郭文英　孙　阳◎编著



清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是高等院校工科类、经管类本科生学习《概率论与数理统计》课程的辅导用书.全书分为两大部分,第一部分为"同步练习",该部分主要包括4个模块,即内容提要、典型例题分析、习题精选和习题详解,旨在帮助读者尽快掌握《概率论与数理统计》课程中的基本内容、基本方法和解题技巧,提高学习效率.第二部分为"模拟试题及详解",该部分给出了10套模拟试题,并给出了详细的解答过程,旨在检验读者的学习效果,快速提升读者的综合能力.

本书可以作为高等院校工科类、经管类本科生学习概率论与数理统计课程的辅导用书,对于准备报考硕士研究生的考生而言,本书也是一本不错的基础复习阶段的考研数学用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计同步练习与模拟试题/刘强,郭文英,孙阳编著.--北京:清华大学出版社,2016
(高等院校工科类、经济管理类数学系列辅导丛书)
ISBN 978-7-302-42757-5

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①刘…　②郭…　③孙…　Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料　②数理统计—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第021236号

责任编辑:彭　欣
封面设计:汉风唐韵
责任校对:王凤芝
责任印制:何　芊

出版发行:清华大学出版社
网　　址:http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址:北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**:100084
社 总 机:010-62770175　　**邮　　购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课 件 下 载:http://www.tup.com.cn,010-62795954
印 装 者:北京鑫海金澳胶印有限公司
经　　销:全国新华书店
开　　本:185mm×260mm　　**印　　张**:15　　**字　　数**:346千字
版　　次:2016年3月第1版　　**印　　次**:2016年3月第1次印刷
印　　数:1～3000
定　　价:36.00元

产品编号:064152-01

FOREWORD 前言

随着经济的发展、科技的进步，数学在经济、管理、金融、生物、信息、医药等众多领域发挥着越来越重要的作用，数学思想、方法的学习与灵活运用已经成为当今高等院校人才培养的基本要求.

然而，很多学生在学习的过程中，对于一些重要的数学思想、方法难以把握，对一些常见题型存在困惑，感觉无从下手，对数学的理解往往只拘泥于某些具体的知识点，体会不出蕴含在其中的数学思想.

为了让学生更好、更快地掌握所学知识，同时结合部分学生考研的需要，我们编写了高等院校工科类、经济管理类数学系列辅导丛书，该丛书包括《微积分》《高等数学》《线性代数》和《概率论与数理统计》四门数学课程的辅导用书，首都经济贸易大学的刘强教授担任丛书的主编.

本书为《概率论与数理统计》部分，编写的主要目的有两个，一是帮助学生更好地学习《概率论与数理统计》课程，熟练掌握课程中的一些基本概念、基本理论和基本方法，提高学生分析问题、解决问题的能力，以达到工科类、经管类专业对学生数学能力培养的基本要求；二是为了满足学生报考研究生的需要，结合编者多年来的教学经验，精选了部分经典考题，使学生对考研题的难度和深度有一个总体的认识.

全书内容分为两大部分。第一部分是同步练习部分，该部分每章中主要包括 4 个模块，即内容提要、典型例题分析、习题精选以及习题详解. 具体模块内容为：

1. 内容提要

本模块对基本概念、基本理论、基本公式等内容进行系统梳理、归纳总结，详细解答了学习过程中可能遇到的各种疑难问题.

2. 典型例题分析

本模块是作者在多年来本科教学和考研辅导经验的基础上，创新性地构思了大量有代表性的例题，并选编了部分国内外优秀教材、辅导资料的经典题目，按照知识结构、解题思路、解题方法等对典型例题进行了系统归类，通过专题讲解，详细阐述了相关问题的解题方法与技巧.

3. 习题精选

本模块精心选编了部分具有代表性的习题，帮助读者巩固强化所学知识，提升读者学习效果.

4. 习题详解

本模块对精选习题部分给出了详细解答过程，部分习题给出多种解法，以开拓读者的解题思路，培养读者的分析能力和发散性思维.

第二部分是模拟试题及解答. 该部分共给出了10套模拟试题，并给出了详细解答过程，主要目的是检验读者的学习效果，提高读者的综合能力.

为了便于读者阅读本书，书中的工科类要求、经管类不要求的内容将用“ * ”标出，有一定难度的结论、例题和综合练习题等将用“ ** ”标出，初学者可以略过.

本书的前身是一本辅导讲义，在首都经济贸易大学已经使用过多年，其间修订过多版，本次应清华大学出版社邀请，我们将该讲义进行了系统的整理、改编，几经易稿，终成本书.

本书第一部分共分8章，其中第1～2章由孙阳编写，第3～5章由郭文英编写，第6～8章由刘强编写. 第二部分由编写组共同完成，最后由刘强负责统一定稿.

本书可以作为高等院校工科类、经济管理类本科生学习概率论与数理统计课程的辅导用书；对于准备报考硕士研究生的本科生而言，本书也一本不错的基础复习阶段的考研数学用书.

本系列丛书在编写过程中，得到了北京工业大学程维虎教授、李高荣教授，首都经济贸易大学纪宏教授、张宝学教授、马立平教授、吴启富教授、昆明理工大学的吴刘仓教授、北京化工大学李志强副教授以及同事们的大力支持，清华大学出版社的彭欣女士和刘志彬主任也为本丛书的出版付出了很多的努力，在此表示诚挚的感谢. 本书的编写也得到了北京市青年拔尖人才培育计划(CIT&TCD201404133)的资助.

由于编者水平有限，尽管我们付出了很大努力，但书中仍可能存在不妥甚至错误之处，恳请读者和同行不吝指正. 邮件地址为 cuebliuqiang@163.com.

编　者

2016年2月

CONTENTS

目录

第一部分　同步练习

第二部分 模拟试题及解答

模拟试题

模拟试题详解

第一部分

同步练习

第1章

概率论的基本概念

1.1 内容提要

1.1.1 随机试验与随机事件

自然界中的各种现象大体上可以分为两大类,即**确定性现象**和**不确定性现象**.确定性现象是在一定条件下必然会发生的现象;作为不确定性现象中的一部分,**随机现象**是指在相同条件下,试验的结果呈现出不确定性,但在大量的重复试验中结果又具有**统计规律性**(即在大量重复试验或观测中呈现出来的固有规律)的现象.概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律的一门学科.我们认识统计规律的手段是**随机试验**,所谓的随机试验是具有以下性质的试验:

(1) 试验可以在相同条件下重复进行;

(2) 试验可能出现的结果不止一个,且在试验之前知道所有可能的结果;

(3) 试验前不能确定具体哪一个结果会出现.

通常用字母 E 表示随机试验(以后简称**试验**).

随机试验的全部可能结果组成的集合称为随机试验的**样本空间**,记为 S,S 中的元素,即 E 的每个试验结果,称为**样本点**,记为 e.一般地,试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的**随机事件**,简称**事件**,用大写的英文字母 A,B,C 等表示,由一个样本点构成的单点集,称为**基本事件**,否则称为**复杂事件**.

若试验的结果为事件 A 中的样本点,称在这次试验中**事件 A 发生**.由于样本空间 S 包含了所有的可能结果,每次试验 S 总是发生的,因此 S 称为**必然事件**,而空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点,每次试验 $\varnothing$ 都不发生,因此 $\varnothing$ 称为**不可能事件**.

1.1.2 事件的关系与运算

1. 事件的运算

A 与 B 的**和事件** $A\cup B=\{e|e\in A$ 或 $e\in B\}$,$A\cup B$ 发生当且仅当 A 与 B 至少有一个

发生. n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

A 与 B 的**积事件** $A\cap B=\{e|e\in A$ 且 $e\in B\}$,也简记为 AB,$A\cap B$ 发生当且仅当 A 与 B 同时发生. n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

A 与 B 的**差事件** $A-B=\{e|e\in A$ 且 $e\notin B\}$,$A-B$ 发生当且仅当事件 A 发生而事件 B 不发生.

2. 事件的关系

若 $A\subset B$,则称事件 B **包含**事件 A,此时事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与 B **相等**,记作 $A=B$.

若 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B **互不相容或互斥**,此时事件 A 与 B 不能同时发生. 基本事件是两两互不相容的.

若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与 B 互为**对立事件或互逆事件**,A 的对立事件记为 $\overline{A}$. 显然对随机试验而言,每次试验事件 A 与 B 中必有且仅有一个发生.

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,且 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=S$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 S 的一个划分(分割).

3. 运算规律

(1) **交换律**:$A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$;

(2) **结合律**:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$; $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(3) **分配率**:$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$; $(AB)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) **德摩根律**:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k$; $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; $\overline{\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k$.

注 $A-B=A-AB=A\overline{B}$; $(A\overline{B})\cup(AB)=A$.

1.1.3 频率的定义及性质

设 A 为试验 E 中的一个事件,试验 E 在相同条件下重复进行 n 次,事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**,$\frac{n_A}{n}$称为事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**,记为 $f_n(A)$,即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

频率的性质

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) $f_n(S)=1$;

(3) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 为 m 个两两互不相容的事件,则有

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_m).$$

1.1.4　概率的公理化定义及性质

设 E 是一个随机试验，S 是样本空间，对 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记作 $P(A)$，称为事件 A 的**概率**，如果集合函数 $P(\cdot)$满足以下 3 个条件：

(1) **非负性**：对任意的事件 A，$P(A)\geqslant 0$；

(2) **规范性**：对于必然事件 S，$P(S)=1$；

(3) **可列可加性**：对于两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$$

概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$；

(2) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n);$$

(3) 若 $A\subset B$，则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，$P(A)\leqslant P(B)$；

(4) 对任一事件 A，有 $P(A)\leqslant 1$；

(5) 对任一事件 A，有 $P(A)=1-P(\bar{A})$或 $P(\bar{A})=1-P(A)$；

(6) 对任意两个事件 A 与 B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

对任意 3 个事件 A,B,C，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

1.1.5　条件概率的定义及性质

设 A,B 为两个事件，且 $P(A)>0$，则称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**.

条件概率的性质

(1) **非负性**：对任意的事件 B，$P(B|A)\geqslant 0$；

(2) **规范性**：对于必然事件 S，$P(S|A)=1$；

(3) **可列可加性**：对于两两互不相容的事件 $B_1,B_2,\cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\mid A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i\mid A);$$

(4) **乘法公式**：若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(B|A)P(A)$.

推论　设 A,B,C 为 3 个事件，且 $P(AB)>0$，则

$$P(ABC)=P(C\mid AB)P(B\mid A)P(A);$$

(5) **全概率公式**：设 S 为试验 E 的样本空间，A 为 E 的一个事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，且有 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i);$$

推论 设 S 为试验 E 的样本空间，A 为 E 的一个事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互不相容，且有 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，$\sum_{i=1}^{n}B_i\supset A$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i);$$

(6) **贝叶斯公式**：设 S 为试验 E 的样本空间，A 为 E 的一个事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，$P(A)>0,P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

1.1.6 事件的独立性

1. 两个事件相互独立的定义

设 A,B 是两个事件，如果满足

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称事件 A 与 B **相互独立**，简称 A 与 B **独立**.

2. 两个事件相互独立的性质

(1) 若 $P(A)>0$，则事件 A 与事件 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B|A)=P(B)$.

(2) 若 A 与 B 独立，则 A 与 $\overline{B}$ 独立，$\overline{A}$ 与 B 独立，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立.

注 当 $P(A)>0,P(B)>0$ 时，"A 与 B 相互独立"与"A 与 B 互不相容"不能同时成立.

3. 3 个事件相互独立的定义

设 A,B,C 是 3 个事件，如果满足

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(A)P(B),\\P(BC)&=P(B)P(C),\\P(CA)&=P(C)P(A),\\P(ABC)&=P(A)P(B)P(C),\end{aligned}$$

则称 A,B,C **相互独立**.

4. 3 个事件相互独立的性质

(1) 若 A,B,C 相互独立，将其中任意 i 个$(i=1,2,3)$换成其对立事件，得到的3 个事件仍然相互独立.

(2) 若 A,B,C 相互独立，则 $A\cup B,AB,A-B$ 均与 C 相互独立.

一般地，如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 对于其中任意 $i(i=2,3,\cdots,n)$个事件都满足积事件

的概率等于各事件概率相乘，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**. 将 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意多个事件换成它们的对立事件，得到的 n 个事件仍然相互独立.

1.1.7 概率模型

概率模型描述了一类随机试验的特点，并给出事件概率的计算公式.

1. 古典概型(等可能概型)

古典概型满足：样本空间中样本点有限，并且基本事件均等可能发生. 设样本空间 S 中的样本点总数为 n，事件 A 中包含的样本点数为 n_A，则

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{A\text{ 中的基本事件数}}{S\text{ 中的基本事件总数}}.$$

2. 几何概型

设样本空间是一个测度(如长度、面积、体积等)有限的区域(如长度有限的线段，面积有限的区域等)，事件 A 中的样本点为区域的子集，若事件 A 发生的可能性大小与 A 的测度成正比. 记样本空间 S 的测度为 $L(S)$，事件 A 的测度为 $L(A)$，则

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}.$$

这个概率模型称为**几何概型**.

3. 伯努利概型

如果试验 E 只有两个结果 A 与 $\overline{A}$，则称 E 为**伯努利试验**，将试验 E 在相同条件下独立地重复进行 n 次所构成的试验称为 n **重伯努利试验**. 设 $P(A)=p,P(\overline{A})=1-p(0<p<1)$，将 n 重伯努利试验中事件 A 发生 k 次的概率记为 $P_n(k)$，则

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

这个概率模型称为**伯努利概型**.

1.2 典型例题分析

1.2.1 题型一 事件的运算及事件的概率

本题型要求读者正确使用事件的运算形式来表达事件，熟练使用事件的运算规律进行事件的运算，熟练使用概率性质进行运算. 另外，在事件的运算中差事件 $A-B$ 可以使用其等价事件 $A\overline{B}$ 表示.

例 1.1 设 A,B,C 为 3 个事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件：

(1) A 发生，B 与 C 不发生；

(2) A 与 B 都发生，而 C 不发生；

(3) A,B,C 中至少有一个发生；