袁　桐　何晓斌
王建新　孔晓燕　主编

初中数学

难题巧解

兰州大学出版社

初中数学难题巧解

袁　桐　何晓斌　王建新　孔晓燕　主编

兰州大学出版社

内容提要

本书旨在通过对中考题的分析和解答，使读者了解中考题的常规思路和一般解法、解答规范；通过评注，使读者了解问题的变化、引伸或者问题的背景、错误辩析等解题注意，在此基础上，再对问题的特征进行分析，提出巧解的途径. 企求读者阅读之后，能对考试中的中高档题减少畏难情绪，从而“轻装上阵”，取得好的效果. 为适应一些重点中学提前招生的需要，也选了少量较难的题，对一般同学不作要求.

另外，在每章末尾编排了一些练习，通过练习，可以进一步加深对解题思路、解题方法的理解.

参加本书编写工作的还有丁大年、蒋桂林、石玉明、纪夕华、潘凯、高旆鸣、赵福年、柳永高、黄险峰等.

初中数学难题巧解
袁　桐　何晓斌
王建新　孔晓燕　主编
兰州大学出版社出版发行
兰州市天水路 308 号　电话 8617156　邮编 730000

甘肃省委办公厅印刷厂印刷
开本:787×1092 毫米 1/32　印张:9

1997 年 7 月第 2 版　1997 年 7 月第 2 次印刷
字数:210 千字　印数:20001—35000 册

ISBN7-311-00948-0/G・337　定价:9.50 元

目　　录

第一篇　代　数

第一章　数与式

概述

本章的知识点比较多. 如:实数与数轴上的点一一对应的关系,相反数,绝对值,代数式,方根,二次根式,幂等重要概念;实数的大小比较及运算,整数的运算,乘法公式.因式分解,分式运算,根式运算,幂的运算等基本方法.

因此,解题时要注意问题所联系的基本概念和所运用的基本方法. 这方面的考题通常起点较低,但往往容易产生计算错误. 有些问题还需要作一些转化工作,才能达到准确、迅速的要求.

题1　比较$\sqrt{5}+\sqrt{13}$与$\sqrt{7}+\sqrt{11}$的大小.

［**思路**］　由于不考虑查表计算,就想到用平方去掉根号,形如"$\sqrt{a}+\sqrt{b}$与$\sqrt{c}+\sqrt{d}$"的大小比较,宜先平方后比较.

解:$\because$　$(\sqrt{5}+\sqrt{13})^2=18+2\sqrt{65}$,

$(\sqrt{7}+\sqrt{11})^2=18+2\sqrt{77}$,

$\because$　$2\sqrt{65}<2\sqrt{77}$,

$\therefore$　$18+2\sqrt{65}<18+2\sqrt{77}$,

即　$\sqrt{5}+\sqrt{13}<\sqrt{7}+\sqrt{11}$.

［**常见错误**］　$\because$　$\sqrt{13}>\sqrt{11}$,$\sqrt{7}>\sqrt{5}$,

$$\therefore\quad \sqrt{5}+\sqrt{13}>\sqrt{7}+\sqrt{11}.$$

出现这种错误的主要原因是没有弄清楚不等式的性质，也就是 $a>b,c>d$ 不能推出 $a+d>b+c$ 而只能得到 $a+c>b+d$.

［评注］ 如果我们换一个角度来考虑，比较 $\sqrt{13}-\sqrt{11}$ 与 $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ 的大小，这时再用平方法来做就不方便，原因是平方后不能得到两个正数和的形式，但只要我们发现分子呈“$\sqrt{a}-\sqrt{b}$”型，立即想到分子有理化，问题就比较容易解决了.

$$\because\quad \sqrt{13}-\sqrt{11}=\frac{2}{\sqrt{13}+\sqrt{11}},$$

$$\sqrt{7}-\sqrt{5}=\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}},$$

$$\because\quad \sqrt{13}>\sqrt{7},\sqrt{11}>\sqrt{5},$$

$$\therefore\quad \sqrt{13}+\sqrt{11}>\sqrt{7}+\sqrt{5},$$

$$\therefore\quad \frac{2}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}<\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}},$$

即 $\sqrt{13}-\sqrt{11}<\sqrt{7}-\sqrt{5}$.

很明显，将此结论移项后便得到题 1 的结论. 比较 $\sqrt{13}-\sqrt{11}$ 与 $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ 或 $\sqrt{13}+\sqrt{5}$ 与 $\sqrt{11}+\sqrt{7}$ 的大小，这二题的解法是相通的，最终都转化为两个可以直接比较大小的两个正数.

题 2 已知 $a=\frac{2}{\sqrt{3}+1}$，求代数式 a^2+2a-2 的值.

［思路］ 由于 a 的值是分数形式，代入求值显得麻烦，但如果注意到 $a=\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ 可以先分母有理化，将其转化为非分数形式，然后再代入就显得简单了.

解：$\because\quad a=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$，

$\therefore$ 当 $a=\sqrt{3}-1$ 时，

原式的值 $=(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)-2$

$=4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2-2$

$=0.$

［评注］ 我们就 $a=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$，进行整理得到 $a+1=\sqrt{3}$，平方后得 $(a+1)^2=3$，

$\therefore\quad a^2+2a-2=0$ ①

这里，我们并没有代入求值的过程，所以显得很方便，当然，这与所给的代数式有关，如果我们改变一下代数式，情况就不同了.

已知：$a=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$，求代数式 $a^4+3a^3+a^2-4a-2$ 的值.

很显然，用代入求值的方法是会令人望而生畏的，而代数式 $a^4+3a^3-a^2-4a-2$ 已经成为最简形式，乍一看，好像显得无从下手，事实上，只要注意到①式，利用多项式除法可得关系式：

原式 $=(a^2+a+1)(a^2+2a-2)-4a$，

$\therefore$ 原式的值 $=-4a=-4(\sqrt{3}-1)=4-4\sqrt{3}$.

这实际上是利用除法作了降幂处理，使计算过程变得十分简捷. 用降幂手段来求高次多项式的值往往是有益的.

例 若 $m^2=m+1$，$n^2=n+1$，求 m^5+n^5 的值.

分析：条件中的两式相减得 $m^2-n^2=m-n$，

$\therefore\quad m+n=1$，

$\therefore\quad m^5=(m^2)^2\cdot m=(m+1)^2\cdot m=(m^2+2m+1)m$

$=(m+1+2m+1)m=(3m+2)m=3m^2+2m$

$=3m+3+2m=5m+3.$

同理 $n^5=5n+3$,

$\therefore\quad m^5+n^5=5m+3+5n+3=5(m+n)+6=5+6=11.$

求代数式的值是经常遇到的而且又是十分重要的问题，通常是将代数式化简，然后直接代入求值. 有时还应该考虑变化条件或代数式的形式.

题 3 把代数式 $(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}$ 根号外的因式移入根号内.

［**思路**］ 由 $\sqrt{-\frac{1}{a-1}}$ 可知 $a-1<0$.

解: $(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}=-(1-a)\sqrt{\frac{1}{1-a}}$

$$=-\sqrt{(1-a)^2\cdot\frac{1}{1-a}}$$

$$=-\sqrt{1-a}.$$

［**常见错误**］ 原式 $=\sqrt{(a-1)^2\cdot\left(-\frac{1}{a-1}\right)}$

$$=\sqrt{-(a-1)^2\cdot\frac{1}{a-1}}$$

$$=\sqrt{-(a-1)}=\sqrt{1-a}.$$

造成错误的原因是机械地将根号外的因式平方后移至根号内，而忽视题目本身的隐含条件. 而这些条件不仅决定了代数式本身的性质，而且决定了字母的取值范围，因此必须慎重处理.

［**评注**］ 在初中教科书中做出了如下规定:“如果没有特别说明，所有字母都表示正数”(二次根式一章内). 对于这句

话要有正确理解，像本题仅仅知道 $a>0$，解题时仍容易出错，如果将题目变更一下为

化简 $(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}$.

其正确答案完全一样，只不过也应注意正负问题.

题 4 已知 $\frac{3x-2y}{3x+2y}=\frac{5}{13}$，求 $\frac{x}{y}$.

［思路］ 从条件出发，先把它转化成整式方程，然后通过合并同类项，即可求其比值.

解：$\because \quad \frac{3x-2y}{3x+2y}=\frac{5}{13}$,

去分母得 $13(3x-2y)=5(3x+2y)$,

整理得 $24x=36y$,

$\therefore \quad \frac{x}{y}=\frac{3}{2}$.

［评注］ 本题解法比较多，现给出下面三种：

解法 2：设 $\frac{x}{y}=k$，则 $x=ky$.

将 $x=ky$ 代入条件则有

$$\frac{(3k-2)y}{(3k+2)y}=\frac{5}{13}, \quad \therefore \quad 13(3k-2)=5(3k+2).$$

由此可解得 $k=\frac{3}{2}$，即 $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$.

解法 3：由条件可得

$$\frac{(3x-2y)+(3x+2y)}{(3x-2y)-(3x+2y)}=\frac{5+13}{5-13},$$

即 $\frac{6x}{-4y}=\frac{18}{-8}$, $\quad \therefore \quad \frac{x}{y}=\frac{3}{2}$.

解法 4：由条件可得

$$\frac{3x-2y}{3x+2y}=\frac{9-4}{9+4},$$

故由观察可得 $\frac{3x}{2y}=\frac{9}{4}$, $\quad \therefore \quad \frac{x}{y}=\frac{3}{2}$.

以上各种解法中，解法 2 是从结论着手，用代换法去求解；解法 3 是直接运用合分比性质去解；解法 4 则是逆向运用合分比性质，其中，解法 2(代换法)应用范围较广.

题 5 分解因式：

(1) $4x^{n+2}-9x^{n}+6x^{n-1}-x^{n-2}$($n$ 是整数且 $n>2$)；

(2) $x^{2}+2xy-3y^{2}+2xz+14yz-8z^{2}$；

(3) $x^{4}-x^{2}-6$；

(4) $x^{3}(x-2y)+y^{3}(2x-y)$.

[思路] 题 5(1)应考虑提取公因式，然后再分组分解；题 5(2)为三元二次六项式，分组有困难，若把多项式整理成为关于 x 的二次三项式，则可用十字相乘法来分解因式；题 5(3)应考虑用换元法降次，然后用十字相乘法；题 5(4)不能直接分解，应先整理、后分解.

解：(1) 原式 $=x^{n-2}(4x^{4}-9x^{2}+6x-1)$

$$=x^{n-2}[(2x^{2})^{2}-(3x-1)^{2}]$$

$$=x^{n-2}(2x^{2}+3x-1)(2x^{2}-3x+1)$$

$$=x^{n-2}(2x^{2}+3x-1)(2x-1)(x-1)$$

(在有理数集合内)

$$=2x^{n-2}(2x-1)(x-1)\left(x+\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$$ (在实数集合内)；

(2) 原式 $=x^{2}+(2y+2z)x-(3y^{2}-14yz+8z^{2})$

$$=x^{2}+(2y+2z)x-(y-4z)(3y-2z)$$

$$=[x-(y-4z)][x+(3y-2z)]$$

$$=(x-y+4z)(x+3y-2z)$$；

(3) 设 $y=x^{2}$，

则原式$=y^2-y-6=(y+2)(y-3)$

$=(x^2+2)(x^2-3)$（在有理数集合内）

$=(x^2+2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

（在实数集合内）；

（4）原式$=x^4-2x^3y+2xy^3-y^4$

$=(x^4-y^4)-(2x^3y-2xy^3)$

$=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)-2xy(x+y)$

$(x-y)$

$=(x+y)(x-y)(x^2+y^2-2xy)$

$=(x+y)(x-y)^3.$

［评注］ 多项式因式分解的方法较多，变化也大，例如对于题5(3)可以变化为

a) $(x+y)^2-(x+y)-6$，

b) $(x^2+1)^2-(x^2+1)-6$ 等.

当然，要想迅速、准确地分解因式，除了应掌握一般步骤和基本方法外，还必须了解题目要求在什么范围内因式分解〔如题5(1)〕. 对于一些难度较大的题，要根据题目特点，综合、灵活地运用各种方法和技巧.

题6 已知$x+\frac{1}{x}=5$，求代数式$x^2+\frac{1}{x^2}$的值.

［思路］ 由条件解出x的值，然后代入求代数式的值.

解： 由$x+\frac{1}{x}=5$得 $x^2-5x+1=0.$

解之得 $x_1=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$， $x_2=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

当 $x_1=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$ 时，原式的值$=\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^2+$

$\frac{1}{\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^2}$

$$=\frac{46+10\sqrt{21}}{4}+\frac{4}{46+10\sqrt{21}}$$

$$=\frac{46+10\sqrt{21}}{4}+\frac{46-10\sqrt{21}}{4}=23.$$

当 $x_2=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$ 时，原式的值 $=\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^2$

$$+\frac{1}{\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{46-10\sqrt{21}}{4}+\frac{4}{46-10\sqrt{21}}$$

$$=\frac{46-10\sqrt{21}}{4}+\frac{46+10\sqrt{21}}{4}=23.$$

［巧解］ $\because \quad x+\frac{1}{x}=5,$

$\therefore \quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=25$，即 $x^2+2+\frac{1}{x^2}=25,$

$\therefore \quad x^2+\frac{1}{x^2}=23.$

［评注］ 用求出 x 的值再代入求代数式值，运算繁杂，而且容易出错，巧解的关键是注意 x 与 $\frac{1}{x}$ 互为倒数，其乘积等于 1. 利用这一点，变化所求代数式的形式，解起来就很方便，如：已知 $x+\frac{1}{x}=5$，求代数式 $x-\frac{1}{x}$，$x^3+\frac{1}{x^3}$，$x^5+\frac{1}{x^5}$，$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的值.

$\because \quad \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=23-2=21,$

$\therefore \quad x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{21}.$

$\because \quad x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)=5(23-1)=110.$

$$\because \quad x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=23\times110-5=2525.$$

$\because \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x+\frac{1}{x}+2=5+2=7,$

$\therefore \quad \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\pm\sqrt{7}.$

$\because \quad x>0, \quad \therefore \quad \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{7}.$

题7 如果分式$\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}$的值为零，则 $x=$____.

［**思路**］ 由分式的意义可知，当分子为零且分母不为零时，分式的值为零.

解：由分子 $x^2-4x+3=0$ 得

$x_1=3, x_2=1.$

当 $x_1=3$ 时，$x^2-3x+2=2\neq0.$

当 $x_2=1$ 时，$x^2-3x+2=0$，分式无意义.

故 $x=3.$

［**常见错误**］ 由分子 $x^2-4x+3=0$ 得 $x_1=1, x_2=3$，而忘掉考虑分母为零的情况.

［**评注**］ 如果我们把题目变换一种说法为：

当 x 为何值，分式$\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}$有意义，无意义？

这时对于有意义的情况只需分母不等于零，即 $x^2-3x+2\neq0$, $\therefore \quad x\neq1$，且 $x\neq2.$

而对于无意义的情况只需分母等于零，即 $x=1$ 或 $x=2.$

值得提醒的是，对于分式 $\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}$ 不能变为

$\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-2)(x-1)}$后再化简为$\dfrac{x-3}{x-2}$，然后再来讨论.

若将题目改为：

当 x 为何值时，代数式$\dfrac{1}{1-\sqrt{x+1}}$有意义？

这时不仅要考虑分母不为零，同时也要考虑算术根有意义.

所以 $\begin{cases}1-\sqrt{x+1}\neq 0,\\ x+1>0,\end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases}x\neq 0,\\ x>-1,\end{cases}$ $\therefore$ $x>-1$ 且 $x\neq 0$.

求代数式中 x 的允许值范围是一类常见题型，关键是考虑问题要全面（如分母不为零，根式有意义），求解过程要准确.

题 8　化简：$\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}+\dfrac{1}{x^2-7x+12}$.

［**思路**］　这是分式运算问题，常规思路是先通分化异分母的分式为同分母的分式，然后再化简.

解：$\because$　$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$,

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$,

$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$,

$\therefore$　最简公分母为 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$,

$$\therefore \text{原式}=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}+\frac{(x-3)(x-4)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}+\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}+\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$

$$=\frac{x^3-9x^2+26x-24+x^2-7x+12}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$

$$+\frac{+x^2-5x+4+x^2-3x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$

$$=\frac{x^3-6x^2+11x-6}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$

$$=\frac{x^3-6x^2+5x+6x-6}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$

$$=\frac{x(x-1)(x-5)+6(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$

$$=\frac{x^2-5x+6}{(x-2)(x-3)(x-4)}$$

$$=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)(x-4)}$$

$$=\frac{1}{x-4}.$$

［**巧解**］ 原式$=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}$

$$+\frac{1}{(x-3)(x-4)}$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}$$

$$=\frac{1}{x-4}.$$

［**评注**］ 巧解是注意到分母的特点是$x-1$，$(x-1)(x-2)$，$(x-2)(x-3)$，$(x-3)(x-4)$，除了第一个分母外，各个分母均为两个因式的积，其中一次项完全相同，因此可以将每个分式拆成两个分式的差，这样会使运算大大简化，所以对于多个分式的加减运算，一般不要急于用通分手段进行计算，应仔细观察问题的特征，利用拆项法或采用逐步合并法往往是容易奏效的.

题 9 已知$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$，求证$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

$+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

［思路］ 从待证式的结构形式来看，它和已知条件中第一式相似，只要把第一式两边平方，再利用第二个条件，应该证得.

证明：由已知第一式的两边平方得

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

即 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{2xy}{ab}+\frac{2xz}{ac}+\frac{2yz}{bc}=1,$$

也就是 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{2xyz}{abc}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=1.$$

将第二式代入上式得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

［评注］ 证明条件等式的关键，在于抓住“条件”与“结论”之间的内在联系. 又如：

例 1 若 $2(a^2+b^2)+c^2+d^2=2(ab+bc+ad)$，求证 $a=b=c=d$.

观察本题特征易知，只需由已知条件进行配方，然后利用实数平方和为零的性质，就可以证明，即由条件化成 $(a-b)^2+(b-c)^2+(a-d)^2=0$，

得 $a-b=0$， $b-c=0$， $a-d=0$， $\therefore$ $a=b=c=d$.

例 2 已知 $ax+by=0, cx^2+dxy+cy^2=0, b\neq0, x\neq0$，求证 $c(a^2+b^2)=abd$.

观察到本题中待证式的字母少于条件式中字母个数，因此应当从消“元”入手.

略解：由 $b\neq0$ 得 $y=-\dfrac{ax}{b}$，代入第二式得

$$cx^2+d\left(-\frac{ax^2}{b}\right)+c\left(-\frac{ax}{b}\right)^2=0,$$

$\therefore\quad x^2(b^2c-abd+a^2c)=0$

$\because\quad x\neq 0,$

$\therefore\quad c(a^2+b^2)=abd.$

题10 已知 x、y 为实数，且 $(8x-1)^2+\left|y-\frac{1}{2}\right|=0$，求 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 的值.

[**思路**] 不难发现条件 $(8x-1)^2+\left|y-\frac{1}{2}\right|=0$ 是两个非负数的和等于零，根据非负数的性质只有 $8x-1=0$，$y-\frac{1}{2}=0$.

解：根据非负数的性质得

$8x-1=0,\ y-\frac{1}{2}=0,$

$\therefore\quad x=\frac{1}{8},\ y=\frac{1}{2}.$

当 $x=\frac{1}{8}$，$y=\frac{1}{2}$ 时，$\frac{x}{y}+\frac{x}{y}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}}=\frac{1}{4}+4=4\frac{1}{4}$.

[**评注**] 利用非负数的性质来解题，是初中阶段学生应当掌握的一种方法. x^2、$|x|$ 和 $\sqrt{x}$ 是三种非负数表示形式，其中 $\sqrt{x}$ 中被开方数 x 也是一个非负数，解题中要特别予以重视，我们可以将本题转化为下列形式：

已知 x、y 为实数，且 $y=\sqrt{8x-1}+\sqrt{1-8x}+\frac{1}{2}$，求 $16^a=\frac{y}{x}$ 式中 a 的值.

分析：要使根式 $\sqrt{8x-1}$ 与 $\sqrt{1-8x}$ 有意义，$8x-1$ 与 1