赵树杰等 编著

统计信号处理

西北电讯工程学院出版社

内 容 提 要

本书论述了统计信号处理的基本理论，并介绍了它的某些应用，是一本以基本理论和基本技术为主，同时兼顾应用的书。

全书共八章。除第一章绪论外，可分为三个部分。第二、三章为检测理论部分，主要讨论信号的统计检测理论，噪声中信号检测的判决规则，检测系统的结构和性能分析；第四、五章为估计和滤波理论部分，主要讨论信号参数的估计规则，估计量的性质和计算方法，线性系统状态的滤波和预测；第六、七、八章为应用部分，主要讨论检测理论和估计理论在雷达目标检测和雷达目标状态估计中的应用。书中结合内容的论述，列举了典型的例题，并附有相当数量的习题，以供练习。

本书适于作信息处理以及电子工程、无线电技术等专业大学本科高年级学生的教科书，也可作为从事信号处理的科技人员的参考书。

统计信号处理

——检测理论 估计和滤波理论及其应用

赵树杰等 编著

西北电讯工程学院出版社出版

西北电讯工程学院印刷厂印刷

陕西省新华书店发行 各地新华书店经售

开本 787×1092 1/16 印张 21 字数 515 千字

1986 年 4 月第一版 1986 年 4 月第一次印刷 印数 1—3,000

统一书号：15322·39 定价：3.60元

前　言

《统计信号处理》一书是为信息处理以及电子工程、无线电技术等专业大学本科高年级学生编写的教科书；同时，在内容的选择上考虑到从事雷达、通信、声纳、自动控制等方面信号处理的科技人员的需要。

本书在内容的选择上以基本理论和基本技术为主，主要包括信号检测理论，估计和滤波理论，及其在雷达系统中的应用。除绪论外，其余各章后均附有相当数量的习题供练习用。通过练习，有助于读者深入理解书中论述的基本理论和基本技术，部分习题还扩充了正文的讨论内容。

编者在编写中认为读者已基本掌握了线性代数，概率论和随机过程，统计无线电理论等知识。为了阅读方便，书末附有《连续信号运算的有限表示》，《窄带噪声的基本知识》，《矩阵和矢量》，《首次发现概率的基本概念》四个附录。读者在阅读有关章节的内容前，首先阅读相应的附录，可能会对内容的理解和掌握有所帮助。

本书在编写过程中，注意到理论与实际的结合，在重点论述基本理论的基础上，结合实际讨论了这些理论的应用，特别是在雷达系统中的应用。因此，本书除作为院校有关专业本科生的教材外，也可作为从事信号处理的科技人员的技术参考书。

应当说明，因为本书主要是为有关专业本科生编写的教材，所以有关色噪声中信号的检测和非线性估计等内容没有涉及。现有的内容也可能偏多，有些内容还可能偏深。我们建议使用本教材时，应根据不同专业的要求和学时在内容上有所选择。

本书是在赵树杰，杨宏五，陆仁夏，牟兆仁编写的《统计信号处理》教材的基础上，总结数次教学实施的经验，由赵树杰执笔修改，经原编者集体讨论定稿写成的。

本书在编写过程中，保铮教授在多方面给予了指导和帮助，并全面仔细地审阅了初稿，提出了许多十分宝贵的意见。编者对他表示衷心的感谢。戴树荪副教授，强伯涵副教授，耿富录同志对本书的编写也很关心，并给予了具体地帮助；杨万海，何斌同志审阅了部分章节的初稿，参加了有关内容的讨论。编者对他们的关心，帮助和支持表示感谢。

还应说明，书末所列的参考文献是主要的。编者向所有参考文献的作者表示感谢。

限于编者水平，书中缺点和不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

编者

一九八四年十一月　西安

目 录

第八章　雷达目标的状态滤波

参考文献

第一章 绪　论

§1.1 引　言

随着科学技术日新月异的发展，信号处理已经应用于人类活动的各个方面。例如，在科学技术领域内，它应用于雷达系统，通信系统。空中目标跟踪系统，交通管制系统，地震信号处理，计算机辅助医疗诊断，语言信号处理，模式识别，随机控制和图象处理等。

所谓信号处理，概括地说，就是对来自实际观测信号的加工，对有用信号的提取和利用。举例说，我们用电压表测量信号源产生信号的幅度，为了准确起见，我们可以进行多次测量，然后将每次测量的结果求和取平均，其结果作为信号的幅度，这是信号处理的一个简单的例子。大家知道，在雷达、通信、自动控制等系统中，主要的问题是信号的传输、接收和处理。信号在传输、接收和处理过程中，由于所通过媒质的实际性能和(或)接收处理设备的限制，不可避免的存在着外界干扰和内部干扰。这些干扰通常具有随机的特性，因而只能用它的平均特性或统计特性来描述。这样，即使信号本身是确定的，迭加上干扰后也会产生不确定性，使得其处理复杂化。正因为所接收到的信号具有随机的特性，人们才将统计的方法应用于这些系统中，于是统计学便成为研究信号处理的有力工具。

人们利用信号与干扰的不同统计特性，从统计的观点出发，研究如何对这种随机性观测结果进行处理，以便尽可能地抑制干扰，提取有用的信号，这就是统计信号处理。例如，在通信系统中，发射机发射一组0,1编码的脉冲信号，这组信号在传输和接收过程中，迭加上了随机干扰。为了尽可能正确的识别出这组编码信号，在处理接收到的信号过程中，我们可以利用0脉冲加干扰和1脉冲加干扰在统计特性方面的差异，恢复出这组编码信号来。但是，由于迭加干扰的随机性，我们不能绝对保证恢复出的编码脉冲信号与发射的编码脉冲信号完全一致，就是说可能会产生错误。统计信号处理所要解决的问题之一就是尽可能地减小这种错误。

理论来源于实践，通过实践所获得的理论又用来指导实践。理论和实践的这种相互促进的关系推动科学技术不断向前发展。在雷达、通信、自动控制等技术发展的实践中，人们逐渐对这些技术有了理性的认识，进而应用数学工具，建立了比较系统的统计信号处理理论，它不仅有助于解决技术上存在的具体问题，而且能够推动技术的向前发展。

目前，统计信号处理已成为一个重要的科学分支，它的主要内容是信号的检测理论，估计和滤波理论及其应用。因此，我们将用较多的篇幅来讨论这些基本理论。应当说明，应用于不同方面的统计信号处理技术，其具体要求可能是不尽一样的，但是它们的基本理论是相同的。在应用方面，我们将侧重于这些理论在雷达系统中的应用。

§1.2 检测、估计和滤波

如前所述，信号在传输、接收和处理过程中，会受到干扰。在电磁波经过大气紊流和电离层时，由于吸收系数和折射系数的随机性，必然产生对无线电信号振幅、频率和相位的随

机调制，这属于乘性干扰。大气层、电离层、宇宙空间等各种自然界的电磁过程以及电气设备、无线电台、人为干扰等因素所构成的外界干扰和接收处理设备内部存在的噪声干扰，属于加性干扰。因为后者是主要的，所以我们只考虑加性干扰。

如果我们接收到的是信号与加性干扰的混合信号，现在想把信号提取出来。从统计的观点看，这是一个统计判决问题，即根据接收到的混合信号的统计特性，作出信号是属于几个可能状态中的哪一个的判决，这就是信号检测问题。例如前面所举的0,1编码脉冲信号，信号共有两个可能的状态：0脉冲和1脉冲，在某一时刻的判决就是要作出在相应时刻信号是0脉冲还是1脉冲的选择。最简单的信号检测就是作出信号存在或信号不存在的判决。

信号检测的问题，是从假设检验的观点出发，判决接收的混合信号中哪一个状态的信号存在，也就是要选择假设 H_i，$i=0,1,\cdots N-1$，哪个为真，其中 H_i 是信号对应于某个状态的假设。由于干扰的存在，在有限的观测时间内对此作出判决可能会出现错误。检测理论就是研究为使错误判决所带来的危害最小或判决的错误概率最小的理论，并由此导出信号的最佳检测系统结构，分析检测系统的性能。

如果我们已经判决了信号的状态，还需要确定它的有关参数。我们能够利用含有干扰的观测结果来求出它的参数，这就是信号参数的估计问题。

信号参数的估计问题，在于构造一个适宜于对未知参数进行估计的统计量。如果在观测的时间内待估计的参数值是不变的，干扰的某些统计特性和信号形式已知，我们可以利用观测值构造出一个估计，使其在平均的意义上最接近待估计参数的真值，或者使估计的误差所付出的平均代价最小，这就是经典的估计理论问题。如果在观测的时间内待估计的参数值是随时间变化的，利用滤波理论可以在最小均方误差的意义上完成这一估计。虽然基于最小均方误差准则的滤波理论仅是估计理论中的一个小的分支，但它却是一个最活跃，最重要，也是最受重视的分支。

在许多实际问题中，例如模拟通信，雷达跟踪以及具有时变特性的模式识别等，都含有波形估计问题。波形估计一般包括滤波、预测和平滑三类估计。如果从有干扰的观测信号中提取有用信号的角度出发，我们可以把雷达、通信、自动控制等系统中的波形(状态)估计器看成为一个滤波器，如图1.1所示，其特性可以用脉冲响应函数 $h(t)$ 或传递函数 $H(j\omega)$ 表示。这个滤波器的输入是观测信号 $z(t)$，它不仅含有待估计的信号 $x(t)$，而且还含有加性干扰 $n(t)$。在 t 时刻，如果滤波器的输出为 $\hat{x}(t)$，就是滤波问题；在 t 时刻，如果滤波器的输出为 $\hat{x}(t+\tau)$，$\tau>0$，就是预测(外推滤波)问题；如果 $\tau<0$，就是内插(平滑滤波)问题。不仅如此，滤波器输出还可以是输入信号的某种函数的估计，例如 $\hat{x}^{(n)}(t)$，当 $n=1$ 时，它就是速度估计，当 $n=2$ 时，它就是加速度估计，速度和加速度估计不仅可以有当前时刻的估计，也可以有预测和平滑估计。所以，系统的状态 $\hat{x}(t+\tau)$(位置、速度、加速度等)能够根据获得的观测值予以估计。

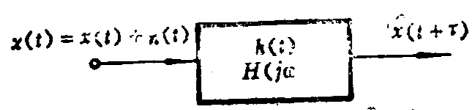

图1.1 估计用的滤波器

关于滤波、预测和平滑的基本概念，对于离散系统也是适用的。所谓离散系统的滤波就是根据 k 时刻及以前的观测值估计系统在 k 时刻的状态 $\hat{x}_k$，其中 $k=0, 1, 2, \cdots$；预测就是估计系统在 $(k+j)$ 时刻的状态 $\hat{x}_{k+j}$，$j=1, 2, \cdots$；平滑就是估计系统在 $(k-j)$ 时刻的状态 $\hat{x}_{k-j}$，$j=1, 2, \cdots$。

作为估计用的滤波器可以是线性的，也可以是非线性的。我们将把讨论限于线性滤波的范围，因为它是目前广泛应用的。在本世纪四十年代，维纳(N. Wiener)等人对此问题做了大量的研究工作，阐明了在平稳条件下的线性滤波理论。这些理论在通信和控制等技术领域获得了广泛的应用，并在应用中得到了发展。维纳滤波理论的不足之处是：在运用的过程中必须把用到的全部数据存贮起来，存贮量大；运算比较复杂，不便于实时处理；不适用于矢量和非平稳过程的滤波问题。

五十年代中期，随着空间技术的发展，要求对卫星等空间飞行器的运动状态（如距离、方位、速度等)进行估计和预测，以实现精确测轨和跟踪，这就需要将地面跟踪站的大量观测数据进行实时处理。为此，人们将动态系统用微分方程来描述，提出了滤波的新算法。1960年卡尔曼(R.E.Kalman)将状态变量的概念引入到最小均方误差估计中来，得到了离散线性动态系统状态估计的递推算法，在空间技术中得到了成功的应用，并随着计算机的迅速发展广泛地应用于其它领域。这就是著名的卡尔曼滤波理论。第二年，卡尔曼和布西（R.S.Bucy）共同完成了连续系统的递推滤波算法。

为了使大家对前面我们提到的检测、估计和滤波问题有个感性认识，现在让我们来看一个雷达跟踪目标的简单例子。雷达向空中发射一束电磁能量，并接收来自空中目标的反射信号，同时存在着干扰。这里首先的问题是根据接收到的信号判决空中是否存在目标，这是信号检测问题；如果判决目标存在，接着的问题是确定目标的有关参数，例如距离、方位和高度等，这是信号参数估计问题；由于目标是运动的，所以还应考虑目标的状态滤波问题，以便实现对目标的实时跟踪，航迹或轨道的精确估计，航迹或弹着点的预测，以及目标运动参数(如速度，加速度)的估计。

以上我们简要论述了作为统计信号处理公共理论基础的检测、估计和滤波问题，目的是为了建立一个总的初步概念，以便于后面各章内容的学习。

§1.3 内　　容

统计信号处理应用于不同的领域，其具体内容是不尽相同的。但正如前述，检测理论，估计和滤波理论是它们的公共基础。因此，本书将把检测理论，估计和滤波理论作为重点加以讨论；为了达到理论和实际相结合的目的，这些理论在雷达系统中的应用将作为另一个重点加以讨论。

具体地说，除绪论外，本书主要内容由三部分组成，分述如下。

第一部分讨论信号检测理论，包括第二章和第三章。第二章是在似然比检验的基础上，从检测准则的性能指标出发，导出在不同条件下的最佳检测准则，并进行了比较和讨论。第三章根据信号的特性，导出判决规则，构成信号最佳检测系统，并对其性能进行分析。

第二部分讨论估计和滤波理论，包括第四章和第五章。第四章是关于信号参数估计的问题，根据待估计参数的特点，确定估计规则，导出估计量的计算方法，并讨论估计量的性质。第五章是线性动态系统的状态估计问题，在简单讨论维纳滤波后，重点讨论了卡尔曼滤波的有关问题。

第三部分讨论检测理论、估计和滤波理论在雷达系统中的应用，包括第六章、第七章和第八章。第六章讨论雷达信号的检测问题，主要是匹配滤波器的近似实现，相参和非相参脉

冲串信号检测器的构成，原理和性能分析等。第七章讨论雷达信号的恒虚警率处理问题，在介绍杂波模型的基础上，针对噪声环境和杂波环境较系统的讨论了恒虚警率处理的原理、方法和性能。第八章讨论雷达目标的状态滤波问题，主要是航迹外推，目标状态估计，跟踪滤波算法。这部分内容对从事雷达系统的工程技术人员来说是感兴趣的，它对从事其它方面信号处理的科技人员也有一定的参考价值。

统计信号处理是一门既有古典理论，又要崭新内容的科学分支，在我们这样一本以讨论信号处理的基本理论为主要内容的书中，不可能包括其全部内容，应用方面更受到限制。因此，编者试图就统计信号处理的基本理论进行讨论，并有选择地讨论其应用。

如同其它事物一样，任何一门科学的发展都是无止境的。随着科学技术的发展，信号处理的应用范围也在不断扩大。统计信号处理理论不仅在雷达系统对卫星、火箭等空间飞行器的跟踪、测量中，在最优通信系统的设计中获得了成功的应用，而且还应用于控制、模式识别、系统辨识、语言和图象处理等领域。例如在模式识别中，它可以应用于语音识别、字符识别和指纹分类；在地球物理勘探和爆炸监视中用于地震信号分析；医学和生物学中用作心电图和脑电图记录的分析等。目前，不同用途和性能的信号处理机也已开始问世。因此，对许多科技人员来说，了解或基本掌握统计信号处理的基本理论和某些技术是很必要的。从事信号处理的科技人员，应随时注意学习这方面的新知识，同时，应认真地、深入地进行信号处理的理论研究和应用实践，以推进这门学科不断向前发展。

第二章　信号的统计检测理论

§2.1 引　　言

在进行信号处理时，人们希望从观测信号$z(t)$中提取有用信号$s(t)$，并加以充分利用。信号$s(t)$在传输过程中不可避免地要受到干扰(包括热噪声，杂波干扰，电磁干扰，人为干扰等)，这样，在检测系统的输入端，所接收到的观测信号$z(t)$是信号$s(t)$和加性干扰$n(t)$的混合波形，即$z(t)=s(t)+n(t)$。在许多情况下，连续信号$s(t)$可能有N种状态，而每一种状态又可能含有若干个参数。因此，问题归结为如何从有干扰的观测信号中判断信号的状态，并估计其参数，这通常称为信号检测问题。

信号检测是一个广义的术语，它包括如下三个内容：(1)狭义的信号检测，即在有干扰的情况下，从输入的观测信号中判断其中所含信号$s(t)$是属于几个可能状态中的哪一个，它的最简单的情况是判断输入中是否存在信号；(2)信号参数估计，即在有干扰的情况下，利用观测结果，按某种准则以最小的误差和损失将信号的某些参数予以估计；(3)信号过滤(即滤波)或系统状态估计，即在有干扰的情况下，从观测信号的时间连续波形中将信号波形以最小的误差连续地过滤出来。信号以上述准则的连续过滤也称为信号波形的最优化实现；而在动态系统的情况下，则是以最小的误差得到系统运动状态的最佳估计。

如果我们把信号$s(t)$的N种可能状态分别记为$s_j(t)$，$j=0, 1, \cdots N-1$，这样，当传输$s_j(t)$时，第i次接收的观测信号可写为

$$z_i(t)=s_j(t)+n_i(t) \tag{2.1.1}$$

其中$n_i(t)$是迭加在信号上的干扰噪声。在狭义的信号检测问题中，通过对波形$z_i(t)$的m个样本序列z_1，z_2，$\cdots z_m$进行分析，在此基础上，根据预先确定的准则构成最佳检测系统，以判断观测信号$z(t)$中哪种状态的信号存在。例如在雷达检测系统中，需要根据接收到的某一距离单元的信号判断其中有无目标信号存在，这是上述问题最简单的实例。

本章讨论狭义信号检测问题中的检测理论。如同绪论所指出的，由于干扰的随机性，我们应从统计的观点来阐述这个问题，所以称之为信号的统计检测理论。噪声中信号的检测，信号参数的估计，系统状态的最佳估计等问题留在后面的各章中讨论。

§2.2 假设检验

假设检验是进行信号统计判决的极其重要的工具之一。假设就是所考虑的可能判决结果的陈述。例如在雷达检测问题中，可以选用两个假设，即目标存在或目标不存在。其结果可以用该假设成立的概率来描述，它与信号和干扰的统计特性以及所采用的判决准则有关。

2.2.1 假设检验的基本概念

为了说明假设检验的基本概念，同时考虑到许多实际情况下，信号$s(t)$是两种可能状态

中的一种，即$s(t)=s_0(t)$或$s(t)=s_1(t)$，所以我们主要讨论这种二元信号的假设检验问题。多元信号的假设检验问题将在后面讨论。

二元信号的状态迭加上连续干扰信号$n(t)$，构成检测系统的输入信号$z(t)=s_j(t)+n(t)$，$j=0,1$，$z(t)$称为观测信号。观测者在取得$z(t)$的一个样本值$z=s_j+n$后，并不能准确肯定这个样本中所含的信号究竟是s_0还是s_1。因为$s_0(t)$或$s_1(t)$迭加上干扰$n(t)$后，所取得的样本值并不是确定的。观测者只能作出一种假设：认为信号取两种状态之一，并根据信号取不同状态时z的统计特性，来检验这种假设是否合理或者最有利。以下我们称信号$s=s_0$的假设为假设H_0，称信号$s=s_1$的假设为假设H_1。以符号表示为

H_0：信号$s=s_0$　　　　$z=s_0+n$

H_1：信号$s=s_1$　　　　$z=s_1+n$

这样，当$n(t)$的统计特性已知时，我们就可以求得$z=s_0+n$和$z=s_1+n$的条件概率密度函数$f_0(z)=f(z/H_0)$和$f_1(z)=f(z/H_1)$。

依据一次观测的样本值z，我们必须选择两个假设中的一个成立，因而必须规定一个作出判决的准则。合理的准则是根据一次观测中哪个假设可能性大来确定的。设给定样本值z,其条件概率分别表示为

$$p(H_0/z)\quad 和\, p(H_1/z)$$

它们分别为给定z时H_0为真的概率和给定z时H_1为真的概率。这些概率称为后验概率。显然我们应选择后验概率$p(H_0/z)$和$p(H_1/z)$中较大的那个对应的假设成立，这称为最大后验概率准则。用后验概率比形式，最大后验概率准则的判决规则为：如果

$$\frac{p(H_1/z)}{p(H_0/z)}\geqslant 1 \tag{2.2.1}$$

则选择假设H_1成立，判为信号s_1出现，否则选择假设H_0成立，判为信号s_0出现。当$p(H_1/z)/p(H_0/z)=1$时，可任意选择H_1成立或H_0成立，这里我们选择H_1成立

2.2.2 似然比检验

假设检验中的判决规则也可以用z的条件概率密度函数来表示，而且往往更为方便和适用。要做到这一点，可将(2.2.1)式表示为：如果

$$p(H_1/z\leqslant Z\leqslant z+dz)\geqslant p(H_0/z\leqslant Z\leqslant z+dz) \tag{2.2.2}$$

则选择假设H_1成立，否则选择假设H_0成立。利用条件概率的定义，我们有

$$p(H_0/z\leqslant Z\leqslant z+dz)=\frac{p(z\leqslant Z\leqslant z+dz/H_0)p(H_0)}{p(z\leqslant Z\leqslant z+dz)} \tag{2.2.3}$$

其中$p(H_0)$是假设H_0为真的概率，而假设H_1为真的概率为$p(H_1)=1-p(H_0)$，它们都称为先验概率。将随机变量Z的概率密度函数记为$f(z)$，于是$p(z\leqslant Z\leqslant z+dz)=f(z)dz$，同样，$p(z\leqslant Z\leqslant z+dz/H_0)=f_0(z)dz$,由于后者是以$H_0$为真作为条件的,所以使用了下标。因此

$$p(H_0/z\leqslant Z\leqslant z+dz)=\frac{f_0(z)dzp(H_0)}{f(z)dz} \tag{2.2.4}$$

在dz任意小的极限情况下，有

$$p(H_0/z)=\frac{f_0(z)p(H_0)}{f(z)} \tag{2.2.5}$$

同样有

$$p(H_1/z)=\frac{f_1(z)p(H_1)}{f(z)} \tag{2.2.6}$$

这样，判决规则为：如果

$$\frac{f_1(z)}{f_0(z)}\geqslant\frac{p(H_0)}{1-p(H_0)} \tag{2.2.7}$$

则选择假设H_1成立，否则选择假设H_0成立。比值$f_1(z)/f_0(z)$称为似然比函数，记为$\lambda(z)$；不等式右边的量称为似然比门限，记为λ_0。以似然比函数为基础的检验称为似然比检验，简记为

$$\lambda(z)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\lambda_0$$

类似于最大后验概率准则，当$\lambda(z)=\lambda_0$时，可任意选择H_1成立或H_0成立，今后均指定选择H_1成立，并不再说明。因为$\lambda(z)$是两个随机变量函数之比，所以它也是一个随机变量函数，并且总是一维的。

在发信者看来，函数$f_0(z)$和$f_1(z)$分别是假设H_0为真和假设H_1为真的条件概率密度函数；在观测者看来，对于具体的观测值z，$f_0(z)$和$f_1(z)$分别表示z是起因于假设H_0和假设H_1的函数，故在似然比检验中，$f_0(z)$和$f_1(z)$称为似然函数。

2.2.3 对数似然比检验

对数似然比函数是似然比函数的自然对数，由于$\ln\lambda(z)$是$\lambda(z)$的单调函数，所以判决不等式仍然成立。应用对数似然比检验，判决规则为

$$\ln\frac{f_1(z)}{f_0(z)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ln\lambda_0 \tag{2.2.8}$$

2.2.4 似然比检验的性能

按照似然比检验进行信号检测，由于似然比函数本身是个随机变量函数，所以判决的结果可能发生错误，这样就存在错误判决的概率。在二元信号假设检验的情况下，我们能够做出两种判决，记为

D_0：选择假设H_0

D_1：选择假设H_1

这样，与这两种判决有关的概率为

$p(D_i/H_j)=$当H_j为真时判决D_i的条件概率(即选择H_i成立)

很明显共有四种可能，将每种假设H_j及其判决结果D_i与它们的概率一起列于表2.1中。

表2.1 两个假设之间的选择与概率真假设

		H_0	H_1
判决	D_0	$p(D_0/H_0)$	$p(D_0/H_1)$
	D_1	$p(D_1/H_0)$	$p(D_1/H_1)$

表中的$p(D_0/H_1)$和$p(D_1/H_0)$是错误概率，而$p(D_0/H_0)$和$p(D_1/H_1)$是正确概率。这些概率的意义的解释取决于具体的检测问题。例如在雷达信号的检测中，我们感兴趣的是信号的检测，就是说，如果信号存在，感兴趣的是判决信号出现。在这种情况下，两个假设为

$$H_0\text{：信号不存在}$$

$$H_1\text{：信号存在}$$

四种可能是

(1) H_0 是真，判决D_0（正确的信号不发现）

(2) H_0 是真，判决D_1（虚警）

(3) H_1 是真，判决D_0（漏警）

(4) H_1 是真，判决D_1（正确的信号检测）

我们称$p(D_1/H_0)$为虚警概率，并用符号p_f表示

$$p(D_1/H_0)\stackrel{\Delta}{=}p_f$$

我们称$p(D_1/H_1)$为检测概率，并用符号p_d表示

$$p(D_1/H_1)\stackrel{\Delta}{=}p_d$$

显然，漏警概率为

$$p(D_0/H_1)=1-p_d\stackrel{\Delta}{=}q_d$$

在统计的术语中，假设H_0为真，却选择假设H_1成立，称为第一类错误，其概率$p(D_1/H_0)$叫做假设检验的电平；假设H_1为真，却选择假设H_0成立，称为第二类错误；正确判决H_1成立的概率$p(D_1/H_1)$叫做统计检验的势。根据似然比检验的判决规则，我们能够计算这两类错误的概率。关于这一点，可用下面的例子加以说明。

例 2.2.1 若观测信号$z=s_j+n$。这里n是方差为σ_n^2的零均值高斯随机变量；信号$s=s_0$或$s=s_1$，且已知$s_1>s_0$，求似然比门限为λ_0时的判决规则，以便对如下两个假设作出选择：

$$H_0\text{：信号}s=s_0；\qquad H_1\text{：信号}s=s_1$$

并写出两类错误概率的计算公式。

根据题意，我们能够容易地写出似然函数式。在假设H_0下，

$$f_0(z)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{(z-s_0)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

在假设H_1下，

$$f_1(z)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{(z-s_1)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

于是，似然比函数为

$$\lambda(z)=\frac{f_1(z)}{f_0(z)}=\exp\left[-\frac{s_1^2-s_0^2}{2\sigma_n^2}\right]\exp\left[\frac{z(s_1-s_0)}{\sigma_n^2}\right]$$

因为似然比门限为λ_0，所以判决规则为

$$\lambda(z)=\exp\left[-\frac{s_1^2-s_0^2}{2\sigma_n^2}\right]\exp\left[\frac{z(s_1-s_0)}{\sigma_n^2}\right]\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\lambda_0$$

应用对数似然比检验，则有

$$\ln\lambda(z)=-\frac{s_1^2-s_0^2}{2\sigma_n^2}+\frac{z(s_1-s_0)}{\sigma_n^2}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ln\lambda_0$$

于是，我们得到了最简的判决规则：

$$z\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{\sigma_n^2\ln\lambda_0}{s_1-s_0}+\frac{s_1+s_0}{2}\stackrel{\Delta}{=}z_0$$

其中z称为检验统计量，z_0称为检测门限 。

由于z可在$(-\infty,\infty)$范围内任意取值，所以一次观测的样本空间为整个实数轴。上述结果意味着以z_0为分界点，把整个实数轴分为两个部分Z_0和Z_1，如图2.1所示。落入区域Z_0的样点属于假设H_0，落入区域Z_1的样点属于假设H_1，即

如果 $z<z_0$ 选择假设H_0

如果 $z\geqslant z_0$ 选择假设H_1

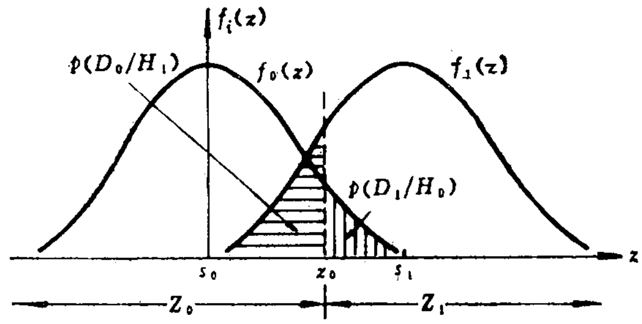

图 2.1 似然函数及样本空间的划分

在假设检验中合适的检测门限值取决于下面我们将要讨论的判决准则。

借助图2.1，我们很容易计算错误概率。假设H_0为真时，第一类错误概率为

$$p(D_1/H_0)=\int_{Z_1} f_0(z)dz=\int_{z_0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{(z-s_0)^2}{2\sigma_n^2}\right]dz$$

假设H_1为真时，第二类错误概率为

$$p(D_0/H_1)=\int_{Z_0} f_1(z)dz=\int_{-\infty}^{z_0}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{(z-s_1)^2}{2\sigma_n^2}\right]dz$$

$p(D_1/H_0)$和$p(D_0/H_1)$也画在图2.1上，分别为图中垂直阴影部分的面积和水平阴影部分的面积。显然我们也能够计算正确判决的概率。

最后我们说明一点，前面我们讨论的是以一次观测为基础的假设检验问题，在更一般的情况下，是在多次观测基础上的假设检验，这个问题留待后面讨论。

§2.3 贝叶斯准则

前一节我们已经指出，假设检验会出现错误。在多数实际情况下，各类错误所引起的后果并非同样严重。例如雷达信号检测，把没有目标的情况误判为有目标与目标实际存在而误判为不存在，两类错误所造成的后果大不相同。为了能反映各类错误所产生危害的严重程度，引入了代价因子c_{ij}，它表示假设H_j为真而选择了假设H_i成立的代价。为使所讨论的结果具有一般性，正确地判决也指定代价。根据不同的条件，对代价的考虑有不同的出发点，从而引出不同的检测准则。本节先讨论贝叶斯准则。

2.3.1 贝叶斯准则的基本概念和性能指标

在假设H_j为真的先验概率$p(H_j)$已知，正确判决和错误判决的代价因子已经指定的情况下，确定检测准则的原则应该是使平均代价（平均风险）最小。使作出判决的平均代价最小的准则称为贝叶斯准则。在贝叶斯准则下得到的判决规则称为贝叶斯判决规则。显然，贝叶斯准则的性能指标是使平均代价最小。平均代价既与先验概率有关，也与每种判决的代价因子有关。

2.3.2 贝叶斯判决规则

设C_{ij}代表H_j为真而选择了假设H_i成立的代价因子。在二元信号下，C_{ij}共有四种，

用2×2的代价矩阵表示为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{pmatrix} \tag{2.3.1)}$$

这个矩阵也可以用表2.2的形式表示。

表 2.2　假设检验的代价因子真假设

		H_0	H_1
判决	H_0	c_{00}	c_{01}
	H_1	c_{10}	c_{11}

在任何情况下，要求正确判决的代价低于错误判决的代价是合理的，因此

$$\begin{aligned} c_{10}&>c_{00} \\ c_{01}&>c_{11} \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

由于在假设检测中，必然为或者选择H_1成立，或者选择H_0成立。这可看成把整个观测区间Z划分成Z_0和Z_1两个互不重迭的判决区间。如果观测值落入区间Z_0，就选择H_0成立，反之，z落入区间Z_1，就选择H_1成立。我们需要讨论的是，根据采用的准则，确定两个区间的界限。

在假设H_0为真的先验概率$p(H_0)$，假设H_1为真的先验概率$p(H_1)=1-p(H_0)$已知的情况下，假设H_0为真的平均条件代价为

$$(\bar{c}/H_0)=c_{00}p(D_0/H_0)+c_{10}p(D_1/H_0) \tag{2.3.3}$$

假设H_1为真的平均条件代价为

$$(\bar{c}/H_1)=c_{01}p(D_0/H_1)+c_{11}p(D_1/H_1) \tag{2.3.4}$$

无条件平均代价为

$$\bar{c}=p(H_0)(\bar{c}/H_0)+p(H_1)(\bar{c}/H_1) \tag{2.3.5}$$

将(2.3.3)式和(2.3.4)式代入(2.3.5)式，并展开成积分的形式，我们得到

$$\begin{aligned}\bar{c}=&p(H_0)\left[c_{00}\int_{Z_0}f_0(z)dz+c_{10}\int_{Z_1}f_0(z)dz\right]\\ &+[1-p(H_0)]\left[c_{01}\int_{Z_0}f_1(z)dz+c_{11}\int_{Z_1}f_1(z)dz\right]\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

由于$Z=Z_0+Z_1=Z_0\cup Z_1$和$Z_0\cap Z_1=\varnothing$，(2.3.6)式可写成

$$\begin{aligned}\bar{c}=&p(H_0)\left[c_{00}\int_{Z_0}f_0(z)dz+c_{10}\int_{Z-Z_0}f_0(z)dz\right.\\ &\left.+[1-p(H_0)]\left[c_{01}\int_{Z_0}f_1(z)dz+c_{11}\int_{Z-Z_0}f_1(z)dz\right]\right.\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

注意到

$$\int_Z f_0(z)dz=\int_Z f_1(z)dz=1 \tag{2.3.8}$$

(2.3.7)式可简化为

$$\bar{c}=p(H_0)c_{10}+[1-p(H_0)]c_{11}$$

$$+\int_{Z_0}\{[1-p(H_0)](c_{01}-c_{11})f_1(z)-p(H_0)(c_{10}-c_{00})f_0(z)\}dz$$

(2.3.9)

其中前两项表示固定代价；积分项表示与判决区间划分有关的代价，必须相对 Z_0 为最小。利用(2.3.2)式的假设，大括号中的两项都是正的。因此，第二项比第一项大的一切 z 值，都应划在 Z_0 域，而第一项比第二项大的一切 z 值，都应划在 Z_1 域，以便积分项所表示的代价相对 Z_0 为最小。第一项与第二项相等处的 z 值，对平均代价不产生影响，可任意划分，现假定把它们划在 Z_1 域，在以后的讨论中均按此处理，而不再说明。

这样，贝叶斯判决规则为：如果

$$\lambda(z)=\frac{f_1(z)}{f_0(z)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{p(H_0)(c_{10}-c_{00})}{[1-p(H_0)](c_{01}-c_{11})}\overset{\Delta}{=}\lambda_0 \tag{2.3.10}$$

在这种判决规则下，平均代价 $\bar{c}$ 取最小值，记为 $\bar{c}_{\min}$。似然比门限 λ_0 是非负的。

判决区域 Z_0 和 Z_1 的分界点 z_0，即检测门限是方程

$$\lambda(z_0)=\frac{f_1(z_0)}{f_0(z_0)}=\frac{p(H_0)(c_{10}-c_{00})}{[1-p(H_0)](c_{01}-c_{11})}\overset{\Delta}{=}\lambda_0 \tag{2.3.11}$$

的解。但应注意，对应于一个似然比门限值 λ_0，z_0 的解可能是多值的，具体例子将在§2.6和§2.9中列举。

贝叶斯准则虽然只能在 $p(H_0)$ 已知的情况下应用，但它具有普遍的意义，因为其它的检测准则均可看作是它的特殊情况。

例 2.3.1 若观测信号 $z=s_j+n$，$j=0$，1。这里干扰 n 是方差为 $\sigma_n^2=1$ 的零均值高斯随机变量；信号 $s_0=0$，$s_1=1$，$p(H_0)=p(H_1)=1/2$，代价因子 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & k\\ k & 0\end{bmatrix}$。求使平均代价最小的检测门限 z_0，以便对如下两个假设作出选择：

$$H_0:\ 信号\quad s_0=0;\ H_1:\ 信号\ s_1=1$$

首先我们求出似然比函数 $\lambda(z)$ 为

$$\lambda(z)=\frac{f_1(z)}{f_0(z)}=\exp\left(z-\frac{1}{2}\right)$$

根据贝叶斯准则，似然比门限为

$$\lambda_0=\frac{p(H_0)(c_{10}-c_{00})}{[1-p(H_0)](c_{01}-c_{11})}=1$$

所以判决规则为

$$\exp\left(z-\frac{1}{2}\right)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}1$$

即

$$z\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{1}{2}$$

因而检测门限 $z_0=1/2$。

例 2.3.2 如果代价因子 c_{ij} 已知而先验概率 $p(H_0)$ 变化的情况下，采用贝叶斯准则，那么平均代价 $\bar{c}_{\min}$ 是 $p(H_0)$ 的函数，记为 $\bar{c}[p(H_0)]_{\min}$。若观测信号 $z=s_j+n$。这里干扰 n 是方差为 $\sigma_n^2=4$ 的零均值高斯随机变量；代价因子 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 2k\\ k & 0\end{bmatrix}$。如果假设 H_0：信号 $s_0=-1$，

H_1：信号 $s_1=+1$，试画出 $\bar{c}[p(H_0)]_{min}$ 的曲线。

我们能够求出似然比函数 $\lambda(z)$ 为

$$\lambda(z)=\frac{f_1(z)}{f_0(z)}=\exp\left(\frac{z}{2}\right)$$

似然比门限 λ_0 为

$$\lambda_0=\frac{p(H_0)(c_{10}-c_{00})}{[1-p(H_0)](c_{01}-c_{11})}=\frac{p(H_0)}{2[1-p(H_0)]}$$

于是贝叶斯判决规则为

$$\exp\left(\frac{z}{2}\right)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{p(H_0)}{2[1-p(H_0)]}$$

即

$$z\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}2\ln\frac{p(H_0)}{2[1-p(H_0)]}$$

检测门限 $z_0=2\ln\dfrac{p(H_0)}{2[1-p(H_0)]}$，它是 $p(H_0)$ 的函数。贝叶斯平均代价 $\bar{c}[p(H_0)]_{min}$ 为

$$\bar{c}[p(H_0)]_{min}=p(H_0)\left[k\int_{z_0}^{\infty}f_0(z)dz\right]+[1-p(H_0)]\left[2k\int_{-\infty}^{z_0}f_1(z)dz\right]$$

其中

$$f_0(z)=\left(\frac{1}{8\pi}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{(z+1)^2}{8}\right]$$

$$f_1(z)=\left(\frac{1}{8\pi}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{(z-1)^2}{8}\right]$$

在(0,1)间取不同的 $p(H_0)$ 值,可计算出相应的检测门限 z_0 值，进而计算出相应的 $\bar{c}[p(H_0)]_{min}$ 值，结果如图 2.2所示。$\bar{c}[p(H_0)]_{min}$ 在 $p(H_0)=0$ 和 $p(H_0)=1$ 时均为零，而在某一先验概率 $p(H_{0x})$ 时有其最大值，是严格上凸的函数。此例中 $\bar{c}[p(H_0)]_{min}$ 最大值发生在 $p(H_0)$ 约为 0.4 处。

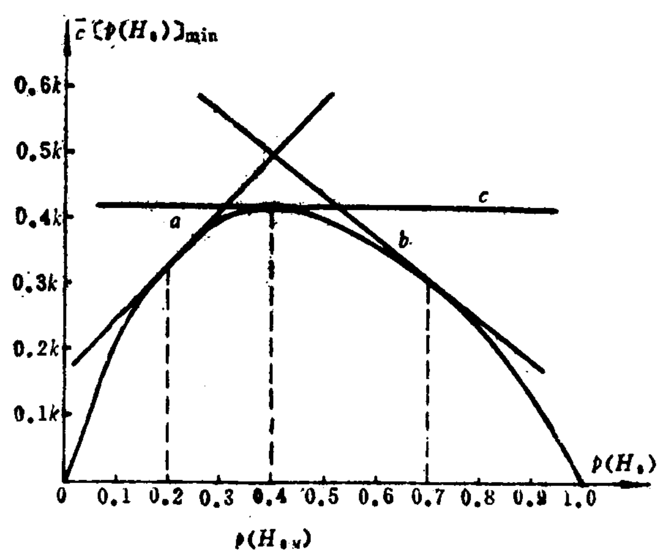

图 2.2 贝叶斯平均代价曲线

§2.4 最小错误概率准则和最大似然准则

2.4.1 最小错误概率准则

最小错误概率准则又称理想观测者准则。若先验概率 $p(H_0)$ 已知，代价因子 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & k\\ k & 0\end{bmatrix}$，即正确判决不付出代价，任何错误判决的代价相同。在这种情况下，通常要求使平均错误概率

$$P_e=p(H_0)p(D_1/H_0)+[1-p(H_0)]p(D_0/H_1) \tag{2.4.1}$$