

高等专科学校试用教材

# 高等数学

上册

上海市高等专科学校《高等数学》编写组编

上海科学技术出版社

374687

高等专科学校试用教材

# 高等数学

上册

上海市高等专科学校  
《高等数学》编写组编

上海科学技术出版社

高等专科学校试用教材

高等数学

上册

上海市高等专科学校

《高等数学》编写组编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 上海群众印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 12.5 字数 274,000

1985 年 5 月第 1 版 1985 年 5 月第 1 次印刷

印数: 1—25,000

统一书号: 13119·1234 定价: 2.05 元

## 前 言

近年来,我国高等工业专科教育有了很大的发展,编写适合专科学校的高等数学教材已成为各校的迫切要求。在上海市教育局的领导下,上海九所高等工业专科学校于1983年初组成了编写组,共同拟订了大纲,讨论了初稿,编写出本教材。

在编写过程中,广泛征求了本市和各地专科学校数学教师的意见,在教材内容选取上,结合专科学校的培养要求和学制特点,力求贯彻“少而精”的原则,加强对学生的基本运算能力的训练;同时注意贯彻理论联系实际的原则,以利于培养学生分析问题和解决问题的能力。

全书基本内容按实际授课时数160左右编写(包括习题课),另有少量带\*号的内容供不同需要选用。本书除供三年制工业专科高等数学课使用外,也可供要求相近的大学本科和专科、职工大学、业余大学选作教材以及工程技术人员和具有高中水平的读者参考或自学。

全书共十二章,分上、下两册,上册七章,包括极限与连续,导数与微分,中值定理和导数的应用,不定积分,定积分,定积分的应用,微分方程;下册五章,包括无穷级数,向量代数和空间解析几何,多元函数微分学,重积分,线积分和面积分。书后附有常用初等数学公式,常用积分表,平面和空间的常用图形,习题答案。每节后配置了较多的习题,用横线将基本题与提高题分开。每章后配有适量的复习题。

参加本书编写的有(以姓氏笔划为序):王光球(上海建筑材料专科学校),严宁鉴(上海冶金专科学校),李国勇(上海纺织专科学校),陈光渝(上海冶金专科学校分校),陈保权(上海医疗器械专科学校),杨选贤(上海化学工业专科学校),金士岐(上海轻工业专科学校),洪蓬(上海科技专科学校),黄淑芳(上海电力专科学校)。由金士岐、黄淑芳担任主编。复旦大学数学系朱学炎副教授审阅了本书全稿。鉴于专科学校教材建设工作是一个新的尝试,加之时间仓促,难免有不妥之处,盼望使用本书的同行和广大读者不吝指教,以便进一步修改。

上海市高等专科学校《高等数学》编写组

1984年5月

# 目 录

(上 册)

# 录

(册)

## 前 言

## 言

## 第一章 极限与连续

第一节 函数 .....	1
一 函数的概念 .....	1
二 复合函数 .....	5
三 双曲函数 .....	6
四 分段函数 .....	8
习题 1-1 .....	8
第二节 数列的极限 .....	11
习题 1-2 .....	16
第三节 函数的极限 .....	17
一 $x \rightarrow \infty$ 时函数的 极限 .....	17
二 $x \rightarrow x_0$ 时函数的 极限 .....	20
习题 1-3 .....	25
第四节 无穷小与无穷 大 .....	26
一 无穷小 .....	26
二 无穷大 .....	29
习题 1-4 .....	30

第五节 极限运算法则 .....	31
习题 1-5 .....	34
第六节 两个重要的极 限 .....	35
习题 1-6 .....	38
第七节 无穷小的比较 .....	39
习题 1-7 .....	41
第八节 函数的连续性 与间断点 .....	42
一 函数的连续性 .....	42
二 函数的间断点 .....	44
习题 1-8 .....	48
第九节 连续函数的运 算 .....	49
习题 1-9 .....	51
第十节 闭区间上连续 函数的性质 .....	52
习题 1-10 .....	53
第一章复习题 .....	54

## 第二章 导数与微分

第一节 导数概念.....57	则.....75
一 函数的变化率	习题 2-2-(1) .....81
——导数.....57	四 隐函数及参量
二 导数的几何意	方程所确定的
义.....61	函数的求导法.....84
三 求函数的导数	习题 2-2-(2) .....89
举例.....61	第三节 高阶导数.....90
四 可导与连续的	习题 2-3 .....94
关系.....64	第四节 微分.....96
习题 2-1 .....67	一 微分概念.....96
第二节 求导法则.....68	二 微分的运算法
一 导数的四则运	则 .....100
算法则.....68	三 微分应用于近
二 复合函数的求	似计算 .....102
导法则.....72	习题 2-4 .....104
三 反函数求导法	第二章复习题 .....106

## 第三章 中值定理与导数的应用

第一节 中值定理 .....109	第三节 泰勒公式 .....125
习题 3-1 .....114	一 泰勒公式 .....125
第二节 洛必达法则 .....115	二 几个函数的马
一 $\frac{0}{0}$ 及 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定	克劳林公式 .....129
型的极限 .....115	习题 3-3 .....136
二 其它类型未定	第四节 函数的单调性
型的极限 .....120	与极值 .....136
习题 3-2 .....124	一 函数的单调性

及其判别法 .....	136
二 函数的极值及其求法 .....	140
三 最大值与最小值 .....	144
习题 3-4 .....	148
第五节 曲线的凹凸及拐点 .....	150
一 曲线的凹凸及其判定法 .....	151
二 曲线的拐点及其求法 .....	152
习题 3-5 .....	155
第六节 函数图形的描	

绘 .....	156
一 垂直渐近线和水平渐近线 .....	156
二 函数作图的一般步骤 .....	157
习题 3-6 .....	159
第七节 曲率 .....	160
一 曲率概念 .....	160
二 曲率半径、曲率圆 .....	164
习题 3-7 .....	165
第八节 方程的近似解 .....	166
习题 3-8 .....	170
第三章复习题 .....	171

## 第四章 不定积分

第一节 原函数与不定积分概念 .....	173
习题 4-1 .....	175
第二节 基本积分公式和不定积分的性质 .....	176
一 基本积分公式 .....	176
二 不定积分的性质 .....	177
习题 4-2 .....	180
第三节 换元积分法 .....	182
一 第一类换元积分法 .....	182

二 第二类换元积分法 .....	187
习题 4-3 .....	193
第四节 分部积分法 .....	196
习题 4-4 .....	202
第五节 两种特殊类型的积分举例 .....	204
一 有理函数的积分举例 .....	204
二 三角函数有理式积分举例 .....	211
习题 4-5 .....	214
第四章复习题 .....	215



## 第五章 定积分

第一节 定积分概念	218
一 两个实际问题	218
二 定积分概念	221
习题 5-1	225
第二节 定积分的性质	226
习题 5-2	229
第三节 微积分学的基本公式	230
习题 5-3	234
第四节 定积分的换元积分法和分部积分法	236
一 定积分的换元积分法	236

二 定积分的分部积分法	241
习题 5-4	243
第五节 定积分的近似计算	245
习题 5-5	251
第六节 广义积分	252
一 无穷区间的广义积分	252
二 被积函数有无穷间断点的广义积分	254
习题 5-6	256
第五章复习题	257

## 第六章 定积分的应用

第一节 平面图形的面积	260
一 在直角坐标系	260
二 在极坐标系	263
习题 6-1	266
第二节 体积	267
一 已知平行截面面积求体积	267
二 旋转体的体积	269
习题 6-2	271
第三节 平面曲线的弧	

长	272
习题 6-3	275
第四节 定积分在物理方面的应用举例	276
一 功	276
二 液体静压力	278
三 引力	279
四 转动惯量	282
习题 6-4	284
第六章复习题	285

## 第七章 微分方程

### 第一节 微分方程的基本概念

本概念 .....288

习题 7-1 .....291

### 第二节 可分离变量的一阶微分方程

一阶微分方程 .....293

#### 一 可分离变量的一阶微分方程

.....293

#### 二 齐次方程

.....298

习题 7-2 .....300

### 第三节 一阶线性微分方程

.....302

习题 7-3 .....308

### 第四节 可降阶的高阶微分方程

.....309

#### 一 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

.....310

#### 二 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

.....311

### \*三 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

.....312

习题 7-4 .....313

### 第五节 线性微分方程

.....314

习题 7-5 .....318

### 第六节 二阶常系数线性齐次微分方程

.....319

习题 7-6 .....328

### 第七节 二阶常系数线性非齐次微分方程

.....329

习题 7-7 .....336

### \*第八节 常系数线性微分方程组解法举例

.....337

习题 7-8 .....339

第七章复习题 .....339

## 附 录

附录一 .....341

1. 希腊字母表 .....341

2. 初等数学常用公式 .....341

附录二 平面常用曲线及其方程

.....344

附录三 积分表 .....347

## 习 题 答 案

# 第一章 极限与连续

函数、极限都是高等数学中最基本的概念，也是微积分的基础。在中学数学里，对函数概念及其性质已有较详细的讨论，所以本章将在复习函数概念的基础上，着重介绍函数的极限和连续性。

## 第一节 函 数

### 一 函数的概念

客观世界有许多变量，它们之间往往不是孤立的，而是相互依赖、相互制约的。相互依赖的变量之间的确定关系，在数学上就称为函数关系。

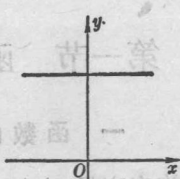
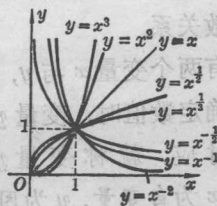
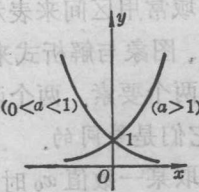
**定义** 设有两个变量  $x$  与  $y$ ，如果变量  $x$  在其变化范围  $D$  内任取一个确定数值时，变量  $y$  按照一定的规律有唯一确定的数值和它对应，就称变量  $y$  是变量  $x$  的函数，记为  $y=f(x)$ ，且称  $x$  为自变量， $y$  为因变量。自变量  $x$  的变化范围  $D$  称为函数的定义域。

函数的定义域常用区间来表示，自变量与因变量的对应规律通常用表格、图象与解析式来表示。定义域与对应规律是函数关系中的两个要素。两个函数若具有相同的定义域和对应规律，则称它们是等同的。

如果自变量取某一数值  $x_0$  时，函数  $y=f(x)$  有确定的值和它对应，则称函数在  $x_0$  处有定义，且记  $x_0$  处的函数值为

$f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ , 所以, 函数的定义域也就是使函数有定义的 $x$ 值的全体; 而相应的函数值的全体称为函数的值域.

在中学数学里, 对于常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等基本初等函数已作过较详细的介绍. 为了今后学习和查阅方便, 仅将它们的图形和简单性质列表于下:

名称	表达式	定义域	图 形	特 性
常 数 函 数	$y=c$	$(-\infty, +\infty)$		
幂 函 数	$y=x^\mu$ ( $\mu \neq 0$ )	随 $\mu$ 而不同, 但在 $(0, +\infty)$ 中都有定义.		经过点(1, 1). 在第一象限内当 $\mu > 0$ 时, $x^\mu$ 为增函数; $\mu < 0$ 时, $x^\mu$ 为减函数.
指 数 函 数	$y=a^x$ ( $a > 0$ , $a \neq 1$ )	$(-\infty, +\infty)$		图象在 $x$ 轴上方(因 $a^x > 0$ ), 且都通过点(0, 1). 当 $0 < a < 1$ 时, $a^x$ 是减函数; 当 $a > 1$ 时, $a^x$ 是增函数.

(续表)

名称	表达式	定义域	图 形	特 性
对数函数	$y = \log_a x$ ( $a > 0$ , $a \neq 1$ )	$(0, +\infty)$		<p>图象在 <math>y</math> 轴右侧 (因 <math>0</math> 与负数都没有对数), 都通过点 <math>(1, 0)</math>.</p> <p>当 <math>0 &lt; a &lt; 1</math> 时, <math>\log_a x</math> 是减函数;</p> <p>当 <math>a &gt; 1</math> 时, <math>\log_a x</math> 是增函数.</p>
三 角 函 数				
正 弦 函 数	$y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$		<p>是以 <math>2\pi</math> 为周期的奇函数 (图形关于原点对称). 图形在两直线 <math>y=1</math> 与 <math>y=-1</math> 之间, 即 <math> \sin x  \leq 1</math>.</p>
余 弦 函 数	$y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$		<p>是以 <math>2\pi</math> 为周期的偶函数 (图形关于 <math>y</math> 轴对称). 图形在两直线 <math>y=1</math> 与 <math>y=-1</math> 之间, 即 <math> \cos x  \leq 1</math>.</p>
正 切 函 数	$y = \operatorname{tg} x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )		<p>是以 <math>\pi</math> 为周期的奇函数, 在 <math>(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})</math> 内是增函数.</p>

(续表)

名称	表达式	定义域	图 形	特 性
余切函数	$y = \operatorname{ctg} x$	$x \neq k\pi$ ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )		是以 $\pi$ 为周期的奇函数, 在 $(0, \pi)$ 内是减函数.
反正弦函数	$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$		单调增加的奇函数. 值域: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ .
反余弦函数	$y = \arccos x$	$[-1, 1]$		单调减少. 值域: $0 \leq y \leq \pi$ .
反正切函数	$y = \operatorname{arctg} x$	$(-\infty, +\infty)$		单调增加的奇函数. 值域: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ .
反余切函数	$y = \operatorname{arcc} \operatorname{ctg} x$	$(-\infty, +\infty)$		单调减少. 值域 $0 < y < \pi$ .

## 二 复合函数

在很多实际问题中,两个变量的联系有时不是直接的.例如,质量为  $m$  的物体,以初速度  $v_0$  向上抛,则动能  $E_k$  是速度  $v$  的函数:

$$E_k = f(v) = \frac{mv^2}{2},$$

而速度  $v$  是时间  $t$  的函数(略去空气阻力):

$$v = \varphi(t) = v_0 - gt,$$

其中  $g$  是重力加速度. 这样,动能  $E_k$  可通过变量  $v$  表示成  $t$  的函数:

$$E_k = f(v) = f[\varphi(t)] = \frac{m(v_0 - gt)^2}{2}.$$

一般地,设  $y$  是  $u$  的函数  $y = f(u)$ , 而  $u$  又是  $x$  的函数  $u = \varphi(x)$ , 且  $\varphi(x)$  的值域包含在  $f(u)$  的定义域内, 则通过变量  $u$ ,  $y$  就是  $x$  的函数, 记为  $y = f[\varphi(x)]$ , 并称它为前两个函数的复合函数, 而变量  $u$  则称为中间变量.

**例1** 设  $y = \sqrt{u}$ , 而  $u = 1 + x^2$ , 则构成复合函数

$$y = \sqrt{1 + x^2}.$$

必须注意,复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  的定义域应该是使  $u = \varphi(x)$  的函数值属于  $y = f(u)$  的定义域的那些  $x$  所组成. 因此,通常只是  $u = \varphi(x)$  的定义域的一部分.

**例2** 设  $y = \arcsin u$ , 而  $u = 1 - x^2$ , 则构成复合函数

$$y = \arcsin(1 - x^2)$$

的定义域  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  仅是  $u = 1 - x^2$  的定义域  $(-\infty, +\infty)$  的一部分.

复合函数不仅可以由两个函数,也可以由多个函数相继进行有限次复合而成. 例如,  $y = \sin u$ ,  $u = \sqrt{v}$ ,  $v = 1 - x$  复

合而成的函数为  $y = \sin \sqrt{1-x}$ .

研究复合函数的概念, 不仅能将若干个简单的函数复合成一个函数, 还可将较复杂的函数分解为若干个简单的函数, 这对今后实际运算很有用. 例如,  $y = \ln(1-x)$  可以看作由  $y = \ln u$ ,  $u = 1-x$  复合而成. 又如, 函数  $y = \sqrt[3]{(1+x-x^2)^2}$  是由函数  $y = u^{\frac{2}{3}}$  与  $u = 1+x-x^2$  复合而成的.

凡是由基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合步骤所构成的函数统称为初等函数. 上述各例都是初等函数.

### 三 双曲函数

工程技术中, 有时要用到一种称为双曲函数的初等函数,

其定义为:

双曲正弦函数

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

双曲余弦函数

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

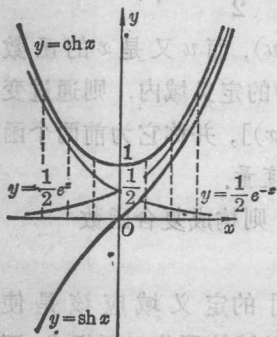


图 1-1

它们的图形如图 1-1 所示. 由双曲函数的定义, 可推出下列公式:

$$\text{sh}(x+y) = \text{sh } x \text{ch } y + \text{ch } x \text{sh } y,$$

$$\text{sh}(x-y) = \text{sh } x \text{ch } y - \text{ch } x \text{sh } y,$$

$$\text{ch}(x+y) = \text{ch } x \text{ch } y + \text{sh } x \text{sh } y,$$

$$\text{ch}(x-y) = \text{ch } x \text{ch } y - \text{sh } x \text{sh } y,$$

$$\text{sh } 2x = 2 \text{sh } x \text{ch } x,$$

$$\text{ch } 2x = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x,$$



$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

以上双曲函数的公式与三角函数的公式相类似，可以通过对比，帮助记忆。

现将两个函数的主要性质列表如下：

名称	表达式	定义域	性质
双曲正弦函数	$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$(-\infty, +\infty)$	奇函数，图形在 I、III 象限，通过原点。 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加。 $ x $ 很大时，在第 I 象限内图形接近于 $y = \frac{1}{2} e^x$ ；在第 III 象限内图形接近于 $y = -\frac{1}{2} e^{-x}$ 。
双曲余弦函数	$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$(-\infty, +\infty)$	偶函数，图形在 I、II 象限，通过点 $(0, 1)$ 。 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少；在 $(0, +\infty)$ 内单调增加。 $ x $ 很大时，在第 I 象限内图形接近于 $y = \frac{1}{2} e^x$ ；在第 II 象限内图形接近于 $y = \frac{1}{2} e^{-x}$ 。

除了上述双曲正弦函数和双曲余弦函数外，有时还用到双曲正切函数和双曲余切函数，它们的定义是：

双曲正切函数

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},$$

双曲余切函数

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

其性质就不再列举了。