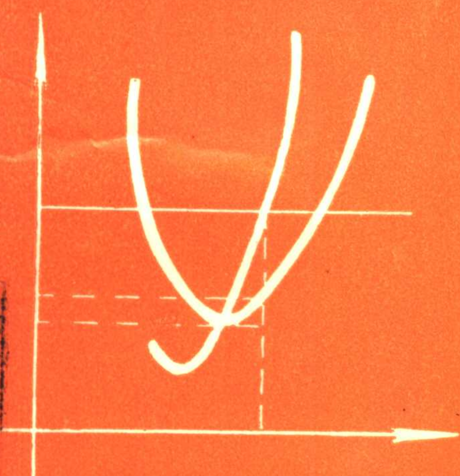
经济应用基础数学

王嘉武 编



经济应用基础数学

王嘉武

国防工業出版社

(京)新登字 106 号

内容简介

本书共 17 章，主要由微积分、线性代数、概率论与数理统计等内容组成。

前 7 章是微积分的基本知识。由于微积分是学习其他经济数学知识的基础，所以用了较多的篇幅介绍了这方面内容。第 8 章至第 10 章是线性代数的有关内容。第 11 章介绍了投入产出方法，第 12 章至第 17 章是概率论与数理统计的有关内容。

本书力求简明、扼要，避免过多的数学推导，注重数学与经济的联

本书可作为各级党校教材，也可供各级党政干部自学之用。

经济应用基础数学
王嘉武 编
责任编辑 史 华
*
国防工业出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路 23 号）
（邮政编码 100044）
新华书店经售
北京怀柔王史山胶印厂印刷
*
开本 850×1168 1/32 印张 9⅝ 251 千字
1993 年 9 月第 1 版 1994 年 7 月第 2 次印刷 印数 3501—5500 册

ISBN 7-118-01216-5/O·95 定价 9.60 元
（本书如有印装错误，我社负责调换）

出 版 说 明

目前，我国正在建立具有中国特色的社会主义市场经济的新体制。研究和应用市场经济理论，研究和掌握现代化管理方法，是我们经济工作中的一项重要任务。因此，经济数学方法的学习、研究和应用，日益受到广大读者的重视。特别是广大党政干部，迫切需要一本能够针对他们特点、适应他们需要的有关经济数学基础知识方面的书籍。本书正是为适应这一需要编写的。

这本书介绍了经济数学所需要的基本知识，全书主要包括微积分、线性代数、概率论和数理统计等方面的数学知识。本书力图简明、扼要，注重数学思想的阐述和数学与经济之间的联系，而避免过多的数学推导。因此，对一些定理和命题，只给出条件和结论，不予证明。本书虽然篇幅有限，但仍然保持了一定的理论完整性和严谨性，对一些基本概念、定理以及它们的应用，作了较为全面和严格的叙述。本书配备了一定量的例题和习题。一类例题是比较简易且易于理解的，它主要用来解释概念、定义及定理。还有少量的例题是为帮助读者加深对概念的理解及提高应用定理的能力。书末备有习题答案，供读者参考。

由于编者的学识和水平所限，书中难免存在不妥之处，欢迎读者批评指正。

编者

1993 年 8 月

目　　录

第一章　函　数

函数是数学的最重要的基本概念之一。在初等数学中，已经介绍了函数的基本概念。作为预备性知识，本章介绍反函数、复合函数、分段函数、初等函数和二元函数的一些内容。

§1.1　函数的概念和性质

为了方便读者阅读本书，本节将函数的基础知识简要归纳如下。

一、函数的概念

1. 常量与变量

在某个变化过程中，数值保持不变的量称为常量，可以取不同值的量称作变量。习惯上常以字母 a、b、c、… 表示常数，以 x、y、z、… 表示变量。

2. 函数的定义和定义域

对于两个变量 x 和 y，x 的取值范围为 D，若存在一个对应规则 f，使得每一个 $x \in D$ 都有一个确定的实数 y 与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y = f(x), x \in D$。

x 称为自变量，y 称为因变量（或简称变量），集合 D 称为函数的定义域。

在一元函数中，区间是表示定义域的一种具体形式。有的时候，仅需研究函数在某个点 x_0 附近的一个很小的区间上的变化情况，这个小区间又称被作邻域。邻域一般表示为 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，其是 δ 是一个小的正数，表示邻域长度的一半。

构成函数的两个基本要素是函数的对应规则和定义域。例如，函数 $y = \ln x^2, D: (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$；与函数 $y = 2\ln x$，

$D:(0, +\infty)$，由于定义域不同而是两个不同的函数。

确定函数的定义域，就是确定自变量的取值范围。对于用解析式表示的函数，就是确定使其解析式得以运算（或者说使运算有意义）的自变量的值。我们需要注意下面四种基本情况：

(1) 分式函数 $\frac{1}{g(x)}$ 的定义域是使分母 $g(x) \neq 0$ 的全体实数。

例如：$y = \frac{4x}{x^2 - 3x + 2}$ 定义域是使 $x^2 - 3x + 2 \neq 0$，即 $x \neq 1$ 且 $x \neq 2$ 的全体实数，或

$$D:(-\infty,1) \cup (1,2) \cup (2, +\infty)$$

(2) 偶次根式函数 $\sqrt[2n]{g(x)} (n \in N)$ 的定义域是使被开方式 $g(x) \geqslant 0$ 的全体实数。

例如：$y = \sqrt{1 - x^2}$ 的定义域是使 $1 - x^2 \geqslant 0$，即 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 的全体实数，或

$$D:[-1,1]$$

(3) 对数函数 $\log_a g(x) (a > 0, a \neq 1)$ 的定义域是使真数 $g(x) > 0$ 的全体实数。

例如：$y = \log_3(2 + x - x^2)$ 的定义域是使 $2 + x - x^2 > 0$，即 $-1 < x < 2$ 的全体实数，或

$$D:(-1,2)$$

(4) 反正弦函数 $\arcsin g(x)$ 和反余弦函数 $\arccos g(x)$（见§1.2）的定义域是使 $|g(x)| \leqslant 1$ 的全体实数。

例如：$y = \arcsin(3x - 1)$ 的定义域是使 $-1 \leqslant 3x - 1 \leqslant 1$，即 $0 \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}$ 的全体实数，或

$$D:[0, \frac{2}{3}]$$

如果函数解析式中含有以上几种情况，那么函数的定义域则为每种情况所确定的集合的交集。

例 1 确定函数 $y = \frac{\lg(2 - x)}{\sqrt{x - 1}}$ 的定义域。

解：$2 - x > 0$ 且 $x - 1 > 0$

即 $\begin{cases} 2-x>0 \\ x-1>0 \end{cases}$

也就是 $1<x<2$

则 $D:(1,2)$

3. 函数值

对于给定的函数 $y=f(x)$，与 x 对应的 y 值称为函数值。对应于 x_0 的函数值是 $f(x_0)$，可记作 y_0 或 $y|_{x=x_0}$。函数值的集合称为值域，用 Z 表示。

二、函数的几种简单性质

1. 函数的奇偶性

设给定函数 $y=f(x)$。若对所有的 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若对所有的 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数。偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形对于原点对称。

例如 $y=x^4+x^2+1$，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=x\sin x$，$y=x^2\cos x$ 等，都是偶函数。而 $y=x^3+x$，$y=\sqrt[3]{x}$，$y=x^2\sin x$ 等，都是奇函数。但 $y=x^3+x+1$，$y=x^2+x$ 等既不是奇函数，也不是偶函数。

2. 函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在正的常数 c，使得 $f(x)=f(x+a)$ 恒成立，则称此函数为周期函数。满足这个等式的最小正数 c，称为函数的周期。

三角函数都是周期函数。正弦和余弦函数的周期是 2π，正切和余切函数的周期是 π。

3. 函数的单调增减性

若函数 $y=f(x)$ 对区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数在区间 (a,b) 内是单调递增的；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数在区间 (a,b) 内是单调递减的。

例如函数 $y=x^3$，对任意的 x_1、x_2，如果 $x_1<x_2$ 总有 $x_1^3<x_2^3$，

即 $f(x_1) < f(x_2)$，所以 $y = x^3$ 在$(-\infty, +\infty)$内单调递增。

又如函数 $y = x^2$，在$(-\infty, +\infty)$上不是单调的。在$(-\infty, 0]$内是单调递减的，而在$[0, +\infty)$内是单调递增的。

4. 函数的有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间(a,b)内有定义。若存在一个正数 M，对于所有的 $x \in (a,b)$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在(a,b)内是有界的。若不存在这样的正数，则称 $f(x)$ 在(a,b)内是无界的。

例如 $y = \sin x$，由于对任何实数 x，恒有 $|\sin x| \leqslant 1$，所以它在$(-\infty, +\infty)$内有界。函数 $y = \dfrac{1}{x}$，在 $x = 0$ 点处无界，在$[\delta, +\infty)$上是有界的，δ 为任意小的正数。

§1.2　反函数、复合函数、分段函数

一、反函数

函数 $y = f(x)$ 表示变量 y 是随着 x 的变化而变化。但是在某些情况下，需要研究 x 是怎样随着 y 的变化而变化的。

设某种商品的价格为 p，则销售收入 y 取决于销售量 x。它们之间的关系可表示为 $y = px$，销售收入 y 是销售量的函数。反过来，对任意一个销售收入 y，都可以由 $x = \dfrac{y}{p}$ 来确定销售量 x，销售量 x 是销售收入 y 的函数。我们称后一函数是前一函数的反函数，或者说它们互为反函数。

定义 1.1　设 $y = f(x)$ 是定义在 D 上的一个函数，值域为 Z。若对每一个 $y \in Z$ 有一个确定的且满足 $y = f(x)$ 的 $x \in D$ 与之对应，其对应规则记为 f^{-1}，这个定义在 Z 上的函数 $x = f^{-1}(y)$ 称为 $y = f(x)$ 的反函数，或称它们互为反函数。

反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域和值域，分别是函数 $y = f(x)$ 的值域和定义域。只有在函数的对应关系为一一对应关系时，函数才有反函数。

在求反函数时，把函数值 y 当作已知量，由 $y = f(x)$ 解出 $x =$

$f^{-1}(y)$ 来。由于习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示变量，因此需将 $x = f^{-1}(y)$ 中 x 与 y 互换，改写成以 x 为自变量、y 为因变量的函数 $y = f^{-1}(x)$，$y = f(x)$ 的图形与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称。

例 1 求函数 $y = \dfrac{3x-2}{x-1}$ 的反函数

解：由 $y = \dfrac{3x-2}{x-1}$ 得

$$x = \frac{y-2}{y-3}$$

将 x、y 互换，得到原函数的反函数

$$y = \frac{x-2}{x-3}$$

三角函数 $y = \sin x$、$y = \cos x$、$y = \mathrm{tg} x$ 的反函数分别记作 $y = \mathrm{Arcsin} x$、$y = \mathrm{Arccos} x$、$y = \mathrm{Arctg} x$。它们的图形分别与其相应的三角函数的图形对称于直线 $y = x$，如图 1—1 所示。它们都是多值的。通常所说的反三角函数是按下列区间取其称为主值分支的一段，如图 1—1 中实线所示，分别记作

$$y = \arcsin x \qquad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$y = \arccos x \qquad y \in [0, \pi]$$

$$y = \mathrm{arctg} x \qquad y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

反正弦三角函数 $y = \arcsin x$ 和反余弦三角函数 $y = \arccos x$ 的定义域同为 $[-1, 1]$，反正切三角函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$。

二、复合函数

在许多实际问题中，虽然两个变量存在着确定的相依关系，但是这两个变量可能不是直接联系的，而是通过一个中间变量联系的。这样的两个变量所构成的函数就是复合函数。

比如，企业的总收入 R 是产量 Q 的函数 $R = R(Q)$，产量又是投入（资金、劳力）x 的函数 $Q = Q(x)$。那么，总收入 R 通过中间变

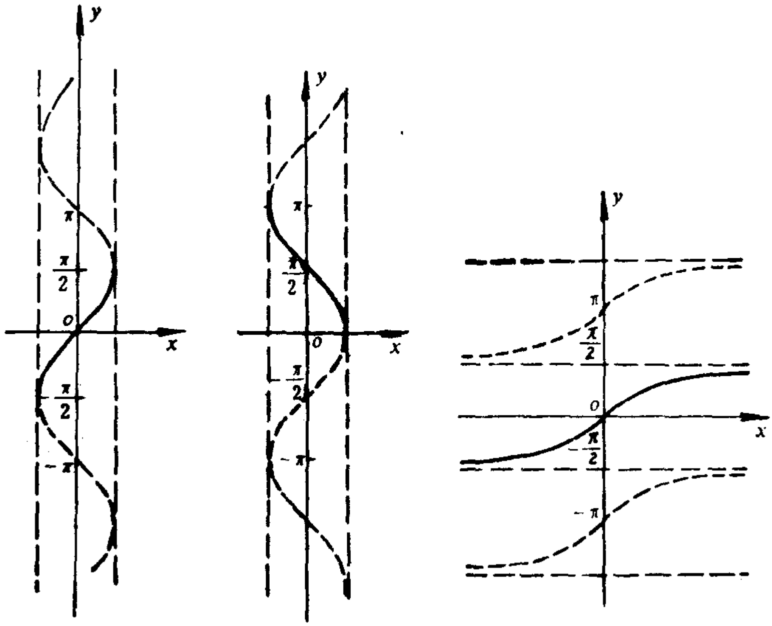


图 1—1

量Q与投入x之间的函数关系就是复合函数关系：$R=R[Q(x)]$。

定义 1.2 设y是u的函数$y=f(u)$，u是x的函数$u=g(x)$。若对于x的每一个u值，函数$y=f(u)$都有定义，则称y是x的复合函数，记作$y=f[g(x)]$。

掌握函数的复合过程，将复合函数分解成简单函数系列，对于求复合函数的定义域及作其他运算都是必要的。

例 2 求函数$y=\arcsin\frac{2x-1}{3}$的定义域

解：函数$y=\arcsin\frac{2x-1}{3}$可以看成是由

$$y=\arcsin u \qquad 及 \qquad u=\frac{2x-1}{3}$$

两个简单函数复合而成。由$y=\arcsin u$可知，其定义域为$|u|\leqslant 1$，

也就是$\left|\frac{2x-1}{3}\right| \leqslant 1$，解之得$-1 \leqslant x \leqslant 2$。由此得出函数 $y = \arcsin\frac{2x-1}{3}$ 的定义域　D:$[-1,2]$

例 3　求函数 $y = e^{\sqrt{x^2+1}}$ 的定义域

解:函数可以看成是由

$$y = e^u \qquad u = \sqrt{g}, \qquad g = x^2 + 1$$

三个函数复合而成。显然,复合函数的定义域

是　　　　D:$(-\infty, +\infty)$

三、分段函数

有些函数,在其定义域的不同部分,往往需用不同的解析式表达函数关系。比如,生产成本在生产规模不同时,它与产量的函数关系的解析式是不同的。设成本函数为 $C = C(x)$。在生产规模不大时,总成本 C 对产量 x 的函数关系可用线性解析式表达,如当 $0 \leqslant x \leqslant 1000$ 时,设总成本为 $C = 4000 + 4.5x$;当生产达到一定规模后产量再增加时,如当 $1000 < x \leqslant 1500$ 时,总成本 C 与产量 x 的函数关系可设为 $C = 9x - 0.0005x^2$。其中,$x = 1500$ 表示最大生产量。那么,总成本函数可记为

$$C(x) = \begin{cases} 4000 + 4.5x & 0 \leqslant x \leqslant 1000 \\ 9x - 0.0005x^2 & 1000 < x \leqslant 1500 \end{cases}$$

$C(0) = 4000 + 4.5 \times 0 = 4000$,它表示,企业不生产时,也要支付 4000 单位费用。

$C(1500) = 9 \times 1500 - 0.0005 \times 1500^2 = 13500 - 1125 = 12375$,它表示,企业达到最大生产能力时,总成本为 12375 单位。

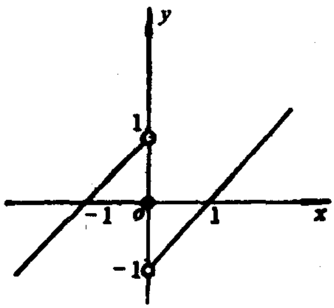


图 1—2

定义 1.3　对于函数 $y = f(x)$,在其定义域的不同区间上,函数关系需用不同的解析式表达的函数,称为

分段函数。

如，已知定义在$(-\infty,+\infty)$上的分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x-1 & x>0\end{cases}$$

其图形如图 1—2 所示。

例 4 用分段函数表示函数

$$y=1-|x+2|$$

解：根据绝对值定义可知，当$x+2<0$，即$x<-2$时，有$|x+2|=-(x+2)$；当$x+2\geqslant 0$，即$x\geqslant -2$时，有$|x+2|=x+2$。

故
$$y=\begin{cases}1+(x+2) & x<-2\\ 1-(x+2) & x\geqslant -2\end{cases}$$

即
$$y=\begin{cases}3+x & x<-2\\ -1-x & x\geqslant -2\end{cases}$$

分段函数虽然是用几个解析式来表示，但是它们表示的是一个函数，而不是几个函数。

四、初等函数

下列函数为基本初等函数

1. 常量函数： $y=c$
2. 幂函数： $y=x^{a}$ （a 为常数）
3. 指数函数 $y=a^{x}$ （a 为常数，且 $a>0,a\neq 1$）
4. 对数函数 $y=\log_{a}x$ （a 为常数，且 $a>0,a\neq 1$）
5. 三角函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\mathrm{tg}x$，
   $y=\mathrm{ctg}x,y=\sec x,y=\csc x$
6. 反三角函数 $y=\arcsin x,y=\arccos x$，
   $y=\mathrm{arctg}x,y=\mathrm{arcctg}x$，
   $y=\mathrm{arcsec}x,y=\mathrm{arccsc}x$

以上这些基本初等函数在初等数学中已介绍过，它们的性质和图形都是必须熟知的。

由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所构成的一切

函数,统称为初等函数。

§1.3 二元函数的概念

我们已经知道,因变量的值只依赖于一个自变量的函数,称为一元函数。但在许多实际问题中,因变量与几个自变量有关,即因变量的值依赖于几个自变量。例如,某种商品的市场需求量不仅与它的市场价格有关,而且与消费者的收入、消费偏好以及这种商品的替代品的价格等有关,即决定该商品需求量的因素不止一个而是多个。研究这类问题,需要运用多元函数的概念。

二元函数是最简单的多元函数,掌握好二元函数的概念和性质,有助于理解和掌握 n 元函数。

一、空间直角坐标系

研究一元函数时,借助了平面直角坐标系,研究二元函数时,需要借助空间直角坐标系。

从空间某一定点 o 作三条互相垂直的直线 ox,oy,oz,并按图 1—3 所示规定其正方向。这三条直线分别称为 x 轴、y 轴和 z 轴。三条坐标轴的交点 o 称为坐标原点,并规定一个单位长度。这样,形成一个空间直角坐标系。

坐标系的三条坐标轴,每两条确定一个平面,称为坐标平面。三个坐标平面分别是 xy 平面、yz 平面和 zx 平面。三个坐标平面又把空间分成 8 个部分,称为 8 个卦限。

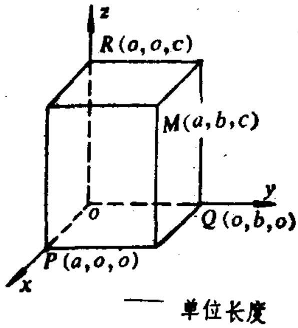


图 1—3

对于空间任意一点 M,过点 M 作三个平面,分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴,且与这三个轴分别交于 P、Q、R 三点。设 $oP=a$、$oQ=b$、$oR=c$,则点 M 唯一确定了一个三元有序数组 (a,b,c);反之,对任意一个三元有序数组 (a,b,c) 作为坐标也唯一地确定了点 M。这与在平面直角坐标中的原理是相同的。总之,空间直角坐标系上的点