

半解析数值 方法

曹志远 张佑启 编著

半解析数值方法

曹志远 张佑启 编著

国防工业出版社

(京)新登字106号

内 容 简 介

半解析数值方法是指在数值分析中引入部分解析解或解析函数,而计算得到的仍是一系列离散化数值结果的分析方法。这种将解析与数值计算相结合的方法,使数值计算量明显降低,适合微机计算;同时又保留纯数值方法的灵活性与通用性。此类方法适于解决各类科学,特别是高维、奇异、耦合、无限域等复杂问题。

本书系统地阐述了解析与数值结合法的数学基础与基本原理,研究如何选取所应用的解析解与解析函数,如何与离散过程相结合,建立适合用微机计算的计算格式。

本书详细地介绍了一、二、三维结构半解析单元法,具体地给出了板、壳、柱、环、三维体、多层板等结构的解析函数;同时给出了岩土介质、地下结构、流—固耦合、海洋工程、热传导等的半解析分析方法;另外还介绍了边界元法、加权残数法、无限元法、分区耦合法、半解析边界元法、半解析差分法、样条半解析法等方法实施过程。书中还对各种方法的适用范围、优缺点与选用原则作了介绍和对比,同时还给出了一些计算实例。书末还列出了大量文献索引以供读者参考。

本书可供航空、航天、造船、运输、化工、建筑等行业的广大工程技术人员、设计人员和力学工作者学习参考,也可供有关院校师生作为教材使用。

半解析数值方法

曹志远 张佑泉·编著

*

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号)

(邮政编码 100044)

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168毫米 32开本 印张17⁵/₈ 462千字

1992年8月第一版 1992年8月第一次印刷 印数:0001—2000册

ISBN 7-118-00940-7/TH·71 定价:16.80元

致 读 者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分，又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技事业的发展，加强社会主义物质文明和精神文明建设，培养优秀科技人才，确保国防科技优秀图书的出版，国防科工委于1988年初决定每年拨出专款，设立国防科技图书出版基金，成立评审委员会，扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是：

1. 学术水平高，内容有创见，在学科上居领先地位的基础科学理论图书；在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。

2. 学术思想新颖，内容明确、具体、有突出创见，对国防科技发展具有较大推动作用的专著；密切结合科学技术现代化和国防现代化需要的高科技内容的专著。

3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值，密切结合科学技术现代化和国防现代化需要的新技术、新工艺内容的科技图书。

4. 填补目前我国科学技术领域空白的薄弱学科的科技图书。

国防科技图书出版基金评审委员会在国防科工委的领导下开展评审工作，职责是：负责掌握出版基金的使用方向，评审受理的图书选题，决定资助的图书选题和资助金额，以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书，由国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承担着记载和弘扬这些成就，积累和传播科技知识的使命。在改革

开放的新形势下，国防科工委率先设立出版基金，扶持出版科技图书，这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版，随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物，是对出版工作的一项改革。因而，评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进，这样，才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技工业战线广大科技工作者、专家、教授，以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来，为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗！

国防科技图书出版基金
评审委员会

国防科技图书出版基金 第一届评审委员会组成人员

主任委员：邓佑生
副主任委员：金朱德 太史瑞
委 员：尤子平 朵英贤 刘琯德
(按姓氏笔画排列) 何庆芝 何国伟 张汝果
范学虹 金 兰 柯有安
侯 迁 高景德 莫梧生
曾 铎
秘 书 长：刘琯德

11A-28/65.

前 言

半解析数值方法是近年发展起来的科学计算与工程分析方法的一个新的分支。目前, 鉴于纯解析的理论分析方法在数学上的困难, 解决问题十分有限; 而各种纯数值方法(有限元、有限差分法等)又基于全离散原理, 对复杂实际问题输入数据及计算工作量大, 对计算机要求高, 费用可观, 因此将解析与数值方法相结合, 以兼备两者优点的各种半解析数值方法兴起, 成为用计算机求解科学与工程分析问题新的有效手段。这些方法由于引入了解析解的方法与成果, 使数值计算工作量显著降低, 适合微机计算, 可收到显著经济效益; 同时又保留纯数值方法的灵活性与通用性的特点, 易为工程人员所掌握; 而在学术上又普遍适用于以数理方程为基础的各类场科学, 特别是高维、奇异、耦合、无限域等复杂问题; 也是科学研究不同分析手段互相渗透、交叉的一种新的发展趋势。

半解析数值方法是指在数值分析中采用与引入部分解析解或解析函数, 而计算得到的仍是一系列离散化数值结果的分析方法, 其内容与包含的方法及种类是相当广泛的。半解析数值方法将研究解析与数值结合法的数学基础与基本原理, 研究如何选取所应用的解析解与解析函数, 如何与离散化过程相结合, 建立适合上机计算的运算格式, 并实现将复杂工程与学术问题分析计算达到简便、快捷、准确、节省的目的。但目前有关这方面的书籍与资料均局限于某种特定方法叙述或数值方法书籍中个别章节介绍, 并没有涉及半解析数值方法的一般性原理, 各种方法的共同数学基础与相互联系、比较和选择以及可能发展方向与应用前景。本书将对这方面理论与实践进行系统探讨与全面介绍, 是半解析数值方法方面的一本专著。

本书将对半解析数值方法的基本理论，一般性数学基础与原理予以详细论述；对七方面、二十几类、近百种方法与单元及其工程应用给以系统介绍；本书对每种方法除叙述一般性理论、方法与相应公式外，还尽可能给出各种应用算例以及与现有纯解析、纯数值方法在精度与工作量上的比较；书中还以一定篇幅介绍各种方法的优缺点与适用范围及选用原则；此外，还介绍了半解析法近期一些新的理论、方法与进展及可能发展趋势；为便于读者应用，附录中还列出了半解析元法的程序编制要点及有关解析函数与其计算公式；作为进一步研究的参考，书后还专门编辑近 700 篇半解析法文献目录。

本书是本人与国际著名结构与力学专家、香港大学教授张佑启 (Y. K. Cheung) 共同编著，将全面反映国际上半解析法的成果与发展。本书也将充分体现国内各学者在这方面的科研进展，其中一部分是本人近年来和一些兄弟单位共同合作研究成果。对此表示衷心的感谢。书中有所不妥之处，希读者多加指正。

曹志远

1991年6月于同济大学

目 录

第一章 半解析数值方法概论	1
§ 1.1 半解析方法的提出	1
§ 1.2 半解析方法的基本内容	3
§ 1.3 半解析方法的分类	4
§ 1.4 半解析方法的特点	7
第二章 半解析数值方法基础	9
§ 2.1 半解析法的基本理论	9
§ 2.2 半解析解函数	15
§ 2.3 半解析单元法算式建立的一般步骤	34
§ 2.4 基本解及通解	37
§ 2.5 试函数	42
§ 2.6 样条函数与样条插值	43
第三章 一、二维结构的半解析单元法	50
§ 3.1 平板单元	50
§ 3.2 平面单元	60
§ 3.3 剪切单元	61
§ 3.4 平壳单元	63
§ 3.5 柱壳单元	67
§ 3.6 环壳单元	70
§ 3.7 锥壳单元	71
§ 3.8 曲壳单元	74
§ 3.9 扁壳单元	74
§ 3.10 一维单元	77
§ 3.11 等效单元	79
§ 3.12 组合单元	81
§ 3.13 工程应用与算例	82
§ 3.14 稳定分析	87

§ 3.15	几何非线性分析	89
§ 3.16	非线性弹性分析	92
§ 3.17	映射板单元	95
§ 3.18	映射壳单元	99
§ 3.19	混合型半解析单元	103
§ 3.20	等参半解析元	106
§ 3.21	结构的后屈曲分析	112
第四章	三维结构的半解析单元法	115
§ 4.1	柱单元	115
§ 4.2	环单元	118
§ 4.3	层单元	122
§ 4.4	多层板单元	125
§ 4.5	各种三维单元	128
§ 4.6	三维弹塑性分析	134
§ 4.7	准三维结构与非经典结构理论	138
§ 4.8	厚板与厚壳单元	140
§ 4.9	组合结构与复合结构分析	147
第五章	介质的半解析单元法	156
§ 5.1	岩土介质数值分析的基本特点及远场模拟	156
§ 5.2	岩土介质及与结构相互作用问题的半解析单元法	158
§ 5.3	岩土介质的静、动态分析	173
§ 5.4	岩土介质的物理非线性分析	181
§ 5.5	地下结构分析	187
§ 5.6	非匀质地基分析	191
§ 5.7	上部结构-刚性基础-地基耦合分析	199
§ 5.8	柔性基础(结构)与地基耦合分析	204
§ 5.9	桩基分析	210
§ 5.10	路面与筏基分析	218
§ 5.11	半解析数值方法在岩土力学及岩土工程中应用	227
§ 5.12	流体介质及流固耦合的基本方程	229
§ 5.13	内流体的半解析单元	232
§ 5.14	外流体的半解析单元	245
§ 5.15	流体-结构-土体的组合单元	257

§ 5.16	半解析数值方法在海洋工程、水工结构及储液罐分析中应用	263
§ 5.17	热传导与热弹性分析的半解析单元法	269
第六章	边界元法	281
§ 6.1	基本方法	281
§ 6.2	弹性力学问题的边界元法	284
§ 6.3	其它科学分析问题的边界元法	295
§ 6.4	正则边界元法	303
§ 6.5	特解边界元法	304
§ 6.6	加权残数边界元法	306
第七章	加权残数法	308
§ 7.1	基本原理	308
§ 7.2	最小二乘法	311
§ 7.3	配点法	314
§ 7.4	最小二乘配点法	320
§ 7.5	迦辽金法	322
§ 7.6	迦辽金配点法	325
§ 7.7	子域法	327
§ 7.8	子域配点法及最小二乘子域法	329
§ 7.9	矩量法	331
§ 7.10	配线法	333
§ 7.11	加权残数有限元法	335
第八章	无限元法	337
§ 8.1	离散型与半解析型无限元	337
§ 8.2	二维无限元	339
§ 8.3	三维无限元	341
§ 8.4	映射无限元	343
§ 8.5	动力无限元	345
§ 8.6	无限边界元	347
第九章	分区耦合法	350
§ 9.1	分区耦合法概述	350
§ 9.2	有限元—解析解法	352
§ 9.3	有限元—边界元法	362

§ 9.4	有限元—半解析元法	366
§ 9.5	边界元—解析解法	378
§ 9.6	半解析元—边界元法	384
§ 9.7	半解析元—解析解法	389
§ 9.8	加权残数—边界元法	390
§ 9.9	有限元—无限元法	391
§ 9.10	有限元—加权残数法	393
§ 9.11	半解析元耦合法	396
第十章	样条半解析法	401
§ 10.1	样条解函数的构成	401
§ 10.2	样条半解析元法	403
§ 10.3	样条能量法	405
§ 10.4	样条加权残数法	413
§ 10.5	样条边界元法	421
§ 10.6	时域样条法	423
第十一章	其它半解析数值方法	426
§ 11.1	半解析边界元法	426
§ 11.2	半解析加权残数法	444
§ 11.3	半解析差分法	452
§ 11.4	半解析康特洛维奇法	455
§ 11.5	综合离散法	462
§ 11.6	摄动半解析法	467
§ 11.7	屈列弗兹法	475
第十二章	半解析数值方法的应用与发展	479
§ 12.1	半解析方法的重要意义	479
§ 12.2	半解析方法的工程应用	481
§ 12.3	半解析方法的发展前景	482
§ 12.4	结束语	483
参考文献		483
半解析数值方法文献索引		488
附录		529
附录 I	梁函数及其积分值	529

VI

附录 II	单向厚板振型函数	533
附录 III	半解析元法的程序编制要点	536
附录 IV	离散化方程的数值解法	543

第一章 半解析数值方法概论

§ 1.1 半解析方法的提出

自然科学的分析与研究方法，大致可以分为科学实验、理论分析和数值计算三个方面，这三大手段相辅相成，推动着整个社会与科学的进步。但长期以来，在自然科学研究中，这些手段的运用往往是相互独立的，最多是同时进行且相互检验而已。随着科学技术的发展，近年来作为科学研究方法的这三大手段的互相结合和渗透已是一种必然的趋势，这将给自然科学的发展带来新的生命力。本书讨论的半解析数值方法（简称半解析法，又称解析与数值结合法），就是一种理论分析与数值计算相结合的分析研究方法。

半解析数值方法是指分析过程中采用部分解析解或解析函数的数值方法，它是相对目前广泛采用的各种纯数值方法（有限差分法、有限元法等）而言的，是具有广泛含义的一类数理方程的数值解法。这类方法的提出有其一定的历史背景与工程意义。

就以力学而言。力学是一门古老而又不断发展的学科。采用经典的数学分析方法是近百年力学学科发展中一个极为重要的手段。数学与力学这两门学科在很多方面已结为一体并互相促进。正因为这个原因，由于数学方法上进展的缓慢，使得采用纯理论分析方法已无法解决近代大量复杂的工程力学问题，也可以说在20世纪的上半叶，在力学的解法上没有取得什么重大突破。然而50年代兴起的有限单元法，配合了相应的电算技术则为工程力学的发展开创了一个崭新的局面。正如钱令希教授最近指出那样，计算力学的方法正冲击着传统的思考方法，解放了对研究手段的约

束，使得力学可以向更深处探索理论，可以向更广处发展应用，将会使力学的作用产生新的飞跃。

有限单元法之所以有着如此强大的生命力和广阔的应用前景，主要在于方法本身的特点。有限单元法采用物理上离散与分片多项式插值，因此具有广泛的适应性；有限元法基于变分原理，将数理方程求解变成定积分运算和代数方程组或常微分方程组的求解，因此具有明显的简易性；有限元法采用矩阵形式和单元组装方法，因此具有适应于程序编制与用计算机计算的可算性。这三方面的特点就形成了众所周知的有限元法所具有的网格、材料、边界、荷载的灵活性和程序通用性两大优点。当然有限元法之所以受到工程界广泛欢迎，除了其解题能力外，还在于工程人员易于掌握以及目前计算机应用技术的普及。

事物总有其两面性。在有限元法发展初期，其灵活性和通用性的优点及解题能力广受欢迎，取得了巨大进展，可以说这一方法在力学及其它场科学中都得到了一定应用与发展。但随着对有限元法的研究，特别是工程上实际应用的深入，一些问题也随之出现。最突出的是存在所解问题的复杂性和经费、时间以及计算机能力有限之间的矛盾。由于有限元法的特点是不论什么对象和什么问题，均在各方向离散，并一律采用分片低价多项式插值来逼近各类问题的解函数，当然这有通用性强的一面；但又不可避免地带来自由度多、工作量大的不足。随着有限元深入到诸如三维、组合、复合、瞬态、耦合、多相、波动、无限域、非线性等领域，深感其所需单元数、内存与计算工作量十分浩大惊人，造成原则上有限元法都能解决，而实际上由于经费、计算机条件所限，在工程应用上又难以实现的状态。

可以说有限元法及其相应计算力学的发展大致分为两个阶段。在五、六十年代是研究“解决得了”的问题，也就是说讨论有限元法能否应用于各个学科分支领域，而七、八十年代是研究“解决得好”的阶段，即探讨解决工程实际问题的各种改进方法、手段及相应的计算技术。因此，近期的有限元法研究中的大量工作都是

为了实现这一目标的。如有的为了在小机器上计算大问题，有的为了减少内存、加快计算速度，还有的是在一定程度上减少自由度和计算工作量。但集一二十年的经验，人们普遍认为，解决这一问题的一个根本出路在于采用半解析半数值方法。

发展半解析数值方法还有其重要的工程应用意义。目前电子计算机的应用普及已为新技术的发展创造了条件。但结合我国国情和计算机发展的实际情况，国内大部分工程与设计单位只能普及微型机。要使计算技术真正指导生产实践（包括计算机辅助设计、专家系统等），发展以微型机为对象的数值分析方法势在必行。而半解析数值方法就是以在微机上实现复杂问题分析为其目的的。因此，发展半解析数值方法符合我国的实际，并将会取得直接的经济效益。

§ 1.2 半解析方法的基本内容

近百年来已经打下良好基础的应用数学分析方法，由于数值计算技术的蓬勃发展，近年来有所偏废，其应有作用没有得以充分发挥。当然纯解析法的解题范围有限已是明显的事实，但能否充分利用这些已有解析研究成果，来弥补用纯数值方法解决复杂问题的不足呢？实际上，两者的结合正是解决问题的关键所在。如上所述，采用有限元法分析问题并不十分经济的根本原因在于有限元法采用统一的离散及插值模式，而没有针对问题的性质予以区别对待（这正是解析方法的特点），造成数值计算过程中不必要的浪费。因此，利用已有解析研究成果，有针对性地部分替代离散与插值，必将会明显改善纯数值方法的上述不足，并带来显著的经济效益；从另一角度来讲，以前用纯解析方法不能解决的问题，也由于采用部份离散、插值和数值求解而能得到实用的结果。如何实现这一目的，正是半解析数值方法所需研究的基本内容。

就此而言，半解析数值方法包含的方法种类是相当广泛的。

凡是数值分析中采用部份解析解或解析函数而最终得到的是一系列离散化数值结果的分析方法均属于这一范畴。半解析法将主要研究如何选取所应用的解析解或解析函数，如何与离散化过程相结合，如何建立适合计算机计算的运算格式，并实现将复杂工程与科学问题的分析计算达到简捷、准确、节省费用的目的。

半解析数值方法的实质，是充分发挥已有解析方法研究成果以减少纯数值方法的计算工作量。半解析法研究将要重点处理好解析与数值方法两者作用，互相取长补短，发挥各自的特长。一般来说在半解析法中将通过解析手段来帮助减少数值计算的维数，而同时又通过数值离散手段来弥补人为所取解析函数的不足，以逼近真实解。半解析法的研究还要注意处理好人与计算机两者的关系，以各尽所能，相互补充。在纯解析方法中只有人在起作用；在纯数值方法中主要靠计算机来完成分析计算。而半解析数值方法将由人来完成诸如一维解函数、基本解、通解等较为规则、简单情况下理论分析工作，而由计算机来进行降维后的低维离散化方程的求解工作。这种人与计算机间恰当分工将会取得以前用纯解析方法或纯数值方法所不能达到的预期效果。

§ 1.3 半解析方法的分类

半解析数值方法的提出与发展只是近十来年的事，但发展相当迅速，类型众多。形成不同类型方法的原因在于数值分析的不同环节，采用不同方式、引入了不同类型解析解或解析函数造成的。一般认为半解析方法可分为七大类。其中，前四类是基本的，它们的区别在于数值与解析两部份是按什么原则结合起来的，这四类包括分向、分域、分部、分区半解析法。

分向半解析法。是指多维问题的解函数在某些方向上采用解析函数族，而在另一些方向上仍保留离散和插值。若类似一般有限元法进行变分求解，可建立相应低维离散化方程，以大规模简化计算工作量，一般称为半解析单元法。它可分为半解析有限元