齐琼 吴静杰 郭智莲◎主编 褚万霞 张广计◎副主编

经济数学

微积分辅导及习题解答

（上册）

清华大学出版社

齐琼 吴静杰 郭智莲◎主编 褚万霞 张广计◎副主编

经济数学

微积分辅导及习题解答

（上册）

清华大学出版社
北京

内容简介

本书根据清华大学出版社出版的《经济数学——微积分(上册)》编写，分为六章，每章分为四个板块："内容概要"列出了每章的基本概念、重要公式和定理；"典型例题"是从历年考试中学生易错、易失分试题和历年研究生入学考试试题中精选出来的题目，并有详细的解答过程；"本章教材习题解答"对《经济数学——微积分(上册)》的课后习题进行了详细的解答，部分习题附带了注释，旨在帮助读者顺利完成习题的同时能够举一反三，对知识点和计算技巧有具体的认识和掌握；"同步自测题及参考答案"是为读者检查学习效果，提高应试能力而设计的，这部分题目具有阶梯性，通过完成这部分题目，读者可以进一步加深对所学基本概念、基本定理和基本运算技巧的理解和掌握，增强计算能力。

本书可供高等院校经济、管理等文科专业的学生使用，也可供读者自学使用。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学．上册，微积分辅导及习题解答/齐琼，吴静杰，郭智莲主编．—北京：清华大学出版社，2015
ISBN 978-7-302-41168-0

Ⅰ．①经…　Ⅱ．①齐…　②吴…　③郭…　Ⅲ．①经济数学－高等学校－教学参考资料　②微积分－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．①F224.0　②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 184633 号

责任编辑：汪　莉
封面设计：刘　超
版式设计：文森时代
责任校对：毛姗姗
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　印　张：13　　字　　数：227 千字
版　　次：2015 年 10 月第 1 版　　印　　次：2015 年 10 月第1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：28.00 元

产品编号：062464-01

前　　言

微积分是经济、管理等专业的一门非常重要的专业课，也是硕士研究生入学考试的必考科目之一。而本课程的部分内容对有些读者，特别是数学基础薄弱的读者有一定的难度。为了满足广大读者学习的需要，我们根据自己多年的教学经验编写了本书。

本书根据清华大学出版社出版的《经济数学——微积分（上册）》编写，分为六章，每章分为四个板块："内容概要"列出了每章的基本概念、重要公式和定理；"典型例题"是从历年考试学生易错、易失分和历年研究生入学考试试题中精选出来的题目，并有详细的解答过程；"本章教材习题解答"对《经济数学——微积分（上册）》的课后习题进行了详细的解答，部分习题附带了注释，旨在帮助读者顺利完成习题的同时能够举一反三，对知识点和计算技巧有更好的认识和掌握；"同步自测题及参考答案"是为读者检查学习效果、提高应试能力而设计的，这部分题目具有阶梯性，通过完成此部分题目，读者可以进一步加深对所学基本概念、基本定理和基本运算技巧的理解和掌握，增强计算能力。

全书共分六章，第一章、第六章由张广计编写，第二章由郭智莲编写，第三章由齐琼编写，第四章由吴静杰编写，第五章由褚万霞编写。由齐琼、吴静杰、郭智莲担任主编，褚万霞、张广计担任副主编。

本书的编写得到学院领导的大力支持，同时，李进武、徐靓等老师对本书的完成也做了大量的工作，在此表示真诚的感谢！

本书是根据编者的教学实践与经验整理编写的，希望能对学习《经济数学——微积分（上册）》一书的读者有所帮助。不妥之处，恳请读者指正。

编　　者

2015 年 4 月

目　录

第一章　函　　数

内容概要

1. 邻域

称集合$\{x \mid |x-x_0|<\delta,\delta>0\}$为以点 x_0 为中心、δ 为半径的邻域，或简称点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$.

称集合$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$为点 x_0 的去心(或空心)δ 邻域，记作 $U^0(x_0,\delta)$.

通常把区间$(x_0-\delta,x_0)$和$(x_0,x_0+\delta)$分别称为点 x_0 的左邻域和右邻域.

2. 函数概念

设 x,y 是两个变量，D 是一个给定的非空实数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有一个确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域，可记作 $D(f)$.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的取值称为函数 $f(x)$在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$或 $y(x_0)$，$y|_{x=x_0}$. 当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的函数值的全体

$$\{y \mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的值域，记作 $Z(f)$或 Z.

函数从不同的角度可分为单值函数、多值函数、分段函数、显函数、隐函数、复合函数.

3. 函数的简单性质

(1)函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$，则必有$-x\in D$). 如果对于任意

$x\in D$,有

$$f(-x)=f(x) \text{ 或 } f(-x)-f(x)=0$$

恒成立,则称 $f(x)$为偶函数.如果对于任意 $x\in D$,有

$$f(-x)=-f(x) \text{ 或 } f(-x)+f(x)=0$$

恒成立,则称 $f(x)$为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

(2)函数的周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D.如果存在一个非零的数 T,使得对于任意 $x\in D$ 有 $x\pm T\in D$.且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为周期函数,T 称为 $f(x)$的周期.

通常周期函数的周期是指最小正周期.

例如,函数 $\sin x,\cos x,\sec x,\csc x$ 的周期为 2π,$\tan x,\cot x$ 的周期为 π.

若 T 为 $f(x)$的周期,则 kT 也为 $f(x)$的周期(k 为任意非零整数).

若 $f(x)$的周期为 T,则 $f(ax+b)(a\neq 0)$的周期为$\dfrac{T}{|a|}$.

(3)函数的单调性

设函数 $f(x)$在某一区间 I 上有定义.如果对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$在区间 I 上单调增加或单调递增;当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$在区间 I 上单调减少或单调递减.

若 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$在区间 I 上单调不减;

若 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$在区间 I 上单调不增.

(4)函数的有界性

设非空数集 D 是函数 $f(x)$的定义域或定义域的一个子集.如果存在常数 K_1,使得

$$f(x)\leqslant K_1$$

对任意 $x\in D$ 恒成立,则称 $f(x)$在 D 上有上界,而 K_1 称为 $f(x)$在 D 上的一个上界值.

如果存在常数 K_2,使得

$$f(x)\geqslant K_2$$

对任意 $x\in D$ 恒成立,则称 $f(x)$在 D 上有下界,而 K_2 称为 $f(x)$在 D 上的一个下界值.

如果存在正常数 M,使得

$$|f(x)| \leqslant M$$

对任意 $x \in D$ 恒成立,则称 $f(x)$ 在 D 上有界.如果这样的 M 不存在,则称 $f(x)$ 在 D 上无界,即对于任何正数 M,总存在一个值 $x_1 \in D$,使 $|f(x_1)| > M$,那么 $f(x)$ 在 D 上无界.

函数 $f(x)$ 在 D 上有界的充要条件是 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界.

若函数 $f(x)$,$g(x)$ 在数集 D 上均有界,则 $f(x) \pm g(x)$,$f(x)g(x)$ 在 D 上也有界.

若函数 $f(x)$ 在数集 D_1 与 D_2 上分别有界,则 $f(x)$ 在 $D_1 \cup D_2$ 上也有界.

4. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 Z.如果对每一个 $y \in Z$ 有一个确定且满足 $y=f(x)$ 的 $x \in D$ 与之对应,则在 Z 上建立了一个新的函数,即 x 关于 y 的一个函数,把这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$.此时,y 是自变量,x 是因变量.

习惯上用 x 表示自变量,y 表示因变量,因此把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$.

显然 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数.$f^{-1}(x)$ 的定义域是 $f(x)$ 的值域,$f^{-1}(x)$ 的值域是 $f(x)$ 的定义域,它们的图形关于直线 $y=x$ 对称.

函数 $y=f(x)$ 在某一数集 $X(X \subset D(f))$ 上存在反函数的充要条件是 x 与 y 之间的对应关系 f 是一一对应的.

这里"f 是一一对应的"是指:若 $x_1 \neq x_2$,$\forall x_1, x_2 \in X$,则有 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

因为单调函数在其单调区间上的对应关系是一一对应的,所以一般选择在单调区间上建立反函数.

三角函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$ 分别在其单调区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,$[0,\pi]$,$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,$(0,\pi)$ 上建立了各自的反函数:

$$y=\arcsin x, x \in [-1,1], y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y=\arccos x, x \in [-1,1], y \in [0,\pi]$$

$$y=\arctan x, x \in \mathbf{R}, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y=\arccos x, x \in \mathbf{R}, y \in (0,\pi)$$

5. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D,函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z,若 $D \cap Z$ 非空,则称 $y=$

$f[\varphi(x)]$为复合函数.x为自变量,y为因变量,u称为中间变量.

复合函数可以拆分成简单函数,然后通过简单函数来研究复合函数的某些性质.

6. 基本初等函数和初等函数

(1)基本初等函数

常函数(常数)$y=c$.

幂函数 $y=x^{\alpha}$(α可为任意实数).

指数函数 $y=a^{x}$($a>0$且$a\neq1$).

对数函数 $y=\log_{a}x$($a>0$且$a\neq1$).

三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

(2)初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所构成的并可用一个解析式表示的函数称为初等函数.

(3)初等函数的几个结论

如果$f(x)$为初等函数,则绝对值函数$|f(x)|$也为初等函数.

如果函数$u=u(x), v=v(x)$在非空数集D上都为初等函数,且$u(x)>0$,则幂指函数$y=u(x)^{v(x)}$也为初等函数.

如果函数$u=u(x), v=v(x)$在非空数集D上都为初等函数,则取最大值函数$y=\max\{u(x),v(x)\}$与取最小值函数$y=\min\{u(x),v(x)\}$也为初等函数.

典型例题

题型一　求函数的定义域

求函数的定义域有两个基本原则:

(1)函数$y=f(x)$的定义域是使表达式$f(x)$有意义的实数值的全体.

(2)实际问题中,除遵循上述原则外,还需根据问题的实际意义确定函数的定义域.

例 1.1　求函数$y=\sqrt{1-\lg\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}$的定义域.

解：$1-\lg\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\geqslant 0\Rightarrow\lg\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\leqslant 1\Rightarrow 0<1-\dfrac{1}{x}\leqslant 10\Rightarrow$

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{x}>0\\ \dfrac{9x+1}{x}\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\text{定义域为}\left(-\infty,-\frac{1}{9}\right]\cup(1,+\infty).$$

例 1.2　在锐角三角形 ABC 中，$AB=AC=1$，设$\triangle ABC$ 的面积为 x，$\angle A=y$，求函数 $y=f(x)$的定义域.

解：由三角形的面积公式得 $x=\dfrac{1}{2}\sin y$，即 $\sin y=2x$，因为 $0<y<\dfrac{\pi}{2}$，由反正弦函数的定义可得 $y=\arcsin 2x$. 结合实际意义可得该函数的定义域为$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

题型二　函数符号 $f(x)$的运用

(1)由标准函数 $f(x)$推出某一复合函数 $f[\varphi(x)]$.

(2)由复合形式 $f[\varphi(x)]$推出标准形式 $f(x)$.

例 1.3　设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ x^2-1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$.

解：$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1\\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}$.

(1)推出 $\varphi(x)<1$ 的等价条件：

当 $x<0$ 时，$\begin{cases}x<0\\ \varphi(x)<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<0\\ x+2<1\end{cases}\Rightarrow x<-1$；

当 $x\geqslant 0$ 时，$\begin{cases}x\geqslant 0\\ \varphi(x)<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2-1<1\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant x<\sqrt{2}$.

(2)推出 $\varphi(x)\geqslant 1$ 的等价条件：

当 $x<0$ 时，$\begin{cases}x<0\\ \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<0\\ x+2\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow -1\leqslant x<0$；

当 $x\geqslant 0$ 时，$\begin{cases}x\geqslant 0\\ \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2-1\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow x\geqslant\sqrt{2}$.

综上可得

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1\\ x+2, & -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}.$$

例 1.4 已知 $f(e^x)=2^x+3^x$,求 $f(x)$.

解:用换元法求解.令 $t=e^x$,则 $x=\ln t$,$f(t)=2^{\ln t}+3^{\ln t}$,即 $f(x)=2^{\ln x}+3^{\ln x}$.

例 1.5 已知 $f(\sin x+\cos x)=|\sin x-\cos x|$,求 $f(x)$.

解:用换元法求解,令 $t=\sin x+\cos x$,则 $t^2=1+\sin 2x$.

而 $|\sin x-\cos x|=\sqrt{1-\sin 2x}$,所以 $f(t)=\sqrt{2-t^2}$,即 $f(x)=\sqrt{2-x^2}$.

题型三　判断函数的基本性质

用函数奇偶性、周期性、单调性和有界性的定义进行判断.

例 1.6 设在$(-\infty,+\infty)$内 $f(x)$,$\varphi(x)$都有定义,且 $f(x)$为奇函数,$\varphi(x)$为偶函数,则 $f[f(x)]$,$f[\varphi(x)]$,$\varphi[f(x)]$,$\varphi[\varphi(x)]$在$(-\infty,+\infty)$内各为什么函数?

解:$f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)]$,为奇函数.

$f[\varphi(-x)]=f[\varphi(x)]$,为偶函数.

$\varphi[f(-x)]=\varphi[-f(x)]=\varphi[f(x)]$,为偶函数.

$\varphi[\varphi(-x)]=\varphi[\varphi(x)]$,为偶函数.

例 1.7 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内以 $T(T>0)$为周期,证明 $f(ax)$与 $f(ax+b)(a>0)$均以$\dfrac{T}{a}$为周期.

证:$f\left[a(x+\dfrac{T}{a})\right]=f(ax+T)=f(ax)$.得证.

$f\left[a(x+\dfrac{T}{a})+b\right]=f(ax+T+b)=f(ax+b)$.得证.

例 1.8 证明函数 $y=\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2-\dfrac{4x}{1+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$内有界.

证:设 $u=\dfrac{2x}{1+x^2}$.因为 $1+x^2\geqslant 2|x|$,所以$|u|=\dfrac{2|x|}{1+x^2}\leqslant 1$.

由图像可直观判断出 $y=u^2-2u(|u|\leqslant 1)$的取值范围为$-1\leqslant y\leqslant 3$.

故函数 y 有界.

本章教材习题解答

(A)

1. 下列各对函数是不是相同的函数?

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $y=x+1$;

解:不是,因定义域不同.

(2) $y=\ln x^2$, $y=2\ln x$;

解:不是,因定义域不同.

(3) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, $y=\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$;

解:是,因定义域相同,且对应关系相同.

(4) $y=\ln(x^2-1)$, $y=\ln(x+1)+\ln(x-1)$.

解:不是,因定义域不同.

2. 已知 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$,求 $f(x^2)$, $f(1-x)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f[f(x)]$.

解:$f(x^2)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$;

$$f(1-x)=\frac{1-x}{x};$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x-1};$$

$$f[f(x)]=f\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}.$$

3. 已知 $f(2^x)=3^x$,求 $f(x)$ 及 $f(8)$.

解:$f(2^x)=3^x=2^{\log_2 3^x}=2^{x\log_2 3}=(2^x)^{\log_2 3}$,所以 $f(x)=x^{\log_2 3}$.

$f(8)=8^{\log_2 3}=2^{\log_2 27}=27$,或由 $f(2^x)=3^x$ 可得 $f(8)=f(2^3)=3^3=27$.

4. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\tan(\arcsin x)$;

解：因 $|\arcsin x|\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以定义域为 $\{x|x\neq\pm1,x\in\mathbf{R}\}$.

(2) $y=\sec x$;

解：$y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$，所以定义域为 $\left\{x|x\in\mathbf{R},x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(3) $y=\sqrt{\ln\ln x}$;

解：由 $\ln\ln x\geqslant0$ 得 $\ln x\geqslant1$，再推得 $x\geqslant e$. 所以定义域为 $[e,+\infty)$.

(4) $y=\frac{1}{1-\tan x}$.

解：由 $\tan x\neq1$ 推得 $\tan x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}$，所以定义域为 $\left\{x|x\in\mathbf{R},x\neq k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

5. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，求函数 $f(\arctan x)$ 的定义域.

解：由题意可知，$-\frac{\pi}{4}\leqslant\arctan x\leqslant\frac{\pi}{4}$，即 $\arctan(-1)\leqslant\arctan x\leqslant\arctan1$. 由于 $\arctan x$ 为增函数，所以 $-1\leqslant x\leqslant1$，此即为所求的定义域.

6. 画出函数 $y=|x+1|+|x-1|$ 的图形.

解：经讨论，$y=\begin{cases}2x, & x\geqslant1\\ 2, & -1\leqslant x<1\\ -2x, & x<-1\end{cases}$，图形为一条折线(略).

7. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant1\\ x^2-1, & 1<|x|<2\end{cases}$，

求 $f(x-1)$，并根据 $y=f(x-1)$ 的图形判断函数是否有界.

解：

$$f(x-1)=\begin{cases}\sqrt{1-(x-1)^2}, & 0\leqslant x\leqslant2\\ (x-1)^2-1, & -1<x<0 \text{ 或 } 2<x<3\end{cases}.$$

$y=f(x)$ 的图像如图 1-1 所示.

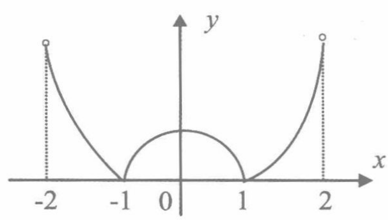

图 1-1

从图像可看出 $f(x)$ 有界，把 $y=f(x)$ 的图像向右平移 1 个单位可得 $y=f(x-1)$ 的图像，显然 $f(x-1)$

也有界.

8. 判断下列函数是否有界.

(1) $y=\frac{5\cos^2 x}{3-\sin 2x}$;

解：由 $-1\leqslant\sin 2x\leqslant 1$ 可推得

$2\leqslant 3-\sin 2x\leqslant 4$. 所以 $\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{3-\sin 2x}\leqslant\frac{1}{2}$，而 $0\leqslant 5\cos^2 x\leqslant 5$，故 $0\leqslant\frac{5\cos^2 x}{3-\sin 2x}\leqslant\frac{5}{2}$，即有界.

(2) $y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$;

解：因 $-\frac{1}{x^2}<0$，所以 $0<\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}<1$，故有界.

(3) $y=\frac{x^2}{1+x^2}$;

解：显然 $\frac{x^2}{1+x^2}\geqslant 0$，又 $\frac{x^2}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}<1$，所以有界.

(4) $y=\frac{x}{4+x^2}$;

解：由不等式 $a^2+b^2\geqslant 2|ab|$（a,b 为任意实数）可得 $4+x^2\geqslant 2|2x|$.

即 $\left|\frac{x}{4+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{4}$，故有界.

9. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}(a>0,a\neq 1)$;

解：$f(-x)=\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\frac{(a^{-x}-1)a^x}{(a^{-x}+1)a^x}=\frac{1-a^x}{1+a^x}=-f(x)$，$\forall x\in\mathbf{R}$.

所以为奇函数.

(2) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$;

解：函数的定义域为 $(-1,1)$，则 $\forall x\in(-1,1)$，恒有

$$f(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=-\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x).$$

所以为奇函数.

(3) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$;

解：当 $x\geqslant 0$ 时，$\sqrt{x^2+1}>x$；当 $x<0$ 时，$\sqrt{x^2+1}>x$. 所以恒有$\sqrt{x^2+1}-x>0$，$\forall x\in\mathbf{R}$. 即函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，
$$\begin{aligned}f(x)+f(-x)&=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)\\&=\ln[(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)]\\&=\ln(x^2+1-x^2)\\&=0\end{aligned}$$

所以为奇函数.

(4) $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & x>0\\ x^3-1, & x<0\end{cases}$.

解：函数的定义域 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

$$f(-x)=\begin{cases}-x^3+1, & -x>0\\ -x^3-1, & -x<0\end{cases}, \text{即 } f(-x)=\begin{cases}-x^3-1, & x>0\\ -x^3+1, & x<0\end{cases}.$$

当 $x>0$ 时，$f(-x)=-x^3-1=-f(x)$；当 $x<0$ 时，$f(-x)=-x^3+1=-f(x)$.

所以为奇函数.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调增加且 $f(x)>0$，试判断下列函数的单调性.

(1) $y=f^2(x)$;

解：$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. 又 $f(x)$ 恒正，所以 $f^2(x_1)<f^2(x_2)$.

所以为增函数.

(2) $y=f(-x)$;

解：$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2\Rightarrow f(-x_1)>f(-x_2)$. 所以为减函数.

(3) $y=\dfrac{1}{f(x)}$;

解：$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. 又 $f(x)$ 恒正，所以可推得$\dfrac{1}{f(x_1)}>\dfrac{1}{f(x_2)}$.

所以为减函数.

(4) $y=f[f(x)]$.

解：$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f[f(x_1)]<f[f(x_2)]$. 所以为增函数.

11. 根据函数 $y=|x(x-2)|$ 的图形确定其单调区间.

解：先画抛物线 $y=x(x-2)$，然后将 x 轴下方的图形沿 x 轴对折，x 轴上方的图形

保持不变,得到 $y=|x(x-2)|$ 的图形. 根据图形可直观判断出单调增区间为 $[0,1]$, $[2,+\infty)$;单调减区间为 $(-\infty,0]$, $[1,2]$.

12. 下列函数哪些是周期函数? 如果是周期函数,写出其周期.

(1) $y=\tan(1-x)$;

解: $T=\dfrac{\pi}{|-1|}=\pi$.

(2) $y=\sec 4x$;

解: $y=\sec 4x=\dfrac{1}{\cos 4x}$,所以 $T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.

(3) $y=x\sin x$;

解: 不为周期函数. 假若为周期函数,设其周期为 $T(T\neq 0)$,则恒有 $(x+T)\sin(x+T)=x\sin x$. 令 $x=0$,可推得 $\sin T=0$, $T=k\pi$(k 为某一整数). 此时恒有 $(x+k\pi)\sin(x+k\pi)=x\sin x$. 令 $x=\dfrac{\pi}{2}$,可得 $\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)\cos k\pi=\dfrac{\pi}{2}$. 当 k 为偶数时,可得 $\dfrac{\pi}{2}+k\pi=\dfrac{\pi}{2}$, $k\pi=0$, $k=0$. 此时 $T=k\pi=0$,矛盾. 当 k 为奇数时,可得 $-\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=\dfrac{\pi}{2}$, $k=-1$. 此时 $T=k\pi=-\pi$,于是恒有 $(x-\pi)\sin(x-\pi)=x\sin x$. 但当 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 时,该等式不成立,又出现矛盾. 所以该函数不为周期函数.

(4) $y=\sin^2 x$.

解: $y=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$,所以 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

13. 求下列函数的反函数.

(1) $y=1-x^3$;

解: 由 $y=1-x^3$ 解得 $x=\sqrt[3]{1-y}$,所以反函数为 $y=\sqrt[3]{1-x}$, $x\in\mathbf{R}$.

(2) $y=\dfrac{x}{x-1}$;

解: 由 $y=\dfrac{x}{x-1}$ 解得 $x=\dfrac{y}{y-1}$,所以反函数为 $y=\dfrac{x}{x-1}$, $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 1$.

(3) $y=\ln(10^x+1)$;

解: 由 $y=\ln(10^x+1)$ 解得 $x=\lg(e^y-1)$,所以反函数为 $y=\lg(e^x-1)$, $x\in(0,+\infty)$.