图 论

陈子岐 朱必文 刘峙山 编

高等教育出版社

图　论

陈子岐　朱必文　刘峙山　编

高等教育出版社

内容提要

本书为图论的入门教材．全书分十章：图的定义和例子，路和圈，树，平面图，匹配，独立集和团，图的着色，有向图，网络流，图的矩阵表示与向量空间．

本书基本概念的陈述准确清晰，定理的证明和内容的编排严谨完整，行文流畅通达．

本书可作为高等学校理科图论课程的选修教材．

图　　论

陈子岐　朱必文　刘峙山　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 7.75　字数 190 000

1990 年5月第1版　1990 年5月第1次印刷

印数 0001—2 450

ISBN7-04-002838-7/O·897

定价 1.90 元

前　言

图论是数学中一个既古老又年轻的分支．欧拉1736年关于柯尼希堡（Königsberg）七桥问题的论文标志着图论的诞生，至今已历时二百五十余年．从二十世纪五十年代开始，由于运筹学、计算机科学等学科的促进，人们对图论产生了浓厚的兴趣．近四十年来，无论就其自身理论的发展还是实际应用的深度和广度来讲，图论正经历着一个蓬勃发展的时期，表现了一切年轻的学科所具有的那种强大的生命力．在国外，图论已成为计算机科学系、运筹系、组合优化系、电机系等系科的基础课程之一，许多学校的数学系也把图论列入选修课的范围．

本书是图论的入门教材．全书共分十章，所涉及的都是图论中最基本、最常见的内容．图论虽然具有明显的直观背景，但作为一个数学分支，它是严谨的．因此，对基本概念我们力求陈述得准确清晰，对定理的证明和内容的编排力求严谨完整，并努力做到行文的流畅通达．除了求最短路的戴克斯特拉（Dijkstra）算法，最优树的克拉斯科（Kruskal）算法等几个常见的算法外，本书很少涉及算法问题．书中还介绍了近年来得到的某些重要而有趣的结果．在2.2节中写进了麦基(Mckee)不久前获得的关于欧拉图的一个新充要条件；4.2节中介绍了由罗伯逊(Robertson)和塞姆尔（Seymour)得到的关于库拉脱夫斯基定理的十分重要的推广；7.3节中介绍了四色问题的历史以及阿佩尔(Appel)和哈肯(Haken)的结果．每一节的后面都附有数目不等的习题，对于某些较繁难的习题给出了提示．

近年来，我们曾多次讲授图论课，参阅了好些国外的教材，书中写进了我们点滴的体会与经验．由于学识有限，经验不足，相信一定有不少的错误与疏漏，我们诚恳希望听到大家的批评意见．

新疆大学张福基教授，郭晓峰副教授仔细审阅了原稿，并提出了许多宝贵意见，谨在此向他们致以深切的谢意。

在本书写作过程中，我们得到内蒙古科学基金的支持，对此深致谢忱。

编　　者

一九八八年秋于呼和浩特

目　录

第一章　图的定义和例子

1.1　基本概念

许多实际问题引出抽象的图的概念. 考虑图 1.1 和 1.2；图 1.1中画出的是某个电网络的一部分，P、Q、R、S、T是线路的连接点；图 1.2 是一个局部的交通图，P、Q、R、S、T 是道路的交汇点，路PS 和 QT 立体交叉.

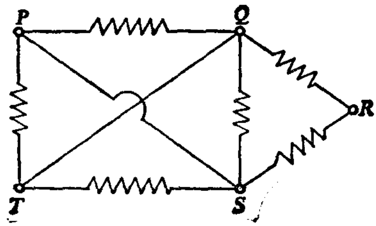


图 1.1

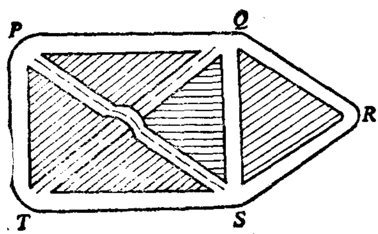


图 1.2

显然，这两个图都可用图 1.3 中的顶点和边之间的关系来表示，这样得到的就是一个图.

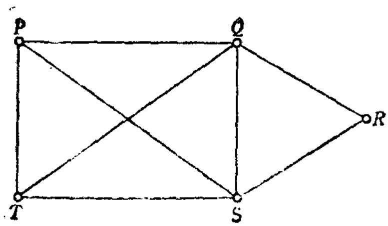


图 1.3

应当注意的是，图 1.3 中的边 PS 和 QT 虽然相交，但它们的交点并不是图的顶点. 这是因为 PS 和 QT 的交点不与图 1.1 中线路的连接点或 1.2 中道路的交汇点相对应. 图 1.3 中描述的情形还可给以其它的解释：例如，顶点 P、Q、R、S、T 可以看成五个人，两顶点间有边相连表示两人相互认识(因此，P 和 Q 认识，但 P 和 R 却不认识)；顶点 P、Q、R、S、T 也可以看成五支球队，两顶点间有边相连表示两个球队间有一场比赛. 等等.

上面谈到的各种情况显然也可用图 1.4 来描绘. 这时边 PS 画在矩形 $PQST$ 之外，从而 PS 和 QT 不相交. 我们感兴趣的是在哪些点之间有边相连，至于度量性质，例如边到底是直线还是曲线，边的长度等等却是无关紧要的.

一般说来，如果我们感兴趣的是一些对象的两两间存在的某

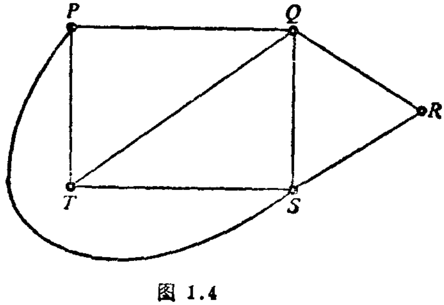


图 1.4

种关系，那么这些对象及对象间的这种关系就可以抽象成一个图．以下正式给出图的定义．

图 G 是指一个有序的三元组 $(V(G),\ E(G),\ \Psi_G)$，这里的 $V(G)$ 和 $E(G)$ 是互无公共元素的集合且 $V(G)$ 非空，Ψ_G 称为关联函数，它使 $E(G)$ 中的每一个元素对应于 $V(G)$ 中元素的无序偶（偶中的元素可能相同）．$V(G)$ 称为图 G 的顶点集，其中的元素称为图 G 的顶点．$E(G)$ 称为图 G 的边集，其中的元素称为图 G 的边．如果 $\Psi_G(e)=\{u,v\}$，即 Ψ_G 使边 e 与顶点的无序偶 $\{u,v\}$ 相对应，则称边 e 连接 u 和 v，而 u 和 v 称为 e 的端点．我们用例子来说明图的概念．

例 1 $G=(V(G),E(G),\Psi_G)$

$$V(G)=\{u,v,w,x\}$$

$$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9\}$$

$$\Psi_G(e_1)=\{u,v\},\Psi_G(e_2)=\{v,v\},\Psi_G(e_3)=\{v,v\}$$

$$\Psi_G(e_4)=\{v,w\},\Psi_G(e_5)=\{v,w\},\Psi_G(e_6)=\{u,w\}$$

$$\Psi_G(e_7)=\{u,w\},\Psi_G(e_8)=\{u,w\},\Psi_G(e_9)=\{w,x\}$$

G 是有四个顶点九条边的图．如果顶点用小圆圈来表示，而边用连接两个顶点的一条线来表示，就可以形象地把图描绘出来（图 1.5）．

为简单起见，把 $\Psi_G(e)=\{u,v\}$ 简化为 $e=uv$，表示 e 是以 u 和

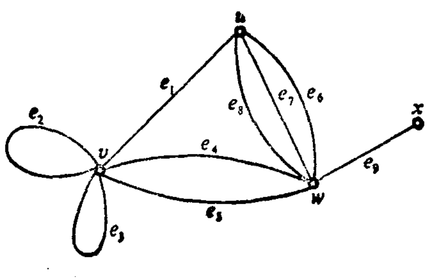


图 1.5

v 为端点的边. 两个端点重合的边 $e=vv$ 称为顶点 v 上的一个环. 端点不同的边称为连杆. 例 1 中 e_2、e_3 是顶点 v 上的环,而其余的边全是连杆. 例 1 中形如 vw 的连杆不止一个,这时称有重边连接 v 和 w. 如果形如 uv 的连杆在图 G 中总共有 k 个,则称有 k重边连接 u和 v. 例 1 中有 2 重边连接 v和 w ,有3重边连接 u 和w.

为了书写方便,下文中通常把图 $G=(V(G),E(G),\Psi_G)$简记为$G=(V(G),E(G))$,这时只需把 $E(G)$中的边用它的两个端点表示出来. 用这种表示方法,例 1 中的图可以记为

$$G=(V(G),E(G))$$
$$V(G)=\{u,v,w,x\}$$
$$E(G)=\{uv,vv,vv,vw,vw,uw,uw,uw,wx\}$$

需注意的是,在这种记号下 $E(G)$中有些边重复出现,例如在例 1 的情形 uw 出现 3 次,这表示图 G 中共有 3 条以 u 和 w 为端点的边,或有 3 重边连接 u 和w.

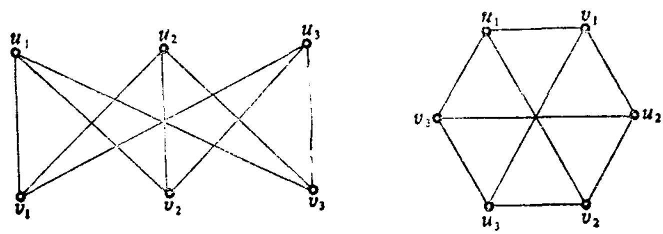
正如例 1 中的图可以用图1.5中的图形来描绘那样,只要把图的顶点用平面上的点(通常用小圆圈标记)来表示,而图的边用连接对应的点的线来表示,就得到图的图形. 图论中的许多术语都是从图的这种图形表示自然引出的. 图的图形表示使得抽象定义的图具有直观性,有助于我们进行思考和理解图的性质. 显然,同一个图可以有许多外表不同的图形表示. 考虑

例 2 $G=(V(G),E(G))$

$$V(G)=\{u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3\}$$
$$E(G)=\{u_1v_1,u_1v_2,u_1v_3,u_2v_1,u_2v_2,u_2v_3,\ u_3v_1,\ u_3v_2,\ u_3v_3\}$$

图 1.6 中的两个图形都是例 2 中的图的图形表示.

我们经常把图和代表它的图形等同起来,称图形中的点为图



(a) (b)

图 1.6

的顶点，图形中的连线为图的边.[注]

如果图的顶点集和边集都只含有限多个元素，则称图 G 是**有限图**. 如果不特别声明，本书中所指的图都是允许有重边和环的有限图.

如果图中没有重边和环，则称为**简单图**. 图 1.7 就是一个简单图，它的顶点集是$\{u,v,w,x\}$，而边集是$\{uv,vw,wu,wx\}$. 在多数情况下图论中研究的都是简单图.

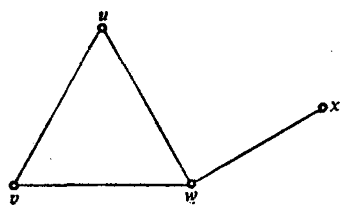


图 1.7

如果顶点 v 和 w 是图 G 中某一条边的两个端点(即 G 中有形如 vw 的边)，则我们说 v 和 w **相邻**. 如果顶点 u 是边 e 的端点，则称顶点 u 和边 e **关联**，同时也称边 e 和顶点 u **关联**. 如果图中的两条边有相同的顶点，则我们说这两条边是**相邻**的.

集合 S 的基数用 $|S|$ 表示；当 S 有限时，$|S|$ 表示 S 中元素的个数.

[注] 在画一个图的图形的时候，约定代表图的边的曲线不自交且不通过图中不是这条边的端点的其它的顶点，显然这总是可以办到的.

用 $\nu(G)$ 和 $\varepsilon(G)$ 分别表示图 G 的顶点数和边数，即 $\nu(G)=|V(G)|$，$\varepsilon(G)=|E(G)|$．$\nu(G)$ 又称为图的阶．本书中字母 G 一般用来表示图．如果叙述中只涉及一个图，这个图一般记成 G．在不引起混淆的场合，$V(G)$、$E(G)$、$\nu(G)$、$\varepsilon(G)$ 分别简记为 V、E、ν、ε．

图 G 的顶点 v 的度定义为和 v 相关联的边的数目，记为 $d_G(v)$．在不致混淆的场合，简记为 $d(v)$．顶点 v 上的一个环相当于与 v 关联的两条边，因此约定它对顶点 v 的度的贡献为 2．对于例1中的图（参看图 1.5）$d(u)=4$，$d(v)=7$，$d(w)=6$，$d(x)=1$．满足 $d(v)=1$ 的顶点称为悬挂点．满足 $d(v)=0$ 的顶点称为孤立点．以 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 记图 G 中顶点的度的最大值和最小值，分别称为 G 的最大度和最小度．最大度和最小度简记为 Δ 和 δ．对于例 1 中的图 G，$\delta(G)=1$，$\Delta(G)=7$，点 x 是悬挂点．

图 G 的每一条边都有两个端点，因此任一条边对它的两个端点的度各贡献 1（点 v 上的环对点 v 的度的贡献为 2），从而任何一条边对于图 G 的各个顶点的度的总和的贡献为 2．因此得到

定理 1.1 $\sum\limits_{v\in V} d(v)=2\varepsilon$，

即图 G 的各个顶点的度的总和等于边数的 2 倍．这个定理有时也称为握手引理，这是由于如果把图中的顶点理解为参加某个集会的成员，把一条边理解为它的两个端点代表的成员握过一次手．那么定理 1.1 中等式的左端表示按每人计算的握手次数的总和，右端则表示集会上总共的握手次数的 2 倍．（握手一次表示集会中的两个人相互握手一次．）

由定理 1.1 可以得到

推论 1.2　任何图 G 中度为奇数的顶点的数目为偶数．

证　以 V_1 和 V_2 分别表示图 G 中度为奇数和偶数的顶点的集合．由于

$$\sum_{v\in V_1} d(v)+\sum_{v\in V_2} d(v)=\sum_{v\in V} d(v)=2\varepsilon$$

为偶数，又因 $\sum_{v\in V_2} d(v)$ 为偶数，故 $\sum_{v\in V_1} d(v)$ 也是偶数，于是 $|V_1|$ 是偶数. □.

现在引进图同构的概念. 如果能够在图 G_1 和 G_2 的顶点集 $V(G_1)$ 和 $V(G_2)$ 之间建立一一对应关系，使得连接 G_1 的任何一对顶点的边的数目与连接 G_2 中与之相应的一对顶点的边的数目相同，则称 G_1 和 G_2 是同构的，而前述顶点间的一一对应称为 G_1 与 G_2 间的同构对应. 例如，图 1.8 中的 G_1 与 G_2 就是两个同构的图.

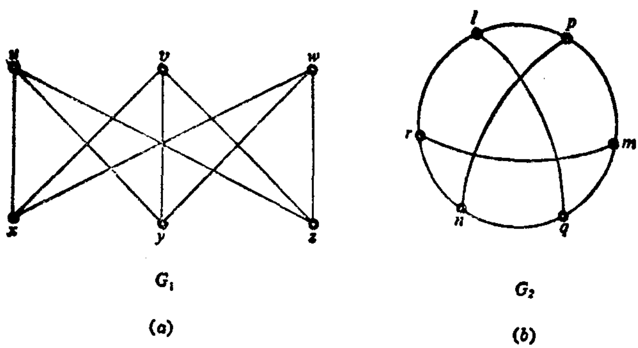


图 1.8

事实上 $u\leftrightarrow l, v\leftrightarrow m, w\leftrightarrow n, x\leftrightarrow p, y\leftrightarrow q, z\leftrightarrow r$ 就是 G_1 与 G_2 间的同构对应. 两个同构的图实质上是一样的，只是顶点和边的标记不同. 图 G_1 和 G_2 同构记为 $G_1\cong G_2$.

如果图 H 和 G 满足 $V(H)\subseteq V(G)$，$E(H)\subseteq E(G)$，则称图 H 是图 G 的子图，而 G 是 H 的母图，记为 $H\subseteq G$. 如果 $H\subseteq G$，又 $H\neq G$，则称 H 是 G 的真子图，记为 $H\subset G$. 如果 $H\subseteq G$，又 $V(H)=V(G)$，则我们说 H 是 G 的支撑子图，而 G 是 H 的支撑母图. 如果去掉图 G 中的一切环，又若 G 中有重边，对于连接任

何一对顶点的重边，除保留一条外，去掉重边中余下的一切边，这样得到的图 G 的简单子图 H 称为图 G 的**底图**. 图1.7就是图1.5的底图.

任何一个图 G 都有一个 $\nu\times\varepsilon$ 矩阵与它对应，称为图 G 的**关联矩阵**. 把 G 的顶点记为 v_1、$v_2,\cdots,v_\nu$，G的边记为 $e_1,e_2,\cdots,e_\varepsilon$，则 G 的关联矩阵 $\boldsymbol{M}(G)=[m_{ij}]$中 i 行 j 列处的元素 m_{ij} 表示顶点 v_i 与边 e_j 关联的次数.即如果 e_j 与 v_i 不关联，则 $m_{ij}=0$；如果 e_j 是一条连杆且与 v_i 关联，则 $m_{ij}=1$；如果 e_j 是 v_i 上的环，则$m_{ij}=2$.

邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)=[a_{ij}]$是另一个和图$G$有关的矩阵. 这是一个 $\nu\times\nu$ 矩阵，a_{ij} 是连接顶点 v_i 和 v_j 的边数.例 1 中的图(图1.5)的关联矩阵和邻接矩阵分别为

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
u	1	0	0	0	0	1	1	1	0
v	1	2	2	1	1	0	0	0	0
w	0	0	0	1	1	1	1	1	1
x	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$\boldsymbol{M}(G)$

(a)

	u	v	w	x
u	0	1	3	0
v	1	2	2	0
w	3	2	0	1
x	0	0	1	0

$\boldsymbol{A}(G)$

(b)

图 1.9

我们已经引进了好些与图有关的基本定义，在结束这一节的时候介绍一个可借助于图的概念求解的有趣的问题.

有四个大小一样的立方体，记为 C_1、C_2、C_3、C_4. 又 Y、R、B、G 分别表示黄、红、蓝、绿四种颜色. 假定立方体的六个面都染上了这四种颜色中的某一种颜色，又每一立方体上四种颜色全都出现. 考虑下面的问题：怎样把立方体一个一个地叠起来使之成为一个底为正方形的四棱柱，要求棱柱的每一侧面都由黄、红、蓝、绿四种颜色的面拼凑而成.

首先指出，不是在任何情况下上述问题都有解．例如把每个立方体中有公共顶点的某三个面都染成红色，其余的三个面染成黄、蓝、绿，则无论怎样叠放立方体，棱柱的侧面上将出现八块红色的正方形，而满足要求的棱柱的侧面只可能出现四块红的正方形，因此这时不可能有解．以下是在解存在的假定下来求解．

如果只凭试验而无一定的指导原则，要叠出合乎要求的棱柱是非常困难的．最下层的立方体共有三种不同的摆法（设想立方体有上下、左右、前后三条轴，这三种摆法各相当于取这三条轴中的一条与放置立方体的平面垂直），而对于放在上层的三个立方体，每一个有 24 种放法（立方体有六个面，每一个面都可以放来与下一层立方体的顶面叠合，此外还可通过旋转得到四种不同的放法），因此，一共有 $3\times24^3=41472$ 种不同的叠置方法．显然，只凭试验很难找到答案．

为了求出问题的解，每一个立方体的染色方式用一个四顶点的图来表示，这四个顶点分别记为Y、R、B、G（即黄、红、蓝、绿）．两顶点间有边相连的充要条件是立方体中恰有一对平行的面的颜色正好是这两个顶点所代表的颜色．因此每一个立方体对应于一个恰有三条边的图．图 1.10 中画出四个已染色的立方体和与它们分别对应的图；图 1.10 中与立方体 C_i 对应的边给以编号 i ($1\leqslant i\leqslant4$)．把 1.10 中的四个图叠放在一起，即得图 1.11.

设想已经得到问题的解．考虑棱柱相对的两个侧面，共由八个正方形组成，分属于四个立方体，且每个立方体恰有两个平行的正方形（面）属于这一对侧面．棱柱的每一个侧面恰由Y、R、B、G四色的正方形组成．棱柱的这一对侧面在图1.11中对应于一个由编号为 1、2、3、4 的四条边构成的支撑子图，且每一个顶点的度为 2．棱柱的另一对侧面也对应于这样的一个子图.

反之不难看出：如果与四个立方体相伴随的图中有两个互无公共边的支撑子图，每一个支撑子图都由编号为 1、2、3、4 的四条

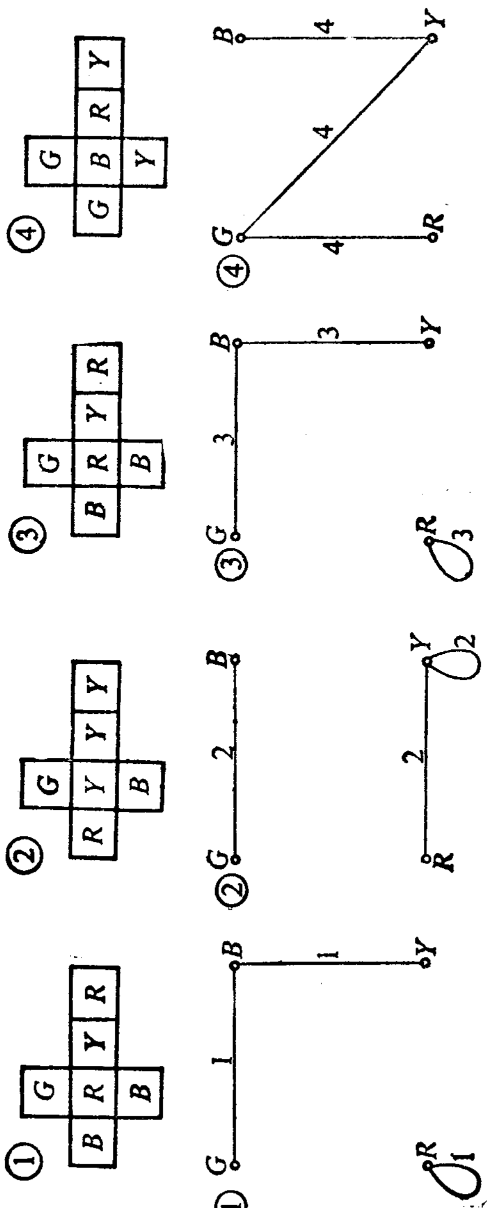


图 1.10