概率论与数理统计

PROBABILITY AND
MATHEMATICAL STATISTICS

杨鹏飞 ◎编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

概率论与数理统计

PROBABILITY AND
MATHEMATICAL STATISTICS

杨鹏飞 ◎编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/杨鹏飞编著; —北京: 北京大学出版社, 2016. 10
ISBN 978-7-301-27644-0

Ⅰ.①概… Ⅱ.①杨… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材
Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 243593 号

书　　名	概率论与数理统计 Gailülun yu Shuli Tongji
著作责任者	杨鹏飞　编著
责 任 编 辑	潘丽娜
标 准 书 号	ISBN 978-7-301-27644-0
出 版 发 行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址	http://www.pup.cn　　新浪微博　@北京大学出版社
电 子 信 箱	zpup@pup.cn
电　　话	邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
印 刷 者	北京宏伟双华印刷有限公司
经 销 者	新华书店
	787 毫米×1092 毫米　16 开本　16.75 印张　280 千字
	2016 年 10 月第 1 版　2016 年 10 月第 1 次印刷
定　　价	32.00 元

内 容 简 介

本书是概率论与数理统计课程教材，全书共分九章，前五章介绍了概率论的基本内容：随机事件与概率，随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律及中心极限定理. 后四章为数理统计的内容，包括样本及抽样分布，参数估计，假设检验，回归分析及方差分析.

本书根据全国高等教育理工科“概率论与数理统计”教学的基本要求，同时为满足高等理工科学校对公共基础课程教材“面向全体”“降低维度”“增加应用”的原则，在课程内容选取、编排等方面进行探索，融合作者在北京理工大学任教十余年的教学经验编写而成.

本书得到了北京理工大学数学与统计学院概率论与数理统计教研组领导的肯定和同事的帮助.

本书内容难度适中，可作为普通高等院校理工科类学生的概率论与数理统计课程教材或教学参考书，也可作为工程技术人员的参考用书.

作 者 简 介

杨鹏飞，北京理工大学数学与统计学院教师，从事概率论和随机过程的教学与科研工作，主讲的课程有概率论，概率论与数理统计，应用随机过程，应用时间序列分析等.

前　　言

概率论与数理统计是研究随机现象数量规律的数学学科, 在科学、工程、管理、经济与人文等领域有广泛的应用. 本书根据教育部数学与统计学教学指导委员会最新修订的工科类本科生“概率论与数理统计课程教学基本要求”, 结合北京理工大学概率统计系的教师和编者多年教学的实践经验编写而成.

本书的先修知识为微积分和线性代数, 在编写中, 强调基本概念准确, 叙述清楚, 在工科本科生数学知识的范围内, 论述尽可能严谨. 同时, 对基本概念、重要公式和定理注重其实际意义的解释说明, 力求通俗易懂. 另外, 除了概率论与数理统计的基本内容之外, 本书还力图通过较多的例子和习题介绍概率论与数理统计的众多应用领域.

全书共分九章, 包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析等内容.

本书在编写过程中, 得到北京理工大学数学与统计学院领导和概率统计系教师的诸多帮助, 在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限, 书中的错误和不妥之处, 恳请读者提出批评和指正.

杨鹏飞

2016 年 6 月

目　录

第一章 随机事件与概率

在自然界和人类社会生活中普遍存在两类现象, 一类是在一定条件下必然发生的现象, 称为**确定性现象**. 例如, 在生活中, 水加热到 $100\,^\circ\mathrm{C}$ 时一定会沸腾; 同性电荷一定互相排斥; 等等. 另一类是在一定条件下可能发生也可能不发生的现象, 称为**随机现象**. 例如, 在相同条件下掷硬币, 结果有可能出现正面也可能出现反面; 抛掷一枚骰子, 出现的点数可能是 1 至 6 中的某一个; 从一批产品中任取一个, 可能是正品, 也可能是次品, 其结果具有偶然性. 但人们经过长期实践并深入研究之后, 发现这类现象在大量试验或观察中, 它的结果呈现出某种数量规律性. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象这种数量规律性的一门数学学科, 其理论和方法被广泛地应用于自然科学、社会科学、工程技术和经济管理等诸多领域.

§1.1 样本空间与随机事件

§1.1.1 随机试验与样本空间

为了研究和揭示随机现象的统计规律性, 需要对随机现象进行大量重复观察和试验. 对随机现象进行一次观察和试验, 称为**随机试验**, 简称为**试验**, 用 E 表示. 下面举几个随机试验的例子:

E_1: 抛一枚硬币, 观察出现的结果是正面朝上还是反面朝上;

E_2: 掷一颗骰子, 观察出现的点数;

E_3: 将一枚硬币抛掷三次, 观察出现正面的次数;

E_4: 记录某热门网站在一段时间内的登录次数;

E_5: 在微信中发一个限定金额的红包, 记录它被抢完所用的时间.

从上面的几个例子我们可以看到随机试验的共同特点是:

(1) 可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个, 并且在试验之前能明确知道所有的可能结果;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

对于随机试验, 尽管在每一次试验之前不能预知试验的结果, 但试验的所有可能结果是已知的. 我们将试验 E 的所有可能结果全体构成的集合, 称为**样本空间**, 用 Ω 表示, 试验的每一个可能结果称为一个**样本点**(或**基本事件**), 用 ω 表示, 即

$$\Omega = \{\omega \mid \omega \text{ 为 } E \text{ 的样本点}\}.$$

下面给出前面的试验所对应的样本空间.

例 1 试验 E_1: 抛一枚硬币, 观察出现的结果是正面朝上还是反面朝上. 令 ω_1 表示"正面朝上", ω_2 表示"反面朝上", 则试验 E_1 的样本空间为

$$\Omega_1 = \{\omega_1,\ \omega_2\}.$$

例 2 试验 E_2: 掷一颗骰子, 观察出现的点数. 令 ω_i 表示"出现 i 点", 则试验 E_2 的样本空间为

$$\Omega_2 = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6\}.$$

例 3 试验 E_3: 将一枚硬币抛掷三次, 观察出现正面的次数. 令 ω_i 表示"正面出现 i 次", 则试验 E_3 的样本空间为

$$\Omega_3 = \{\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\}.$$

也可以简记为 $\Omega_3 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

例 4 试验 E_4: 记录某热门网站在一段时间内的登录次数, 则样本空间为

$$\Omega_4 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots\}.$$

例 5 试验 E_5: 在微信中发一个红包, 记录它被抢完所用的时间, 则样本空间为

$$\Omega_5 = \{t \mid t \geqslant 0\}.$$

§1.1.2 随机事件

在一次试验中, 人们经常关心试验结果中一些特定部分是否发生. 例如, 在例 2 中人们可能关心的是“点数大于 4”, 满足这个条件的样本点形成 Ω_2 的一个子集 $A=\{\omega_5,\ \omega_6\}$; 类似地, 在例 4 中人们可能关心的是“登录次数超过 10 万”, 满足这个条件的样本点形成 Ω_4 的一个子集 $B=\{10^5+1,\ 10^5+2,\ 10^5+3,\cdots\}$. 我们把试验可能结果中某一确定的部分称为**随机事件**(简称为**事件**). 事件是由一部分样本点组成的, 它是样本空间 Ω 的子集, 一般用大写字母 A, B, C 等来表示.

在一次试验中, 称事件 A 发生是指 A 中有一个样本点发生 (或出现), 事件 A 发生也称为事件 A 出现. 在例 2 中, 设 A 表示“点数大于 4”, 则 $A=\{\omega_5,\ \omega_6\}$. 在一次试验中, 如果 ω_5 或 ω_6 出现, 则 A 发生; 如果 ω_1, ω_2, ω_3 或 ω_4 出现, 则 A 不发生.

样本空间 Ω 本身也是 Ω 的子集, 它包含所有的样本点, 在每一次试验中肯定发生, 称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 也是 Ω 的子集, 它不包含任何样本点, 在每次试验中肯定不发生, 称为**不可能事件**.

§1.1.3 随机事件的关系与运算

在一个试验中, 通常有很多随机事件. 这些随机事件有些比较简单, 有些比较复杂. 我们希望用简单的事件来研究复杂的事件, 这就需要讨论事件的关系与事件的运算. 由于事件是样本空间的子集, 因而事件之间的关系及运算就按照集合的关系及运算来处理, 关键是要理解事件的关系运算与集合的关系运算之间是如何对应的.

设试验 E 的样本空间为 Ω, A, B, $A_1,A_2,\cdots$ 为 E 中的事件.

(1) 若事件 A 发生必然导致 B 发生, 则称事件 B **包含**事件 A, 或事件 A **包含于**事件 B, 记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

(2) 若 $A\subset B$, 且 $B\subset A$, 则称事件 A 与事件 B **相等**, 记为 $A=B$, 这时 A 和 B 是样本空间的同一个子集.

(3) 如果事件 A 与事件 B 中至少有一个发生, 则称这样的一个事件为事件 A 与事件 B 的**和事件**或**并事件**, 记为 $A\cup B$ 或 $A+B$, 即

$$\begin{aligned}A\cup B=&\{A\text{ 与 }B\text{ 中至少有一个发生}\}=\{A\text{ 发生或 }B\text{ 发生}\}\\=&\{\omega|\omega\in A\text{ 或 }\omega\in B\}.\end{aligned}$$

类似地, 称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的**和事件**, 事件 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 发生就

是“$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生”; 称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的**和事件**, 事件 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 发生就是“$A_1, A_2, \cdots$ 中至少有一个发生”.

(4) 如果事件 A 与事件 B 同时发生, 则称这样的一个事件为事件 A 与事件 B 的**积事件或交事件**, 记为 AB 或 $A \cap B$, 即

$$
\begin{aligned}
AB = A \cap B &= \{A \text{ 与 } B \text{ 同时发生}\} = \{A \text{ 发生且 } B \text{ 发生}\} \\
&= \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}.
\end{aligned}
$$

类似地, 称 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$(或 $A_1 A_2 \cdots A_n$) 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**积事件**, 事件 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 发生就是“$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生”; 称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的**积事件**, 事件 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 发生就是“$A_1, A_2, \cdots$ 同时发生”.

(5) 如果事件 A 发生并且事件 B 不发生, 则称这样的一个事件为事件 A 与事件 B 的**差事件**, 记为 $A - B$, 即

$$
A - B = \{A \text{ 发生且 } B \text{ 不发生}\} = \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}.
$$

(6) 如果事件 A 和事件 B 在同一次试验中不能同时发生, 即 $A \cap B = \varnothing$, 则称事件 A 与事件 B **互不相容或互斥**.

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个在同一次试验中不能同时发生, 即 $A_i \cap A_j = \varnothing$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$, 则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **互不相容或两两互斥**. 类似地, 如果可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 中任意两个在同一次试验中不能同时发生, 即 $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i, j \geqslant 1$, $i \neq j$,, 则称事件 $A_1, A_2, \cdots$ **互不相容或两两互斥**.

(7) 如果 $A \cup B = \Omega$, 且 $A \cap B = \varnothing$, 则称事件 A 与事件 B 为**对立事件或逆事件**, 记为 $B = \overline{A}$ 或 $A = \overline{B}$. 显然有 $\overline{A} = \Omega - A$, $A = \overline{\overline{A}}$. 在每次试验中, 事件 A, $\overline{A}$ 中必有一个发生, 且仅有一个发生.

(8) 如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥, 且 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$, 则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为**完备事件组** 或称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 的一个**划分**.

上述关于事件的各种关系与运算可以直观地用图形来表示 (见图 1.1).

由于事件的运算就是集合的运算, 因而事件的运算有如下的一些法则:

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A,\quad AB=BA$;

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\quad (AB)C=A(BC)$;

(3) 分配律 $(A\cup B)C=(AC)\cup(BC),\quad (AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$;

(4) 吸收律 若 $A\subset B$, 则 $A\cup B=B,\quad AB=A$;

(5) 德摩根 (De Morgan) 律 (对偶律) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\quad \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

以上性质对多个事件, 甚至可列个事件也成立.

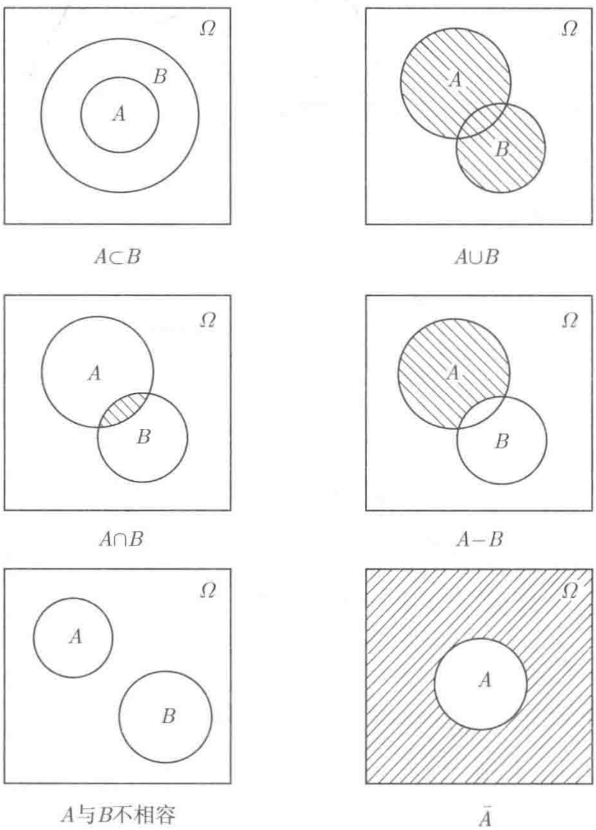

图 1.1 事件的关系与运算

例 6 在图书馆中随意抽取一本书, 事件 A 表示"数学书", 事件 B 表示"中文书", 事件 C 表示"平装书". 问事件 $AB\overline{C}$ 和关系 $\overline{C}\subset B$ 的含义分别是什么?

解 事件 $AB\overline{C}$ 是事件 A 和 B 同时发生并且 C 不发生, 因而表示抽取的是"精装中文版数学书". 而关系 $\overline{C}\subset B$ 意味着事件 C 不发生必然导致 B 发生, 因

而表示“精装书都是中文书”.

例 7 一射手向目标射击三发子弹, A_i 表示“第 i 次射击打中目标”$(i=1,2,3)$. 试用 A_1, A_2, A_3 及其运算表示下列事件:

(1) “三发子弹都未打中目标”;

(2) “三发子弹至少有一发打中目标”;

(3) “三发子弹恰好有一发打中目标”;

(4) “三发子弹至多有一发打中目标”.

解 用 A, B, C, D 分别表示所述的事件, 则有

(1) 事件 A 发生, 意味着“第一发子弹未打中”, “第二发子弹未打中”和“第三发子弹未打中”这三个事件同时发生了, 故

$$A=\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ \overline{A}_3.$$

(2) 事件 B 发生, 意味着“第一发子弹打中”, “第二发子弹打中”和“第三发子弹打中”这三个事件至少有一个发生了, 故

$$B=A_1\cup A_2\cup A_3.$$

(3) 事件 C 发生, 意味着三发子弹中有一发打中, 并且另外两发未打中, 因此

$$C=(A_1\ \overline{A}_2\ \overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1\ A_2\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ A_3).$$

(4) 事件 D 发生有两种情况, 或者是“三发子弹都未打中目标”, 或者是“三发子弹恰好有一发打中目标”, 因此

$$\begin{aligned}D&=A\cup C\\&=(\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ \overline{A}_3)\cup(A_1\ \overline{A}_2\ \overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1\ A_2\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ A_3).\end{aligned}$$

例 8 化简事件 $\overline{(\overline{A}\ \overline{B}\cup C)\overline{AC}}$.

解 利用事件的运算法则, 我们有

$$\begin{aligned}\overline{(\overline{A}\ \overline{B}\cup C)\overline{AC}}&=\overline{\overline{A}\ \overline{B}\cup C}\cup(AC)=\overline{\overline{A}}\ \overline{\overline{B}}\ \overline{C}\cup(AC)\\&=(A\cup B)\overline{C}\cup(AC)=(A\overline{C})\cup(B\overline{C})\cup(AC)\\&=\big(A(\overline{C}\cup C)\big)\cup(B\overline{C})=(A\Omega)\cup(B\overline{C})\\&=A\cup(B\overline{C}).\end{aligned}$$

§1.2 概率的定义及其计算

在大量重复随机试验时, 会发现有些事件发生的次数多一些, 有些事件发生的次数少一些. 也就是说, 有些事件发生的可能性大一些, 有些事件发生的可能性小一些. 很自然地, 我们希望用一个数字来表示事件发生可能性的大小, 较大的可能性用较大的数, 较小的可能性用较小的数, 这个数字就是随机事件的概率.

§1.2.1 频率

对于给定的事件, 究竟用哪个数字作为它的概率才符合实际呢? 在许多情况下, 我们需要通过大量重复试验, 来考察相应的统计规律性.

定义 1.1 设在相同条件下进行的 n 次试验中, 事件 A 发生了 n_A 次, 则称 n_A 为事件 A 发生的**频数**, 称 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**, 记作 $f_n(A)$, 即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

由定义, 易见频率具有下述基本性质:

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) $f_n(\Omega)=1$;

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是互不相容的事件, 则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

事件 A 的频率反映了 A 发生的频繁程度, 频率越大, 事件 A 发生越频繁, 这意味着 A 在一次试验中发生的可能性就大. 反之亦然.

显然, 事件 A 的频率在不同的 n 次试验中会不尽相同. 然而, 人们通过实践发现, 当试验的次数 n 很大时, 事件 A 发生的频率总会在某个确定的数值附近摆动, 频率的这种性质称为频率的稳定性, 它是事件本身所固有的.

历史上有不少人通过投掷硬币的试验验证频率的稳定性, 表 1.1 列出了他们的试验结果:

表 1.1

试验者	抛投次数	正面朝上的次数	正面朝上的频率
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
费歇尔	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

从上述数据可以看出：当抛硬币次数 n 较小时，频率的随机波动幅度较大. 但是，随着抛掷次数 n 的增大，频率呈现出稳定性，即当 n 逐渐增大时频率总是在 0.5 附近摆动，且逐渐稳定于 0.5. 又如，人们发现在英语中，各个字母被使用的频率是相当稳定的，其他各种文字也有类似的规律. 这种"频率的稳定性"就是通常所说的统计规律性，它是概率这一概念的经验基础.

定义 1.2 在相同条件下重复进行的 n 次试验，如果当试验的次数 n 增大时，事件 A 发生的频率 $\frac{n_A}{n}$ 稳定地在某个常数 p 附近摆动，则称常数 p 为事件 A 的**概率**，记作 $P(A)=p$.

概率的这个定义，称为概率的统计定义. 根据这一定义，当概率不易求出时，可以用大量重复试验时事件发生的频率来近似计算事件的概率.

§1.2.2 概率

1933 年，苏联数学家柯尔莫戈洛夫 (Kolmogorov) 综合了前人的成果，提出了概率论的公理化结构，明确定义了概率论中的基本概念，使概率论成为一个严谨的数学分支，从而极大地推动了概率论的发展.

定义 1.3 设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，若能找到一个法则，使得对于 E 的每一事件 A 赋于一个实数，记为 $P(A)$，并且这种赋值满足下列条件：

(1) 非负性：对任一事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$;

(2) 规范性：对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$;

(3) 可列可加性：对于互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$(即当 $i\neq j$ 时，有 $A_iA_j=\varnothing,i,j=1,2,\cdots$)，有

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

从概率论公理化定义，可以推导出概率的一些重要性质.

性质 1 对于不可能事件 $\varnothing$，有 $P(\varnothing)=0$.

证明 取 $A_1=\Omega,A_i=\varnothing,i\geqslant 2$，则由概率的可列可加性，得

$$P(\Omega)=P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=P(\Omega)+\sum_{i=2}^{\infty}P(\varnothing),$$

所以必有 $P(\varnothing)=0$.