国家级物理实验教学示范中心系列教材

国 家 精 品 课 程 配 套 教 材

近代物理实验

（第二版）

主 编 李保春

副主编 周海涛 马 杰

科 学 出 版 社

国家级物理实验教学示范中心系列教材
国家精品课程配套教材

近代物理实验
（第二版）

主　编　李保春
副主编　周海涛　马　杰

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是根据普通高等学校理科“近代物理实验”课程教学大纲编写的.内容包括：原子物理、核物理、微波、磁共振、材料物理、光谱学、现代光学、现代测试测量技术、等离子体物理、生物物理等.全书共分四个单元，共 47 个实验项目.

本书涵盖了物理学史上一些著名的经典实验和在现代测量测试技术中有广泛应用的典型实验，同时增加了具有特色的创新研究性实验单元，其内容全部由科研成果转化而来.在编写中，本书强化了自主性、研究性的教学理念，注重理论知识与实验内容相结合，利于开展多层次实验教学.

本书可作为高等院校物理类专业或相近专业的近代物理实验教学用书，也可作为从事实验教学的教师、工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

近代物理实验/李保春主编.—2 版.—北京：科学出版社，2019.6
国家级物理实验教学示范中心系列教材·国家精品课程配套教材
ISBN 978-7-03-061194-9

Ⅰ.①近… Ⅱ.①李… Ⅲ.①物理学-实验-高等学校-教材 Ⅳ.①O41－33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 090093 号

责任编辑：昌 盛 陈曰德 / 责任校对：杨聪敏
责任印制：张 伟 / 封面设计：迷底书装

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2019 年 6 月第 二 版 印张：24 1/4
2019 年 6 月第十八次印刷 字数：489 000

定价：59.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

近代物理实验是为高等院校物理类专业高年级学生开设的一门综合性较强的实验课程.该课程以物理学史上一些著名经典实验和在现代测量测试技术中有广泛应用的典型实验为教学内容.它不仅能使学生掌握如何用实验方法观测物理现象、研究物理规律的方法,更能够让学生了解近代实验技术在科学研究领域与工程实践中的应用,也有助于开阔学生的视野,激发学习兴趣,培养学生的物理思维能力,提高他们的创新意识.

1980年,"全国综合大学物理系近代物理实验课程设置和教材建设研讨会"召开,之后经过两年多的筹备,我校在整合、优化原中级物理实验的基础上开设了近代物理实验课程.1994年,我校物理学专业被评为"理科基础科学研究和教学人才培养基地",进一步加强了对近代物理实验室的建设.2006年,近代物理实验被评为国家精品课程,物理实验教学中心被评为国家级实验教学示范中心.经过多年的教学积累,在吸收其他高校经验的基础上,我们对教学讲义进行了多次修订、完善,力求适应物理实验教学的需要,适应当今高等教育的发展趋势.

本书在内容上涵盖了原子物理、核物理、微波、磁共振、材料物理、光谱学、现代光学、现代测试测量技术、等离子体物理、生物物理等诸多方面;在选题上保证经典物理实验内容不削弱的前提下,对现代科学技术方面的内容进行了调整优化,以培养学生应用物理知识提出问题和解决问题的能力.依托于我校光学国家重点学科、量子光学与光量子器件国家重点实验室,因校制宜,通过教学改革和科研成果转化,新建和完善了大量的研究性实验项目,成为具有我校学科特色的实验教学模式.本书增加了创新研究性实验单元,选编了近年来具有代表性的10个项目,使学生逐步受到科学研究的基本训练,提高实践能力、创新能力,促进了教学科研的良性互动和协同发展.

实验教学是一项集体工作,从实验室建设到教材编写、实验内容的改革都凝聚着众多师生的心血.本书是物理实验教学中心的教师与实验技术人员二十几年来的教学积累和成果总结.编写人员为:李保春(第一单元、2-12、2-13、2-14、2-15、2-18、2-19、2-20、2-21、2-22、3-5、3-6、3-9、3-10),王晓勇(2-1、2-5、2-6、3-8),周海涛(2-2、2-8、2-10、4-6、4-7),王亚琼(2-3、3-4、3-12),朱海龙(2-4、4-8),杨保东(2-7、2-9、4-5),李倩(2-11、2-17、3-7、4-10),郭娟(2-16、3-11),王海鹏(3-1、3-2),屈晓田(3-3),董有尔(3-5、3-9、3-10),杨丽(3-13、3-14、3-15、4-9),马杰(4-1、4-2、4-3),

杨荣国(4-4). 在编写过程中,山西大学、国家重点实验室、学院都给予了大力支持,在此表示感谢.

由于我们水平有限,书中难免有不足之处,敬请批评指正.

编　者

2018 年 12 月

目 录

第一单元　误差理论与数据处理基础知识

1-1　测量误差与不确定度

物理实验离不开对各种物理量进行测量，由测量所得的一切数据，都毫无例外地包含有一定数量的测量误差，没有误差的测量结果是不存在的. 测量误差存在于一切测量之中，贯穿于测量的全过程. 随着科学技术水平的不断提高，测量误差可以被控制得越来越小，但却永远不会降低到零.

$$测量误差=测量值-真值$$

何谓真值？真值是在特定条件下被测量量的客观实际值，当被测量的过程完全确定，且所有测量的不完善性完全排除时，测量值就等于真值. 这就是说，真值通过完善的测量才能获得. 然而，严格、完善的测量难以做到，故真值就很难确定.

在实践中，有一些物理量的真值或从相对意义上来说的真值是可以知道的，这有如下几种：

(1) 理论真值. 如平面三角形三内角之和恒为 180°；某一物理量与本身之差恒为零，与本身之比值恒为 1；理论公式表达值或理论设计值等.

(2) 计量单位制中的约定真值. 国际单位制所定义的七个基本单位，根据国际计量大会的共同约定，凡是满足上述定义条件而复现出的有关量值都是真值.

(3) 标(基)器相对真值. 凡高一级标准器的误差是低一级或变通测量仪器误差的$\frac{1}{3}\sim\frac{1}{20}$时，则可认为前者是后者的相对真值.

在科学实验中，真值就是指在无系统误差的情况下，观测次数无限多时所求得的平均值. 但是，实际测量总是有限的，故用有限次测量所求得的平均值作为近似真值(或称最可信赖值).

1. 误差(error)

误差即观测值与真值之间的差异. 如前所述，测量误差就是测量值减去真值.

1) 绝对误差(absolute error)

某物理量值与其真值之差称绝对误差，它是测量值偏离真值大小的反映，有时又称真误差. 即

$$绝对误差=量值-真值$$
$$修正值=-绝对误差=真值-量值$$
$$真值=量值+修正值$$

这说明量值加上修正值后，就可以消除误差的影响. 在精密计量中，常常用加一个修正值的方法来保证量值的准确性.

2）相对误差(relative error)

绝对误差与真值的比值所表示的误差大小称为相对误差或误差率. 有时，两组测量的绝对误差相同，但真值不同，而此时实际反映了两种不同的准确度. 所以采用相对误差就能够清楚地表示出测量的准确程度.

按定义

$$相对误差=\frac{绝对误差}{真值}=\frac{绝对误差}{测量值-绝对误差}=\frac{1}{\dfrac{测量值}{绝对误差}-1}$$

当绝对误差很小时，$\dfrac{测量值}{绝对误差}\gg 1$，此时

$$相对误差\approx\frac{绝对误差}{测量值}$$

相对误差还有一种表达形式，即分贝误差. 同种物理量之比取对数，再乘以20，这称为分贝 A(单位用 dB 表示).

设两个同种物理量之比为

$$a=\frac{p_2}{p_1} \tag{1-1-1}$$

则按定义有

$$A=20\cdot\lg a=20\times\frac{\ln a}{2.303}=8.69\cdot\ln a \tag{1-1-2}$$

如果比值 a 产生了一个误差 δa，那么将引起 A 产生一个误差 δA(此为分贝误差)，则

$$A+\delta A=20\cdot\lg(a+\delta a) \tag{1-1-3}$$

式(1-1-3)减去式(1-1-2)，得

$$\delta A=20\cdot\lg\left(1+\frac{\delta a}{a}\right)=8.69\cdot\ln\left(1+\frac{\delta a}{a}\right) \tag{1-1-4}$$

该式即为相对误差$\dfrac{\delta a}{a}$与分贝误差 δA 之间的关系式. 从数学上可知

$$\lim_{\frac{\delta a}{a}\to 0}\ln\left(1+\frac{\delta a}{a}\right)=\frac{\delta a}{a}$$

则式(1-1-4)可写成

$$\delta A = 8.69\,\frac{\delta a}{a}$$

或

$$\frac{\delta a}{a} = 0.1151\delta A$$

分贝误差主要用在声学及无线电计量之中，如计算声压级，按规定空气中的基准声压 $p_0 = 2\times10^{-5}$ Pa(大约相当于蚊子飞行发出声音的声压)，如有一声的声压 $p_2 = 20$Pa，则其声压级按式(1-1-4)计算为 $A = 20\cdot\lg\dfrac{20}{2\times10^{-5}} = 120(\mathrm{dB})$.

相对误差还有一种简便实用的形式——引用误差. 它在多挡或连续刻度的仪表中得到广泛应用. 为了减少误差计算中的麻烦和划分仪表正确度等级的方便，一律取仪表的量程或测量范围上限值作为误差计算的分母(即基准值)，而分子一律取用仪表量程范围内可能出现的最大绝对误差值. 于是，定义引用误差为

$$\text{引用误差} = \frac{\text{绝对误差}}{\text{仪表量程}}\times100\%$$

在热工、电工仪表中，正确度等级一般都是用引用误差来表示的，通常分成0.1、0.2、0.5、1.0、1.5、2.5 和 5.0 七级. 上述数值表示该仪表最大引用误差的大小，但不能认为仪表在各个刻度上的测量都具有如此大的误差. 例如，某仪表正确度等级为 R 级(即引用误差为 $R\%$)，满量程的刻度值为 X，实际使用时的测量值为 x(一般 $x\leqslant X$)，则

$$\begin{cases}\text{测量值的绝对误差} \leqslant X\cdot R/100 \\ \text{测量值的相对误差} \leqslant \dfrac{X\cdot R}{x}\%\end{cases} \tag{1-1-5}$$

通过上面的分析，可知为了减少仪表测量的误差，提高正确度，应该使仪表尽可能在靠近满量程刻度的区域内使用. 这正是人们利用或选用仪表时，尽可能在满刻度量程的 $\dfrac{2}{3}$ 以上区域内使用的原因.

3) 误差的分类

根据误差产生的原因和性质将误差分为系统误差和随机误差两大类.

A. 系统误差

在相同条件下多次测量同一物理量时，测量值对真值的偏离(包括大小和方向)总是相同的，这类误差称为系统误差.

系统误差的特点是恒定性，不能用增加测量次数的方法使它减小，在实验中发现和消除系统误差是很重要的，因为它常常是影响实验结果准确程度的主要因素，能否用恰当的方法发现和消除系统误差，是测量者实验水平高低的反映，但是又没

有一种普遍适用的方法去消除系统误差，主要是靠对具体问题做具体的分析与处理，要靠实验经验的积累. 如果我们能够确定系统误差的数值，就应该把它从实验结果中扣除，消除它的影响，或者说，把系统误差的影响减小到偶然误差的范围以内，这种数值已知的系统误差称为“已定系统误差”. 还有一类系统误差，只知道它存在的某个大致范围，而不知道它的具体数值，我们称之为“未定系统误差”. 例如仪器的允差就属于这一类.

B. 随机误差(偶然误差)

由于偶然的不确定因素造成每一次测量值的无规律的涨落，测量值对真值的偏离时大时小、时正时负，不能由上次测量值预计下一次测量值的大小，这类误差称为随机误差，也称偶然误差.

造成偶然误差的因素是多方面的，如仪器性能和测量者感官分辨力的统计涨落，环境条件(如温度、湿度、气压、气流、微震等)的微小波动，测量对象本身的不确定性(如气压、放射性物质单位时间内衰变数、小球直径或金属丝直径等)等.

偶然误差的特点是它的随机性，如果在相同的宏观条件下，对某一物理量进行多次测量，当测量次数足够大时，便可以发现这些测量值呈现出一定的规律性——统计规律性，即它们服从某种概率分布.

下面我们对一个实际测量的结果进行统计分析(表 1－1－1)，就可以发现随机误差的特点和规律. 表 1－1－1 中观测总次数 $n=150$ 次，某测量值的算术平均值为 3.01，共分 14 个分区间，每个区间的间隔为 0.01. 为直观起见，把表中的数据画成频率分布的直方图(图 1－1－1)，从图中便可分析归纳出随机误差的以下四个特点.

表 1－1－1 测值分布

区间	1	2	3	4	5	6	7
测值 x_i	2.95	2.96	2.97	2.98	2.99	3.00	3.01
误差 Δx_i	−0.06	−0.05	−0.04	−0.03	−0.02	−0.01	0
出现次数 n_i	4	6	6	11	14	20	24
频率 $f_i\left(\frac{n_i}{n}\right)$	0.027	0.04	0.04	0.073	0.093	0.133	0.16
区间	8	9	10	11	12	13	14
测值 x_i	3.02	3.03	3.04	3.05	3.06	3.07	3.08
误差 Δx_i	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
出现次数 n_i	17	12	12	10	8	4	2
频率 $f_i\left(\frac{n_i}{n}\right)$	0.113	0.08	0.08	0.066	0.058	0.027	0.018

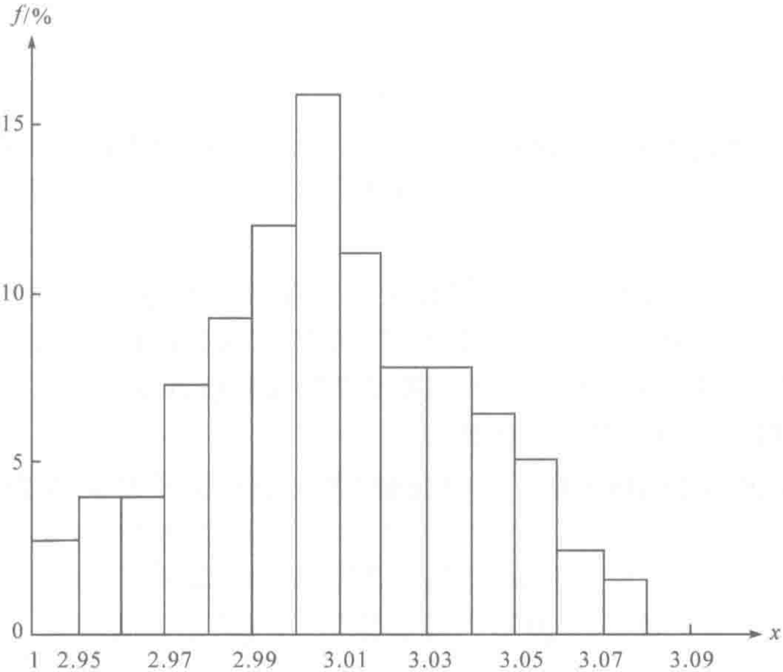


图 1-1-1　频率分布直方图

(1) 随机误差的有界性. 在某确定的条件下,误差的绝对值不会超过一定的限度. 表 1-1-1 中的 Δx_i 均不大于 0.07,可见绝对值很大的误差出现的概率近于零,即误差有一定限度.

(2) 随机误差的单峰性. 绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大,最小误差出现的概率最大. 表 1-1-1 中 $|\Delta x|\leqslant 0.03$ 的次数为 110 次,其中 $|\Delta x|\leqslant 0.01$ 的占 61 次,而 $|\Delta x|>0.03$ 的仅 40 次. 可见随机误差的分布成单峰形.

(3) 随机误差的对称性. 绝对值相等的正负误差出现的概率相等. 表 1-1-1 正误差出现的次数为 65 次,而负误差为 61 次,两者出现的频率分别为 0.427 和 0.407,大致相等.

(4) 随机误差的抵偿性. 在多次、重复测量中,由于绝对值相等的正负误差出现的次数相等,所以全部误差的算术平均值随着测量次数的增加趋于零,即随机误差具有抵偿性. 抵偿性是随机误差最本质的统计特性,凡是具有相互抵偿特性的误差,原则上都可以按随机误差来处理.

虽然随机误差产生的原因尚不清楚,但由于它总体上遵守统计规律,因此理论上可以计算出它对测量结果的影响.

4) 误差的表示方法

A. 算术平均误差

在一组测量中,用全部测值的随机误差绝对值的算术平均值来表示. 按定义

$$\delta=\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\overline{x}|}{n} \tag{1-1-6}$$

式中 x_i 为一组测量中的各个测量值，$i=1,2,\cdots,n$(测量的次数)；$\overline{x}$ 为一组测值的算术平均值，$|x_i-\overline{x}|=|\Delta x_i|$ 为第 i 个测值 x_i 与平均值 $\overline{x}$ 之偏差(即误差)的绝对值.

这种表示方法已经考虑到了观测次数 n 对随机误差的影响，但是各次观测中相互间符合的程度不能予以反映. 因为一组测量中，偏差彼此接近的情况与另一组测量中偏差有大、中、小的情况，两者的算术平均误差很可能相等.

B. 标准偏差 σ(又称均方根误差)

它是观测值与真值偏差的平方和观测次数 n 比值的平方根，按定义

$$\sigma=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-A)^2}{n}}=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}d_i^2}{n}} \tag{1-1-7}$$

式中 A 为被测物理量的真值；$d_i=x_i-A$ 为第 i 个测值 x_i 与真值 A 之偏差.

在实际测量中，观测次数 n 总是有限的，真值只能用最可信赖(最佳)值来代替，此时的标准偏差按下式计算：

$$\sigma_{n-1}=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}{n-1}} \tag{1-1-8}$$

标准偏差 σ 对一组测量中的特大或特小误差反映非常敏感，所以，标准偏差能够很好地反映出测量的精密度. 这正是标准偏差在工程测量中广泛被采用的原因.

例　有两组观测数据：

第一组　2.9、3.1、3.0、2.9、3.1；

第二组　3.0、2.8、3.0、3.0、3.2.

求平均值 $\overline{x}$、算术平均偏差 δ、标准偏差 σ，并分析其准确度及精密度.

解　列表计算如下：

	第一组测量
算术平均值 $\overline{x}$	3.0
算术平均误差 δ	$\frac{0.1+0.1+0+0.1+0.1}{5}=0.08$
标准偏差 σ_{n-1}	$\pm\sqrt{\frac{0.1^2+0.1^2+0.1^2+0.1^2}{5-1}}=\pm0.1$

续表

	第二组测量
算术平均值 $\bar{x}$	3.0
算术平均误差 δ	$\frac{0+0.2+0+0+0.2}{5}=0.08$
标准偏差 σ_{n-1}	$\pm\sqrt{\frac{0.2^2+0.2^2}{5-1}}=\pm0.141$

从计算结果可知:① 两组数据的平均值一样,即测量的准确度一样;② 两组数据的测量精密度实际上不一样. 因为第一组数据的重现性较好,但此时的算术平均偏差 δ 是一样的,显然 δ 未能反映出精密度来. 标准偏差 σ_{n-1} 的计算结果说明第一组测量数据比第二组精密度高.

标准偏差不仅仅是一组观测值的函数,而且更重要的是它对一组测量中的大误差及小误差反应比较敏感. 因此,在实验中广泛用标准偏差来表示测量的精密度.

C. 极限误差

通常定义极限误差的范围为标准偏差的 3 倍,即 $\pm3\sigma_{n-1}$. 从统计的角度计算得,所测物理量的真值落在 $\pm3\sigma_{n-1}$ 范围内的概率为 99.7%,而超出此范围的可能性实际上已经非常小,故把它定义为极限误差.

5) 几个重要概念

(1) 精密度(precision 简称精度). 它表示测量结果中随机误差大小的程度,即在一定条件下,进行多次、重复测量时,所得测量结果彼此之间符合的程度,通常用随机不确定度来表示.

(2) 正确度(correctness). 它表示测量结果中系统误差大小的程度,即在规定的条件下,测量中所有系统误差的综合.

(3) 准确度(accuracy 又称精确度). 准确度是测量结果中系统误差与随机误差的综合,它表示测量结果与真值的一致程度. 从误差的观点来看,准确度反映了测量的各类误差的综合. 如果所有已定系统误差已经修正,那么准确度可用不确定度来表示.

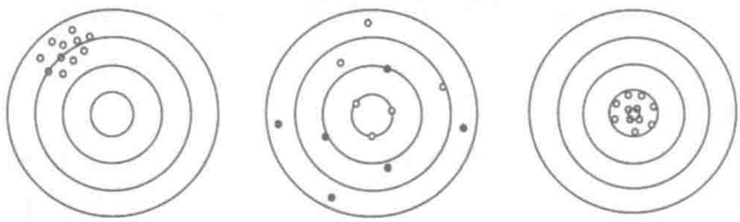
2. 不确定度(uncertainty)

不确定度是由于测量误差的存在而对被测量值不能肯定的程度. 表达方式有系统不确定度、随机不确定度、总不确定度. 可按估值的不同方法把不确定度归并为 A、B 两类分量. 前者是多次重复测量后,用统计方法计算出的标准偏差,后者是用其他方法估计出的近似的"标准偏差".

系统不确定度实质上就是系统误差限，常用未定系统误差可能不超过的界限或半区间宽度 e 来表示. 随机不确定度实质上就是随机误差对应于置信概率$1-a$时的置信区限$\pm k\sigma$(a 为显著性水平). 当置信因子 $k=1$ 时，标准偏差 σ 就是随机不确定度，此时的置信概率(按正态分布)为 68.27%. 总不确定度是由系统不确定度与随机不确定度按合成方差的方法合成而得的. 它反映了测量结果中未能确定的量值的范围. 不确定度是测量结果的测度，没有不确定度说明，测量结果将无从比较. 1993 年，国际计量局(BIPM)等 7 个国际组织发表了《测量不确定度表示指南》. 这一国际的权威性文献，对计量和科学实验工作极其重要.

综上所述，不确定度与误差有区别，误差是一个理想的概念，一般不能准确知道；但不确定度反映误差存在分布范围，即随机误差分量和未定系统误差分量综合的分布范围，可由误差理论求得. 总之，不确定度是未定误差的特征描述，而不是指具体的误差大小和符号，故不确定度不能用来修正测量结果.

图 1-1-2 给出了精密度、正确度和准确度的示意图.



(a)　　(b)　　(c)

图 1-1-2　精密度(a)、正确度(b)、准确度(c)的示意图

1-2　概率统计基础

如前所述测量误差的存在是一切测量中的普遍现象. 那么，研究测量误差的性质和产生的原因，研究如何有效地减小测量误差对实验结果的影响，科学地表达含有误差的测量结果，以及对实验结果如何评价等问题就显得十分重要. 正是在这样的背景下，产生并发展了一门专门的学科，这就是测量误差理论. 它是人们把概率论与数理统计理论应用于测量误差的研究中而形成并发展起来的一种科学理论. 深入地讨论测量误差需要有丰富的实验经验和概率统计知识，下面我们将介绍常用的误差理论知识，阐述误差分析的概率统计理论基础. 希望有助于读者提高实验的误差分析和数据处理能力.

一、几个基本概念

1. 随机事件及概率

如抛掷一枚硬币，出现正面向上和背面向上的事均有可能，我们把正面向上出现的事件记作 A，把背面出现的事件记为 B. 在抛掷之前，A 事件出现和 B 事件出现，事先是无法知道的. 也就是说，在一定条件下，事件 A 可能发生也可能不发生，把这类事件称为随机事件.

在物理实验中，有许多被测对象本身具有随机性. 例如宏观热力学量(温度、密度、压强等)的数值都是统计平均值，原子和原子核等微观领域的统计涨落现象也非常明显，这就使得实验观测值不可避免地带有随机性，

如果在一定的条件下，共进行 N 次试验，其中事件 A 发生了 N_A 次，比值 N_A/N称为事件 A 发生的频率. 如果随着试验的次数 N 增加，频率 N_A/N 愈来愈趋近某个确定值，那么，当 $N\to\infty$时，频率的极限值称为事件 A 的概率，记为 $P_r(A)$，即

$$P_r(A)=\lim_{N\to\infty}\frac{N_A}{N} \tag{1-2-1}$$

2. 随机变量和随机子样

如果所研究的各个随机事件可以分别用一个数来表示，这个数就是随机事件的函数，称为随机变量. 在物理量的测量中，测量结果为某一个特定的数值，是一个随机事件，这个数值就是随机变量的取值.

随机变量全部可能取值的集合称为母体或总体. 一次测量得到的是随机变量的一个具体数值，称为随机变量的一个随机数. 如果总共进行了 N 次独立的试验，得到随机变量的 N 个随机数($x_1,x_2,\cdots,x_N$)，称为随机变量的一个随机子样(或称为样本)，简称子样. 一个子样中随机数的数目 N 称为子样的容量. 物理量的测量结果总是获得某些随机变量的子样，子样的容量由重复观测的次数决定.

随机变量按其取值的情况分为离散型与连续型. 只能取有限个可数的一串数值的随机变量称为离散型随机变量，可能值布满某个区间的随机变量称为连续型的随机变量. 在核物理实验和单光子计数实验中，粒子或光子的计数率是离散型的随机变量，然而在物理量的测量中，更常见的是连续型的随机变量.

3. 分布函数、概率函数和概率密度函数

对于随机变量，我们关心的不只是随机变量的全部可能取值，还必须了解各种可能取值的概率，即随机变量的概率分布. 无论是离散型还是连续型的随机变量，其可能的全部取值可以排列在实数轴上，即实数轴上的一个子集合. 设 X 是一个

随机变量,x 是任意实数.函数

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} \tag{1-2-2}$$

称为 X 的分布函数.因此,若已知 X 的分布函数,我们就知道 X 在任一区间$[x_1, x_2]$上的概率,在这个意义上说,分布函数完整地描述了随机变量的统计规律性.

如果将 X 看成是数轴上的随机点的坐标,那么,分布函数 $F(x)$在 x 处的函数值就表示 X 落在区间$(-\infty, x]$上的概率.

分布函数 $F(x)$具有以下的基本性质:

(1) $F(x)$是一个不减函数;

(2) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$,且

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad F(\infty) = F(x) = 1 \tag{1-2-3}$$

对于离散型变量 X,它只能取可数的数值 $x = x_1, x_2, \cdots$,除了用分布函数描述外,还可以用概率函数 $p(x)$来描述它的分布.概率函数在某一点 x 的取值等于随机变量 X 取值为 x 的概率,即

$$p(x) = P_r(X = x) \tag{1-2-4}$$

根据分布函数和概率函数的定义,有

$$P_x(x) = \sum_{x_i = x} p_i(x_i)$$

对于连续型随机变量可以引入概率密度函数 $p(x) = \mathrm{d}P(x)/\mathrm{d}x$.因此有

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\mathrm{d}x$$

根据式(1-2-3)应有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{1-2-5}$$

这就是 $p(x)$应满足的归一化条件.

随机变量在区间$[a,b]$内取值的概率 $P_r(a \leqslant x \leqslant b)$称为区间$[a,b]$的概率含量.显然,区间$[a,b]$的概率为

$$P_r(a \leqslant x \leqslant b) = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x$$

上述关于分布函数、概率函数和概率密度函数的概念都可以推广到多个随机变量的情形.特别是,如果 X 和 Y 是两个互相独立的随机变量,那么根据概率论,它们的联合概率密度函数等于各自的概率密度函数的乘积,即

$$p(x,y) = p(x)p(y) \tag{1-2-6}$$

二、概率分布的数字特征量

随机变量有不同形式的分布,为研究方便,常用一些共同定义的数字特征量来表征它们.最重要的特征量是随机变量的期望值和方差.