§ 5. 函数的极限

1°. 函数的有界性 设存在有某两数 m 和 M，使得

$$\text{当 } x \in (a,b) \text{ 时，} m < f(x) < M,$$

则称函数 $f(x)$ 在这区间 (a,b) 上为有界的。

数 $m_0 = \inf\limits_{x \in (a,b)} \{f(x)\}$ 称为函数 $f(x)$ 在这区间 (a,b) 上的下确界，而数 $M_0 = \sup\limits_{x \in (a,b)} \{f(x)\}$ 称为函数 $f(x)$ 在这区间 (a,b) 上的上确界。

差 $M_0 - m_0$ 称为函数在区间 (a,b) 上的振幅。

2°. 函数在某一点的极限 符号

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \tag{1}$$

表示对任一个数 $\varepsilon > 0$，都存在有数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得对于满足条件式 $0 < |x - a| < \delta$，并使 $f(x)$ 有意义的一切 x，有下列不等式成立：

$$|f(x) - A| < \varepsilon。$$

函数的极限(1)存在的必要而且充分的条件是：对于每一个叙列 $x_n \to a (n = 1, 2, \cdots)$，下面的等式都成立

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A。$$

有两个著名的极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1,$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e。$

柯西判别法。函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在，当而且仅当，对于每一个 $\varepsilon > 0$，都能找得着 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得，只要是

$$0 < |x' - a| < \delta \text{ 和 } 0 < |x'' - a| < \delta,$$

就有 $$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$
式中 x' 和 x'' 是属于函数 $f(x)$ 的定义域内的。

3°. **单侧的极限** 若

当 $0<a-x<\delta(\varepsilon)$时，有 $|A'-f(x)|<\varepsilon$,

则称数 A' 为函数 $f(x)$在 a 点的**左极限**：
$$A'=\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)。$$

同样，若当 $0<x-a<\delta(\varepsilon)$时，有 $|A''-f(x)|<\varepsilon$,
则称数 A'' 为函数 $f(x)$在 a 点的**右极限**：
$$A''=\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)。$$

函数 $f(x)$在 a 点的极限存在的必要而且充分的条件为：
$$f(a-0)=f(a+0)。$$

4°. **无穷极限** 符号
$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$
表示对于任意的 $E>0$，只要是
$$0<|x-a|<\delta(E)，则有 |f(x)|>E。$$

5°. **子列极限** 若对于某叙列 $x_n\to a(n=1,2,\cdots)$有等式
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=B,$$
则称数 B（或符号∞）为函数 $f(x)$在 a 点的子列极限（有穷的或无穷的）。

这些子列极限中最小的和最大的用
$$\underline{\lim}_{x\to a} f(x) \quad 和 \quad \overline{\lim}_{x\to a} f(x)$$
来表示，分别称为函数 $f(x)$在 a 点的下极限和上极限。
$$\underline{\lim}_{x\to a} f(x)=\overline{\lim}_{x\to a} f(x)$$
为函数 $f(x)$在 a 点有极限（有穷的或无穷的）的必要而且充

分的条件。

381． 函数 $f(x)$由下面的条件所定义：

若 $x=\frac{m}{n}$，则 $f(x)=n$，

式中 m 和 n 为互质的整数，且 $n>0$；

若 x 为无理数，则 $f(x)=0$。

证明此函数在每一点 x 为有穷的，但并非有界的（即在这点的任何邻域中是无界的）。

证： 既然函数对于每一点 x_0 都有定义，因而函数在每一点是有穷的，故只需证明函数在每一点并非有界。

设 x_1，…，x_k，…为递增的有理数列，且以 x_0 为其极限：$\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=x_0$。令 $x_k=\frac{m_k}{n_k}$，则显然有 $\lim\limits_{k\to+\infty}n_k=+\infty$。

而 $f(x_k)=n_k$，故对于 x_0 的任意 δ 邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，当 k 充大时，可使 x_k，x_{k+1}，…落在 x_0 的 δ 邻域内，因而对任意正数 M，存在正整数 $k_1(k_1>k)$，使 $f(x_{k_1})>M$，故 $f(x)$在 x_0 处无界。

382． 若函数 $f(x)$在：(a) 开区间，(б) 闭区间内的每一点确定而有界，则此函数在给定的区间内或对应的闭区间内是否为有界的？

举出适当的例子。

解： (a) 在开区间内每一点确定而有界，则在区间内未必有界。

例如，$f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,1)$内每一点显然是有界的。然而在这个区间内函数 $f(x)=\frac{1}{x}$并非有界的。

(б) 假定在闭区间上每一点确定而有界，则据定义可知对于闭区间上每一点都有一小区间，在此区间内函数是有界的，根据复盖定理可知必定存在有限个子区间复盖此闭区间，且在各子间内函数是有界的，更由此推出函数在闭区间上是有界的。

383. 证明函数

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$$

在间隔 $-\infty<x<+\infty$ 中是有界的。

证：$\dfrac{1+x^2}{1+x^4}=\dfrac{1}{1+x^4}+\dfrac{x^2}{1+x^4}\leqslant 1+\dfrac{x^2}{1+x^4}$。

由 $2x^2\leqslant 1+x^4$ 得 $\dfrac{x^2}{1+x^4}\leqslant\dfrac{1}{2}$，

代入上式得 $$\frac{1+x^2}{1+x^4}<1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}。$$

故 $f(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 内是有界的。

384. 证明函数

$$f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的，但当 $x\to 0$ 时不成为无穷大。

证：对于无论多大的正数 M，总有充分接近于 $x=0$ 的点，使 $\left|\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}\right|>M$。例如取 $x=\dfrac{1}{n\pi}$，则 $\left|\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}\right|=n\pi$，

故若 $n>\dfrac{M}{\pi}$，则当 $x=\dfrac{1}{n\pi}$ 时，$\left|\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}\right|>M$，此即函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内是无界的。

其次，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 并不趋于无穷，因若取 $x=\dfrac{1}{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi}$，

则当 $n\to\infty$ 时 $x\to0$，然而这时$\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\to0$，因而函数并不趋于无穷大。

385. 研究函数 $f(x)=\ln x\cdot\sin^2\frac{\pi}{x}$在区间 $0<x<\varepsilon$ 内的有界性。

解：对于无论怎样小的 $\varepsilon>0$，当 n 充分大时，有$0<x_n=$ $=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}<\varepsilon$，从而 $|f(x_n)|=|\ln x_n|=\ln\frac{1}{x_n}$。这时，对于无论怎样大的 $M>0$，只要 n 充分大，必有 $|f(x_n)|>M$。由此可见，$f(x)$在区间 $(0,\varepsilon)$ 内是无界的。同时还可以看出，$f(x)<0$，所以函数 $f(x)$上方有界，而下方无界。

386. 证明函数

$$f(x)=\frac{x}{1+x}$$

在域 $0\leqslant x<+\infty$ 内有下确界 $m=0$ 和上确界 $M=1$。

证：当 $0\leqslant x<+\infty$ 时，$0\leqslant f(x)<1$，又 $f(0)=0$，故 $m=0$。

为了证明 $f(x)$在$[0,+\infty)$的上确界 $M=1$，只需证明对于任意的正数 $\varepsilon>0$，有 X 存在使 $f(X)=\frac{X}{1+X}>1-\varepsilon$，也即$\frac{1}{1+X}<\varepsilon$，而此不等式当$X>\frac{1}{\varepsilon}$时成立。

387. 函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上有定义且单调上升，则在此闭区间内函数的下确界和上确界等于什么？

解：显然，下确界和上确界分别等于 $f(a)$和 $f(b)$，只需用下确界和上确界的定义即可证得。

求函数的下确界和上确界(388-396题)：

388. $f(x)=x^2$ 在$(-2,5)$内。

解：当$-2<x<5$时，$0\leqslant f(x)<25$，而$\lim\limits_{x\to 5-0} f(x)=25$，故$\inf f(x)=f(0)=0$，$\sup f(x)=25$。

389. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在$(-\infty,+\infty)$内。

解：$\inf f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$，$\sup f(x)=f(0)=1$。

390. $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 在$(0,+\infty)$内。

解：明显地，当$0<x<+\infty$时，$f(x)>0$，故$\inf f(x)=\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0$。

又因$(1-x)^2\geqslant 0$，故$1+x^2\geqslant 2x$，即$\dfrac{2x}{1+x^2}\leqslant 1$，而当$x=1$时，$\dfrac{2x}{1+x^2}=1$。故$\sup f(x)=f(1)=1$。

391. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 在$(0,+\infty)$内。

解：当$x>0$时，$\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\geqslant 0$，故$x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$，而当$x=1$时，$x+\dfrac{1}{x}=2$，故$\inf f(x)=2$。

又因$\lim\limits_{x\to+0} f(x)=+\infty$，故$\sup f(x)=+\infty$。

392. $f(x)=\sin x$ 在$(0,+\infty)$内。

解：$-1\leqslant f(x)\leqslant 1$。$\inf f(x)=f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-1$，

$\sup f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$。

393. $f(x)=\sin x+\cos x$ 在$[0, 2\pi]$内。

解：$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，则$-\sqrt{2}\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{2}$。

故 $\inf f(x)=f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$，$\sup f(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$。

394. $f(x)=2^x$ 在$(-1, 2)$内。

解：$f(x)$在$(-1, 2)$内单调增。

$\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=2^{-1}=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to2-0} f(x)=2^2=4$。

故 $\inf f(x)=\frac{1}{2}$，$\sup f(x)=4$。

395. $f(x)=[x]$：(a) 在$(0,2)$内，(б) 在$[0,2]$内。

解：(a) $f(x)=\begin{cases}0, & 当\ 0<x<1,\\ 1, & 当\ 1\leqslant x<2。\end{cases}$

故 $\inf f(x)=0$，$\sup f(x)=1$。

(б) $f(x)=\begin{cases}0, & 当\ 0\leqslant x<1,\\ 1, & 当\ 1\leqslant x<2,\\ 2, & 当\ x=2。\end{cases}$

故 $\inf f(x)=0$，$\sup f(x)=2$。

396. $f(x)=x-[x]$ 在$[0, 1]$内。

解：$f(x)=\begin{cases}0, & 当\ x=0,\ 1,\\ x, & 当\ 0<x<1,\end{cases}$

$$\inf f(x)=f(0)=f(1)=0。$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=1,\ \sup f(x)=1。$$

397. 求函数 $f(x)=x^2$ 在下列区间内的振幅：

(а) (1, 3)； (б) (1.9, 2.1)；

(в) (1.99, 2.01)； (г) (1.999, 2.001)。

解：(а) $m_0=1$，$M_0=9$，故振幅为 8。

(б) $m_0=3.61$，$M_0=4.41$，故振幅为 0.8。

(в) 振幅 $=2.01^2-1.99^2$

$$=(2.01+1.99)(2.01-1.99)=0.08。$$

(г) 振幅 $=2.001^2-1.999^2=0.008$。

398. 求函数

$$f(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$$

在下列区间内的振幅：

(а) (−1, +1)； (б) (−0.1, 0.1)；

(в) (−0.01, 0.01)； (г) (−0.001, 0.001)。

解：对于所给的四个区间来说：

$$m_0=\lim_{x\to -0}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2},$$

$$M_0=\lim_{x\to +0}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}。$$

故 所求振幅 $=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$。

399. 设 $m[f]$ 和 $M[f]$ 分别为函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的下确和上确界。

证明：若 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 为定义于 (a,b) 内的函数，

则 $$m[f_1+f_2]\geqslant m[f_1]+m[f_2]$$

及 $$M[f_1+f_2]\leqslant M[f_1]+M[f_2]。$$

举出函数 $f_1(x)$和 $f_2(x)$的例子，使它们在最后的二关系式中是：

(a) 等式的情形，(б) 不等式的情形。

证：设 $m_0=m[f_1+f_2]$，$m_1=m[f_1]$，$m_2=m[f_2]$。

用反证法：如果 $m_0<m_1+m_2$，取 $2\varepsilon=m_1+m_2-m_0$。据下确界的定义，在(a, b)内至少存在一点 x_0 使

$$f_1(x_0)+f_2(x_0)<m_0+\varepsilon=m_1+m_2-\varepsilon。\qquad (1)$$

另一方面，现由于 m_1，m_2 分别为 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 的下确界，故对于(a, b)内一切点 x_i, x_j，恒有 $f_1(x_i)>m_1-\dfrac{\varepsilon}{2}$，$f_2(x_j)>m_2-\dfrac{\varepsilon}{2}$。相加得：

$f_1(x_i)+f_2(x_j)>m_1+m_2-\varepsilon$，特殊地取 $x_i=x_j=x_0$ 应有：

$$f_1(x_0)+f_2(x_0)>m_1+m_2-\varepsilon。\qquad (2)$$

(2)与(1)相矛盾，故得 $m_0\geqslant m_1+m_2$。

同理证明上确界的情形。

举例：(a) $f_1(x)=f_2(x)=x^2$，(a, b)为区间$(0,1)$。

明显地：$m_0=0$，$m_1=0$，$m_2=0$，

$$M_0=2，M_1=1，M_2=1。$$

(б) $f_1(x)=\sin x$，$f_2(x)=\cos x$，(a, b)为$(0,2\pi)$。

因为 $f_1(x)+f_2(x)=\sin x+\cos x$

$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)。$$

故 $m_0=-\sqrt{2}$，$m_1=-1$，$m_2=-1$，

$M_0=\sqrt{2}$，$M_1=1$，$M_2=1$。

400. 设函数 $f(x)$定义于域$[a, +\infty)$内，并且在每一个闭区间$[a, b]$上是有界的。假定

$$m(x)=\inf_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi)$$

及 $$M(x)=\sup_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi)。$$

作函数 $y=m(x)$和 $y=M(x)$的图形，设

(a) $f(x)=\sin x$，(б) $f(x)=\cos x$。

解：(a) $f(x)=\sin x$，如对于区间$[0,+\infty)$，则有

$$m_1(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ \sin x, & \pi\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}\pi,\\ -1, & x>\frac{3}{2}\pi,\end{cases}$$

$$M_1(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2},\\ 1, & x>\frac{\pi}{2}。\end{cases}$$

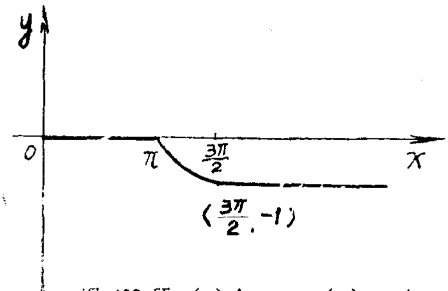

图 400 题 (a)-1 $y=m_1(x)$

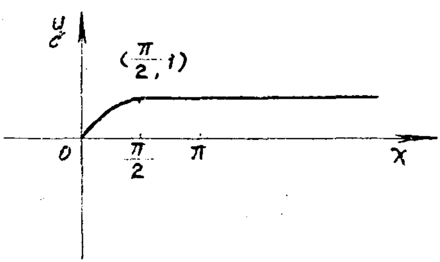

图 400 题 (a)-2 $y=M_1(x)$

函数 $y=m_1(x)$和 $y=M_1(x)$的图形见上页。

(б) $f(x)=\cos x$，对于区间$[\pi/2, +\infty)$则有

$$m_2(x)=\begin{cases}\cos x, & \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \pi, \\ -1, & x>\pi。\end{cases}$$

$$M_2(x)=\begin{cases}0, & \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}\pi, \\ \cos x, & \frac{3}{2}\pi<x\leqslant 2\pi, \\ 1, & x>2\pi。\end{cases}$$

函数 $y=m_2(x)$和 $y=M_2(x)$的图形如下。

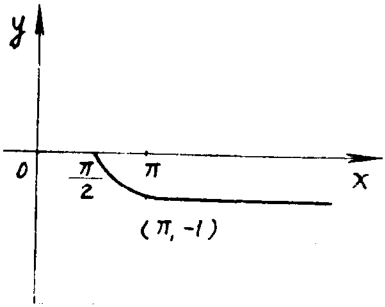

图 400 题 (б)-1 $y=m_2(x)$

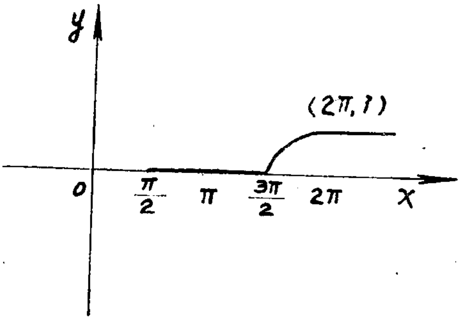

图 400 题 (б)-2 $y=M_2(x)$

401. 利用«ε-δ»论证法：证明：$\lim\limits_{x\to2}x^2=4$。

填下表：

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	……
δ					

证：$|x^2-4| = |x+2|\,|x-2|$。

由于 $x\to2$，故不妨设 $1<x<3$，因此 $|x+2|<5$。于是，对于任意给定的正数 $\varepsilon>0$，要使 $|x^2-4|<\varepsilon$，只需 $|x+2|\,|x-2|<5|x-2|<\varepsilon$，由此解得 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$。

因此，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 δ，$\delta=\min\left(1,\ \dfrac{\varepsilon}{5}\right)$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，可使 $|x^2-4|<\varepsilon$，此即 $\lim\limits_{x\to2}x^2=4$。

用所求得的 δ 来填表中的空格，得

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	……	10^{-n}
δ	0.02	0.002	0.0002	0.00002	……	$2\times10^{-(n+1)}$

402. 以«E-δ»的说法，证明：

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty。$$

填下表：

E	10	100	1000	10000	……
δ					