

纯粹数学与应用数学专著 第29号

涡度法

应隆安 张平文 著

科学出版社



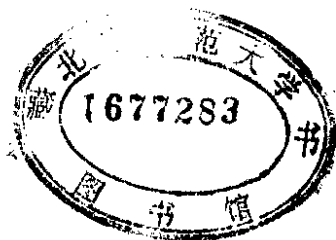
中国科学院科学出版基金资助项目

JY1/34/22

纯粹数学与应用数学专著 第29号

涡度法

应隆安 张平文 著



科学出版社

1994

《纯粹数学与应用数学专著》丛书

主 编 杨 乐

副主编(以姓氏笔画为序)

王 元 王梓坤 石钟慈

严士健 张恭庆 胡和生

潘承洞

前 言

关于涡度法的起源可以追溯到 1931 年 Rosenhead 用点涡法计算二维涡流的研究。但是当时没有计算机,这种方法的发展受到很大限制。到了 70 年代,随着计算机的发展,涡度法才飞速地发展起来,以至现在成为不可压缩流计算的重要方法之一。

涡度法的思想是质点法在涡流中的体现。质点法是相对于连续体的计算而言的。把大量分子的集合看成连续体,并且充分利用微积分的成果,这是人类在力学发展进程中的重大成就。但是近年来随着人类计算能力的日益提高,用质点的模型进行计算的问题就自然地提出来了。现有的计算能力还不足以把一个连续体分解为分子运动进行计算,但是有可能分解为一些较大的质点(当然还是理想的),能否这样计算呢?在这方面,已经有了大量的数值试验,并且今后还会不断地有新的进展。把这个思想引入涡流计算中,将一个连续的涡场分解为一个个的点涡或涡团求解,这就是涡度法。

在涡流运动中,有不少复杂的力学现象,如边界层、分离、湍流等。这些现象十分复杂,在计算时,既有大尺度的量,也有小尺度的量,因此十分困难。特别是随着 Reynold 数的提高,计算的难度越来越大。涡度法目前还不能把上述困难彻底解决,但是因为它可以处理大大小小不同的涡,所以至少是一条有希望的途径。

涡度法从它产生之日起就有不同意见的争论,Leonard 说:“涡度法比传统的 Euler 格式有不少优点,但是可以预期每一个优点都可以被相应的缺点所抵消。”这种看法是有代表性的。目前,很多人认为它的优点是:需要的存储量小;用特征线法使对流项易于处理;网格为自适应的;对高 Reynold 数易于处理;对无穷远边界条件易于处理,等等。与此同时,也提出它有不少缺点:计

算量大、粘性项不好处理、边界条件不好处理、与固定的网格不容易匹配,等等。因此,它的发展前途是尚待今后作结论的问题。但是无论如何,它今天的应用已相当广泛,人们对它已积累了大量成果,这些是值得认真研究的。

Chorin 于 1973 年发表的文章是涡度法的代表作之一,后来又有了不少新的发展。涡度法的数学理论从 Hald 和 DelPrete 发表于 1978 年的论文开始,如今已有大量文献。关于涡度法的综合性文献,有 Leonard 于 1980 年发表的文章,它至今仍被不断引用,但该文只限于介绍方法,没有相应的理论。此外,还有 Marchioro 与 Pulvirenti 于 1984 年出版的专著,但该书只限于介绍点涡的运动。本书的目的是把近年来有关涡度法的方法与理论作一个较为系统的介绍,以弥补这方面的不足。虽然限于我们的学识,可能还会有不少遗漏或不妥之处,但是本书毕竟是在这方面作系统阐述的第一次尝试。我们希望本书能为广大的力学、工程技术工作者及有关的数学工作者提供一个较为全面的材料,以使本方法在我国更为人们所知,在推动涡度方法发展上尽一点我们的微薄力量。

本书的第一章第 5,6 节与第五章由张平文执笔,其余章节均由应隆安执笔。我们曾在重庆大学、山东大学、西安交通大学等单位讲过本书的部分内容,与会的同行们提了不少问题,还做了新的工作,对我们写本书有很大帮助,我们在此处特致诚挚的谢意。此外,我们还在国内外不少研究单位介绍过这方面的工作,广泛地与同行进行了讨论,也有很大收益,在此也一并致谢。本书初稿完成后,滕振寰教授通读了全稿,提出了宝贵的意见。黄明游教授审查了全稿,也提出了许多宝贵的意见和建议,从而使本书的质量有所提高,谨此向他们表示衷心的感谢。

北京大学
应隆安
张平文
1991.8

目 录

前言.....	iii
第一章 Euler 方程及 Navier-Stokes 方程的涡度法	1
§ 1. 二维 Euler 方程的涡度法	1
§ 2. 三维 Euler 方程的涡度法	8
§ 3. 随机游动涡团法	14
§ 4. 变椭圆涡方法	18
§ 5. 确定型算法	21
§ 6. 快速涡团算法	28
第二章 不可压缩流的数学理论	41
§ 1. Sobolev 空间的一些性质.....	41
§ 2. 椭圆型偏微分方程解的一些估计	47
§ 3. 三维 Euler 方程的初值问题	51
§ 4. 三维 Euler 方程的初边值问题	57
§ 5. 二维 Euler 方程	63
§ 6. 线性算子半群	67
§ 7. Stokes 算子及其生成的半群	70
§ 8. 不定常 Navier-Stokes 方程	75
第三章 Euler 方程涡度法的收敛性	77
§ 1. 涡团法解的存在唯一性	77
§ 2. 函数的逼近	81
§ 3. 积分算子的一些性质	86
§ 4. 二维涡团法的相容性	95
§ 5. 二维涡团法的稳定性	102
§ 6. 二维涡团法的收敛性	113
§ 7. 三维涡团法的收敛性——格式 A	115
§ 8. 三维涡团法的收敛性——格式 B	129
§ 9. 点涡法的收敛性	139

§ 10. 二维初边值问题的涡团法——半离散化	146
§ 11. 二维初边值问题的涡团法——关于空间变量进一步离散化	157
§ 12. 二维初边值问题的涡团法——全离散化	166
第四章 粘性分离的收敛性	176
§ 1. 初值问题的估计	176
§ 2. 初值问题的收敛性	182
§ 3. 一个简化公式——线性情形	186
§ 4. 一个简化公式——非线性情形	192
§ 5. 一个相容格式——非齐次方程	202
§ 6. 一个相容格式——非齐次边界条件	214
§ 7. 必要条件	225
§ 8. 外问题	230
§ 9. 多连通区域	240
§ 10. 紧性讨论	247
§ 11. 支集在边界上的生成涡旋	256
第五章 随机涡团法的收敛性	259
§ 1. 概述	259
§ 2. 随机涡团法收敛性	260
§ 3. 随机游动方法对 Burgers 方程的收敛性基本框架	281
评注	290
参考文献	296

第一章 Euler 方程及 Navier-Stokes 方程的 涡度法

§ 1. 二维 Euler 方程的涡度法

我们考查不可压缩、无粘性的流体。在二维情形，它满足如下的 Euler 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho} \nabla p = f, \quad (1.1.1)$$

其中 u 表示速度，它是一个向量， $u = (u_1, u_2)$ ， p 是压力， u 与 p 是未知的两个基本力学量， ρ 是密度，我们设流体是不可压缩而且是均匀的，所以 ρ 是一个已知常数， $f = (f_1, f_2)$ 表示单位质量流体所受到的体积力。自变量为 $x = (x_1, x_2)$ 与 t ，分别表示空间与时间变量，符号 ∇ 是梯度算子，即 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$ 。流体还应满足如下的连续性方程：

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (1.1.2)$$

其中“ $\cdot$ ”为内积符号，因此“ $\nabla \cdot$ ”就是散度，我们有时为了方便起见，把微商也记作 ∂_1 与 ∂_2 。按照内积规则，(1.1.1) 中的“ $u \cdot \nabla$ ”就是 $u_1 \partial_1 + u_2 \partial_2$ 。(1.1.1)(1.1.2) 共包含了三个方程，联立求解三个未知量 u_1, u_2 与 p 。

下面考查涡度法。首先，为了叙述上的方便，设外力有势，即存在一个标量函数 ϕ ，使 $f = \nabla \phi$ ，我们用旋度算子作用于方程 (1.1.1)，在二维情形，旋度算子就是 $\nabla \wedge = (\partial_2, -\partial_1)$ 。设涡度 $\omega = -\nabla \wedge u$ ，它是一个标量，即

$$\omega = -\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2,$$

以 $-\nabla \wedge$ 作用于 (1.1.1) 后, $\frac{1}{\rho} \nabla p$ 与 f 两项自动消失, 方程变成了

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \nabla \omega = 0, \quad (1.1.3)$$

方程 (1.1.3) 中除了未知量 ω 外, 还有 u , 它是不能独立求解的. 我们还需引进另一个变量, 即流函数. 为了叙述方便, 先假定在整个空间 R^2 考虑, 在空间中任取一点 x_0 , 作如下的曲线积分:

$$\phi(x) = \int_{x_0, x} (-u_2 dx_1 + u_1 dx_2), \quad (1.1.4)$$

其中 $\widehat{x_0 x}$ 为任一曲线路径. 由方程 (1.1.2), 以上曲线积分与路径无关, 它定义了一个全空间上的函数, 由 (1.1.4) 还可以得

$$u = \nabla \wedge \phi, \quad (1.1.5)$$

以 $-\nabla \wedge$ 作用在 (1.1.5) 上, 得

$$-\Delta \phi = \omega, \quad (1.1.6)$$

其中 Δ 是 Laplace 算子, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$. 于是, 如果认为 ω 是已知的, ϕ 就是一个 Poisson 方程的解. (1.1.3), (1.1.5), (1.1.6) 中共包含了四个方程, 它们可联立求解四个未知量, 即 ω , u_1 , u_2 与 ϕ . 自然, 也可以利用 (1.1.5) 把 (1.1.3) 中的 u 消去, 只解 ω 与 ϕ . 这就是 Euler 方程的涡度——流函数提法.

如果把 u 看成已知, (1.1.3) 是一个一阶双曲型方程式, 可以用特征线方法求解. 特征线由如下的常微分方程组定义:

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t). \quad (1.1.7)$$

把 (1.1.7) 代入 (1.1.3), 我们得到一个主要结论: 沿特征线

$$\frac{d\omega}{dt} = 0, \quad (1.1.8)$$

即沿特征线涡度是不变的. 因此, 我们只要作出特征线, 并知道初始时刻的涡度 $\omega_0(x) = \omega(x, 0)$, 问题就解决了.

点涡法正是根据这一思路并结合质点法的思想而设计的一种

方法。一般,在初始时刻 ω_0 是一个连续函数,我们用若干个点涡来逼近它,设

$$\omega_0(x) \doteq \sum_{j \in J} \alpha_j \cdot \delta(x - X_j),$$

这里 X_j 是第 j 个点涡的位置, $\delta(\cdot)$ 是 δ 函数, J 是指标的集合 $J = \{j\}$, α_j 是点涡的强度, 这就好比把连续分布的质量集中在几个质点上。设方程(1.1.7)以及初始条件

$$x|_{t=0} = X_j$$

的解为 $X_j(t)$, 则由(1.1.8), 涡度可以写成

$$\omega(x, t) = \sum_{j \in J} \alpha_j \delta(x - X_j(t)), \quad (1.1.9)$$

代入(1.1.6), 得

$$-\Delta \phi = \sum_{j \in J} \alpha_j \delta(x - X_j(t)) \quad (1.1.10)$$

我们知道, 方程

$$-\Delta \phi = \delta(x - x_0)$$

的解称为基本解, 它等于 $-\frac{1}{2\pi} \log |x - x_0|$, 从而方程 (1.1.10)

的解就是

$$\phi = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j \in J} \alpha_j \log |x - X_j(t)|.$$

由(1.1.5)得

$$u = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j \in J} \alpha_j \frac{(x_2 - X_{j_2}(t), -x_1 + X_{j_1}(t))}{|x - X_j(t)|^2}, \quad (1.1.11)$$

其中 $(X_{j_1}(t), X_{j_2}(t)) = X_j(t)$, $|x|^2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

把(1.1.11)代入(1.1.7)就应该得到 $X_j(t)$ 满足的常微分方程组。但是我们要注意到, 按照 (1.1.11), $u(X_i(t), t)$ 是没有意义的, 当 $x \rightarrow X_i(t)$ 时, u 的极限为无穷。于是, 对于固定的 $i \in J$, 我们把(1.1.11)中对应于 $j = i$ 的那一项去掉, 经过这样处理后, $X_i(t)$ 满足的方程是

$$\frac{dX_i(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} \alpha_j \frac{(-X_{i_2}(t) + X_{j_2}(t), X_{i_1}(t) - X_{j_1}(t))}{|X_i(t) - X_j(t)|^2},$$

$$i \in J, \quad (1.1.12)$$

以及初始条件

$$X_i(0) = X_i \quad (1.1.13)$$

这种做法,粗看完全没有道理,但是,我们在第三章的理论分析中可以看到,它是能够收敛于精确解的。

在公式(1.1.11)中,在无穷远处 $u=0$ 。如果在无穷远处有一个均匀的流场 $u_\infty(t)$,那么在(1.1.11)与(1.1.12)的右端可以加上 $u_\infty(t)$ 这一项。因为 $u_\infty(t)$ 并不影响涡度 ω ,所以整个计算方法不变。

用点涡法计算时,如果点涡个数较少,则可以得到一个大致上合理的流场。当点涡个数增多时,出现了混沌。在第三章中,我们将给出点涡法收敛的证明,这说明当点涡个数非常多时,也即初始点涡距离足够接近时,才能保证点涡解的存在性,也才能得到原问题的一个好的近似。但是初始点涡要密到什么程度,这一点似乎还未得到实际计算的回答。

为了克服点涡法的上述缺点,可以使用涡团法,即用没有奇异性的函数 $\zeta(x)$ 代替 δ 函数,很自然地要求 ζ 具有性质:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \zeta(x) dx = 1.$$

最常见的“涡团函数” ζ 有

(a) 常数分布

$$\zeta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sigma^2}, & |x| < \sigma, \\ 0, & |x| > \sigma. \end{cases}$$

(b) 奇性分布

$$\zeta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sigma|x|}, & |x| < \sigma, \\ 0, & |x| > \sigma, \end{cases}$$

(c) 正态分布

$$\zeta(x) = \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp(-|x|^2/\sigma^2).$$

这样的函数自然还有很多,可以在参考文献上查到。利用它们,可以进行许多数值试验,此处就不一一列举了。对于这些函数,流函数也有相应的形式,公式(1.1.12)也要作相应的调整。这时,我们有

$$\omega = \sum_{j \in J} \alpha_j \zeta(x - X_j(t)). \quad (1.1.14)$$

设方程

$$-\Delta\phi = \zeta(x),$$

在全平面上的解为 $\phi_s(x)$, 则有

$$\phi = \sum_{j \in J} \alpha_j \phi_s(x - X_j(t)), \quad (1.1.15)$$

$$u = \sum_{j \in J} \alpha_j \nabla \wedge \phi_s(x - X_j(t)) + u_\infty(t),$$

$$\frac{dX_i}{dt} = \sum_{j \in J} \alpha_j \nabla \wedge \phi_s(X_i(t) - X_j(t)) + u_\infty(t),$$

$$\forall i \in J, \quad (1.1.16)$$

这时 $\nabla \wedge \phi_s$ 没有奇性,所以也不必要求 $j \neq i$ 。在一些简单情形, ϕ_s 的解析表达式是可以写出来的,例如常数分布。我们将在第4节讨论椭圆涡时写出 ϕ_s 的表达式,圆涡就是它的特例,因此这里从略。

如果外力没有势,则只要把形式稍作变动即可。令

$$F = -\nabla \Lambda f,$$

则方程(1.1.3)变成了

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \nabla \omega = F,$$

方程(1.1.8)变成了

$$\frac{d\omega}{dt} = F,$$

(1.1.9)就转化为

$$\omega(x, t) = \sum_{i \in J} \alpha_i(t) \delta(x - X_i(t)).$$

于是有

$$\sum_{i \in J} \frac{d\alpha_i(t)}{dt} \delta(x - X_i(t)) = F(x, t).$$

在每一时刻 t , 把 F 作近似分解:

$$F(x, t) = \sum_{i \in J} f_i(t) \delta(x - X_i(t)),$$

就有

$$\frac{d\alpha_i(t)}{dt} = f_i(t).$$

下面考查有界的情形. 设流场局限在区域 Ω 内, 在它的边界 $\partial\Omega$ 上应该有适当的边界条件. 我们取常见的固壁条件

$$u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.1.17)$$

其中 n 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法线向量.

首先设 Ω 是一个有界的单连通区域, 它的边界 $\partial\Omega$ 是一条光滑的简单闭曲线. 这时我们只要把(1.1.4)中的 x_0 点取在边界 $\partial\Omega$ 上, 不难看出, 沿着整个边界 ϕ 都等于零, 即

$$\phi|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.1.18)$$

于是求解 ϕ 的问题就是求解 Dirichlet 问题 (1.1.6), (1.1.18). 这个问题的解法很多, 例如, 我们可以把解分解为两部分

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{(-x_2 + \xi_2, x_1 - \xi_1)}{|x - \xi|^2} \omega(\xi) d\xi + \nabla\phi, \quad (1.1.19)$$

其中第一部分使方程(1.1.5)(1.1.6)得以满足, $\nabla\phi$ 表示一个无旋的不可压缩流场, ϕ 为 Laplace 方程的解, 它的作用是使边界条件(1.1.17)成立, 而不改变流场的涡度, 也不影响不可压缩性. 求解(1.1.6), (1.1.18)的其它方法还有: 差分法、Green 函数法、有限元方法、边界元方法等. 当使用差分法或有限元方法时, 人们把它又称为“胞腔内的涡度法 (vortex in cell)”. 这些方法都是

常规的,我们就不一一叙述了。

如果 ∂Q 是一条光滑的简单闭曲线, Q 是它的外部, 以上的做法仍然没有本质的差别。但是, 如果 Q 是一个更为复杂的多连通区域, 问题就困难了。下面我们设 Q 是一个有界的多连通区域, 说明上述算法应作什么改正。

设 ∂Q 由 $N+1$ 条简单闭曲线 $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$ 组成, 其中 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ 均在 Γ_0 之内, 它们之间既不相交也不互相包含。取(1.1.4)中的 x_0 点在 Γ_0 上, 于是, $\phi|_{\Gamma_0} = 0$, 但是 ϕ 在 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ 上一般地都不会等于零。从方程(1.1.17)可知 ϕ 在每条闭曲线 Γ_j 上都等于一个常数 C_j , 这个常数是未知的。我们考查如下的边值问题:

$$\begin{aligned}\Delta \varphi^{(i)} &= 0, \quad i = 1, \dots, N, \\ \varphi^{(i)}|_{\Gamma_0} &= 0, \\ \varphi^{(i)}|_{\Gamma_j} &= \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N,\end{aligned}$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

它有唯一解。我们再考查一个边值问题:

$$\begin{aligned}-\Delta \varphi^{(0)} &= \omega, \\ \varphi^{(0)}|_{\partial Q} &= 0.\end{aligned}$$

它也有唯一解, 于是流函数等于

$$\psi = \varphi^{(0)} + \sum_{j=1}^N C_j(t) \varphi^{(j)}, \quad (1.1.20)$$

其中 $C_j(t)$ 在每一时刻 t 为边界 Γ_j 上的常数值。这里 $C_j(t)$ 是不能从 ω 确定的, 由(1.1.20)得:

$$u = \nabla \wedge \varphi^{(0)} + \sum_{j=1}^N C_j(t) \nabla \wedge \varphi^{(j)}.$$

令 $u^{(j)} = \nabla \wedge \varphi^{(j)}$, 则有

$$u = u^{(0)} + \sum_{j=1}^N C_j(t) u^{(j)}. \quad (1.1.21)$$

把(1.1.21)代入方程(1.1.1)得

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \sum_{j=1}^N C_j'(t) u^{(j)} + \left(\left(u^{(0)} + \sum_{j=1}^N C_j(t) u^{(j)} \right) \cdot \nabla \right) \cdot \left(u^{(0)} + \sum_{j=1}^N C_j(t) u^{(j)} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p = f.$$

任取 $i, 1 \leq i \leq N$, 用 $u^{(i)}$ 与上述方程作内积, 令 $a_{ij} = (u^{(i)}, u^{(j)})$, 我们注意到 $(u^{(0)}, u^{(i)}) = 0$ 以及 $(\nabla p, u^{(i)}) = 0$, 使得

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} C_j'(t) + \left(\left(u^{(0)} + \sum_{j=1}^N C_j(t) u^{(j)} \right) \cdot \nabla \right) \cdot \left(u^{(0)} + \sum_{j=1}^N C_j(t) u^{(j)} \right), u^{(i)} = (f, u^{(i)}).$$

这是一个 $C_1(t), \dots, C_N(t)$ 满足的常微分方程组。它的初值可以由(1.1.20)确定, 因为当 $t = 0$ 时, ϕ 是已知的, 求出 $C_i(t)$ 以后, 代入(1.1.21)就得到了速度 u 。

以上所述的涡度法, 都是把原问题归结为一个常微分方程组, 在实际求解时, 还需要对它进一步离散化, 例如用差分方法, 这时会产生点涡或涡团的中心越过边界到区域 Ω 之外的问题。由于边界条件(1.1.17), $X_j(t)$ 是不应穿过边界的, 但是离散化以后, 由于求得的是近似解, 因此难免会发生上述情况。当点越过边界时, 有许多处理方法, 例如把这个点取消, 或者采用反弹的方法, 把它弹回区域 Ω 。但是我们将在第三章给出的理论分析表明, 不妨把区域 Ω 略扩大一点, 当点越过边界时, 仍然继续按方程(1.1.7)计算。这时由于 Ω 外速度场没有定义, 可以用外推方法得到 Ω 之外不太远的地方的速度场, 用这种方法可以保证收敛性。

§ 2. 三维 Euler 方程的涡度法

三维方程仍可以用(1.1.1)与(1.1.2)表出, 所不同的是: u 为三维向量 (u_1, u_2, u_3) , 为了叙述简便起见, 我们仍然设外力有

旁。

令涡度 $\omega = \text{curl } u$ 。我们以 curl 算子作用于方程 (1.1.1) 得

$$\frac{d\omega}{dt} + (u \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)u = 0, \quad (1.2.1)$$

沿着特征线有

$$\frac{d\omega}{dt} = (\omega \cdot \nabla)u. \quad (1.2.2)$$

与 (1.1.8) 对照, 右端不再等于零, 这一点给计算和理论分析都带来了困难。方程 (1.2.2) 还有一个等价的形式, 为了给出这一形式, 我们有必要把特征方程 (1.1.7) 用稍微详细一点的形式给出。设特征线在四维空间中经过 (x, t) 点, 以 τ 表示特征线上的时间参数, 则特征线可以表示为: $\xi = \xi(\tau; x, t)$, 它满足

$$\frac{d\xi}{d\tau} = u(\xi(\tau; x, t), \tau), \quad (1.2.3)$$

$$\xi(t; x, t) = x. \quad (1.2.4)$$

有时为了表示 ξ 是一个五元函数, (1.2.3) 的左端也写成偏微商 $\frac{\partial \xi}{\partial \tau}$ 。对于特征线上的一点 (ξ, τ) , x 称为它的 “Lagrange 坐标”, 沿着特征线, Lagrange 坐标是不变的。

方程 (1.2.2) 的等价形式是

$$\omega(\xi(t; x, 0), t) = \frac{\partial \xi(t; x, 0)}{\partial x} \omega_0(x), \quad (1.2.5)$$

其中 $\omega_0(x)$ 是 ω 的初值 $\omega(x, 0)$ 。将 (1.2.5) 关于 t 求导并利用 (1.2.3) 可以得到另一个也是等价的形式

$$\frac{d\omega(\xi(t; x, 0), t)}{dt} = \frac{\partial u(\xi(t; x, 0), t)}{\partial x} \omega_0(x), \quad (1.2.6)$$

这里要注意的是 ξ, u, x 都是向量, 所有无论方程 (1.2.5) 还是 (1.2.6), 微商 $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}$ 实际上都是 Jacobi 矩阵。

现在我们证明 (1.2.2) 和 (1.2.5) 是等价的, 我们只要证明, 由

(1.2.5)给出的函数 $\omega(\xi, t)$ 满足方程 (1.2.2) 和初始条件就够了, 当 $t = 0$ 时, $\xi = x$, 由 (1.2.5) 直接可以看出 ω 满足初始条件, 由 (1.2.5) 可以导出 (1.2.6), 再用复合函数求微商的锁链公式, (1.2.6)的右端就是

$$\frac{\partial u}{\partial x} \omega_0(x) = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \omega_0(x),$$

再以(1.2.5)代入即得 $\frac{\partial u}{\partial \xi} \omega$, 与(1.2.2)的右端一致. 因此 ω 满足方程(1.2.2). 这样我们已经证明了二者的等价性.

在用涡度法时,需要解(1.2.2)或(1.2.5),右端的微商可以用差分来实现,所不同的是,在(1.2.2)中是关于 Euler 坐标求差分,而在(1.2.5)中则是关于 Lagrange 坐标求差分. 因此,在用(1.2.5)时,我们需要记住每一点涡或涡团中心的原始位置,这是它的不方便之处.

对于三维涡度法,也需要类似于(1.1.5)(1.1.6)的公式,以便从涡度求速度. 这个问题远比二维问题复杂,因为这时我们没有与路径无关的曲线积分,标量的流函数已不复存在. 我们转而考查是否存在向量的流函数. 首先考虑全空间 R^3 的情形,设 u 为空间 R^3 中的一个流场,满足 $\nabla \cdot u = 0$, 我们令 $\omega = \text{curl } u$, 设向量函数 ϕ 为如下 Poisson 方程的解:

$$-\Delta \phi = \omega, \quad (1.2.7)$$

我们希望得到

$$\text{curl } \phi = u, \quad (1.2.8)$$

以算子 curl 作用于方程(1.2.7)得

$$-\text{curl } \Delta \phi = \text{curl } \omega.$$

curl 与 Δ 是可以交换的,即

$$-\Delta \text{curl } \phi = -\text{curl } \Delta \phi.$$

于是

$$-\Delta \text{curl } \phi = \text{curl } \text{curl } \phi,$$

因为 $\nabla \cdot u = 0$, 由场论公式可知