博雅

21世纪数学精编教材

数学教育教学系列

中学数学教师资格考试训练教程

Training Course of Mathematics Teacher's Qualification Certificate for Middle and High Schools

程晓亮 刘 影 主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21世纪数学精编教材
数学教育教学系列

中学数学教师资格考试训练教程

主　编　程晓亮　刘　影
副主编　杨　尚　郑　晨　范兴亚　李松宴
编　著　程晓亮　刘　影　郑　晨　杨　尚
范兴亚　李松宴　李鹏举　刘金福
王　乐　赵红霞

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

中学数学教师资格考试训练教程 / 程晓亮，刘影主编．—北京：北京大学出版社，2016.10
（21世纪数学精编教材．数学教育教学系列）
ISBN 978-7-301-27510-8

Ⅰ. ①中…　Ⅱ. ①程…　②刘…　Ⅲ. ①中学数学课—教学法—中学教师—资格考试—教材　Ⅳ. ①G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第216371号

书　　名	中学数学教师资格考试训练教程 ZHONGXUE SHUXUE JIAOSHI ZIGE KAOSHI XUNLIAN JIAOCHENG
著作责任者	程晓亮　刘影　主编
责任编辑	曾琬婷
标准书号	ISBN 978-7-301-27510-8
出版发行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址	http://www.pup.cn　新浪微博：@北京大学出版社
电子信箱	zpup@pup.cn
电　　话	邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62767347
印 刷 者	北京大学印刷厂
经 销 者	新华书店
	787毫米×980毫米　16开本　26.25印张　551千字 2016年10月第1版　2016年10月第1次印刷
印　　数	0001—3000册
定　　价	56.00元

内容简介

本书主要介绍当前中学数学教师资格考试的基本内容,从内容和解题方法上指导想从事教师工作的职前人员系统学习能够胜任中学数学教师的学科知识和教学知识.全书分为三个部分,第一部分数学学科知识包括第一至四章:第一章介绍数学分析的基本知识和方法,第二章介绍高等代数的基本知识和方法,第三章介绍解析几何的基本知识和方法,第四章介绍概率与统计的基本知识和方法;第二部分数学教育教学知识包括第五、六章:第五章介绍数学课程论的基本知识,第六章介绍数学教学论基本知识与教学实践案例;第三部分是考试大纲与模拟试题.

本书紧密结合考试大纲,涵盖了中学数学教师所必备的高等数学知识和数学教育教学知识;知识点归纳性强、清晰准确,例题丰富、典型,教育教学理论解读翔实,教学案例分析透彻;针对性强,所选取的例题和习题多数为考试真题或者以考试为出发点精心设计的问题,并且根据考试大纲,结合往年的考试真题编制了10套模拟试题.

本书可以作为中学数学教师资格考试的培训教材,也可作为中学数学教师的常用参考资料.

为了方便教师多媒体教学和读者学习,作者提供与本教材配套的相关内容的电子资源,需要的读者请电子邮件联系 chengxiaoliang92@163.com.

“21世纪数学精编教材·数学教育教学系列”书目

1. 数学教学论（第二版）
2. 初等数学研究
3. 数学教学实践（初中分册）
4. 数学教学实践（高中分册）
5. 中学竞赛数学
6. 数学教育测量与评价
7. 中学数学教师资格考试训练教程

作 者 简 介

程晓亮　吉林师范大学数学学院副教授，硕士生导师，数学与应用数学系主任．主要从事多复变与复几何、高师数学教育的研究．主持国家自然科学基金青年基金项目、吉林省自然科学基金青年基金项目等科研项目 5 项，主持吉林省高等教育研究项目 1 项，发表教研和科研论文 20 余篇，主编教材 10 余部．2010 年获吉林师范大学“教学标兵”称号，2014 年获吉林省第二届高校青年教师教学竞赛自然科学基础学科组一等奖．

刘　影　吉林师范大学数学学院教授、硕士生导师、数学学科教学论方向学科带头人，吉林省高等师范院校数学教育研究会副理事长、全国高等师范院校数学教育研究会理事．同时为本科生开设数学教学论、中学数学研究、微格教学、数学教学测量与评价等课程，其中数学教学论课程自 1994 年至今一直是吉林省高等学校优秀课程．主持或参与完成教育部软科学重点研究项目和省级高等教育教学改革项目多项．在《吉林大学学报(理学版)》《中小学教师培训》《中学数学的教与学》等刊物上发表学术论文 30 余篇，主编和参编教材 10 余部．其主编的《数学教学论》教材获 2011 年吉林省优秀教材奖．自 2010 年，指导学生参加“东芝杯”全国师范大学理科生教学技能创新大赛连续 4 次获奖，2011 年获一等奖和创新奖．

前　言

本书是“21世纪数学精编教材・数学教育教学系列”之《中学数学教师资格考试训练教程》.这套教材是为了适应中学数学课程改革而倾心打造的培养数学教育教学能力的系列教材,在其编写和出版过程中,全国众多高等师范院校数学教育教学专家和重点中学的骨干教师参与,扎实地做到了广泛征求意见、积极采纳最新研究和教学实践成果.中学教师参与教材的设计和编写,增强了这套教材的实用性和针对性.可以说,这套教材正是在数学家、数学教育家的大力支持和关心下,形成了独特的风格.目前,这套教材已经形成了电子教案、多媒体课件、标准化试题库等立体化的教学材料.

这套教材形成统一的教学体系,相辅相成又各有所侧重,以数学教育教学理论为核心,按理论篇(《数学教学论(第二版)》)、实践篇(《数学教学实践(初、高中分册)》《初中数学微格教学与教学设计》《高中数学微格教学与教学设计》)、知识篇(《初等数学研究》,《中学竞赛数学》)、技能篇(《数学教育测量与评价》)、综合篇(《中学数学教师资格考试训练教程》)五个主要篇章展开.

理论篇展现的平台是教材《数学教学论(第二版)》,它广泛吸收全国各地数学教育教学的最新理论创新成果和优秀实践经验,力求让读者深刻领悟中学数学课程改革的理念与精神,适应新世纪高等师范院校数学教育教学改革实践.为此,书中用大量笔墨撰写中学数学课程标准解读,把新思想融合在数学教育教学理论和数学教学实践中,全面体现了注重数学教育教学的实践性理念.

实践篇通过《数学教学实践(初、高中分册)》等教材展现,以人民教育出版社出版的初中和高中数学教材(A版)为蓝本,详细阐述该教材内容,进行教材分析,剖析教材重点、难点,给出教学设计建议,并将精选的教学实践案例呈现给读者.

知识篇通过《初等数学研究》和《中学竞赛数学》两部教材展现,它们在内容和难度上互相补充,在介绍知识的来龙去脉的同时阐明方法和技巧.

技能篇中的《数学教育测量与评价》结合当前国内外数学教育评价的先进理念和方法,侧重介绍数学教育评价的基本理论与实践要求.

本书属于综合篇章,主要介绍当前中学数学教师资格考试的基本内容,从内容和解题方法上指导想从事教师工作的职前人员系统学习能够胜任中学数学教师的数学学科知识和教育教学知识.全书分为三个部分,第一部分数学学科知识包括第一至四章:第一章介绍数学分析的基本知识和方法,第二章介绍高等代数的基本知识和方法,第三章介绍解析几何的基本知识和方法,第四章介绍概率与统计的基本知识和方法;第二部分数学教育教学知识包括

第五、六章:第五章介绍数学课程论的基本知识,第六章介绍数学教学论基本知识与教学实践案例;第三部分是考试大纲与模拟试题.本书涵盖了中学数学教师所必备的数学学科知识和数学教育教学知识;知识点归纳性强、清晰准确,例题丰富、典型,教育教学理论解读翔实,教学案例分析透彻;针对性强,所选取的例题和习题多数为考试真题或者以考试为出发点精心设计的问题,并且根据考试大纲,结合往年的考试真题编制了10套模拟试题.它可以作为中学数学教师资格考试的参考书,也可作为中学数学教师的常用参考资料.

全书由程晓亮、刘影确定框架,统稿完成,具体编写分工如下:第一、二章由程晓亮撰写,第三、四章由程晓亮、王乐撰写,第五、六章和第三部分由程晓亮撰写.参加案例编辑和审阅工作的还有刘影、杨尚、范兴亚、李松宴、郑晨、李鹏举、刘金福、赵红霞等.

在本书的编写过程中,诸多同仁给予了大力支持和帮助,本书的出版也得到了北京大学出版社和吉林师范大学的大力支持与帮助,在此一并表示诚挚的谢意.

为了方便教师多媒体教学和读者学习,我们提供与教材配套的相关内容的电子资源,需要的读者请电子邮件联系 chengxiaoliang92@163.com.

程晓亮　刘影

2016 年 5 月

目　录

第一部分　数学学科知识

第二部分 数学教育教学知识

第三部分 考试大纲与模拟试题

第一部分

数学学科知识

第一章 数学分析

第一节 实数集与函数

一、重要知识点

1. 上、下确界的定义

(1) 设 S 为 $\mathbf{R}$ 中的一个数集. 若数 η 满足：对一切 $x\in S$，都有 $x\leqslant\eta$，即 η 是 S 的上界，且对任何 $\alpha<\eta$，存在 $x_0\in S$，使得 $x_0>\alpha$，即 η 又是 S 的最小上界，则称数 η 为数集 S 的**上确界**，记作 $\eta=\sup S$.

(2) 设 S 为 $\mathbf{R}$ 中的一个数集. 若数 ξ 满足：对一切 $x\in S$，都有 $x\geqslant\xi$，即 ξ 是 S 的下界，且对任何 $\beta>\xi$，存在 $x_0\in S$，使得 $x_0<\beta$，即 ξ 又是 S 的最大下界，则称数 ξ 为数集 S 的**下确界**，记作 $\xi=\inf S$.

上确界与下确界统称为**确界**.

2. 关于实数完备性的几个基本定理

确界原理 设 S 为非空数集. 若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界.

单调有界定理 在实数集中，单调有界数列必有极限.

区间套定理 若 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一区间套，则在实数集中存在唯一的点 ξ，使得 $\xi\in[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$.

有限覆盖定理 设 H 为闭区间 $[a,b]$ 的任一（无限）开覆盖，则从 H 中可选出有限个开区间来覆盖 $[a,b]$.

聚点定理 实数集中的任一有界无限点集 S 至少有一个聚点.

柯西收敛准则 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得当 $n,m>N$ 时，有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$ 成立.

致密性定理 任何有界数列必定有收敛的子列.

二、典型例题解析

例 1 叙述数集 A 的上确界定义，并证明：对任意有界数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，总有

$$\sup\{x_n+y_n\}\leqslant\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\},$$

解 若存在数 a 满足下面两条：

(1) 对一切 $x\in A$，都有 $x\leqslant a$；

(2) 对一切 $b<a$，一定存在 $x_0\in A$，使得 $x_0>b$，

则称 a 为数集 A 的上确界，记为 $\sup A=a$.

令 $a=\sup\{x_n\}$，$b=\sup\{y_n\}$，则 $x_n\leqslant a$，$y_n\leqslant b$ $(n=1,2,\cdots)$，所以

$$x_n+y_n\leqslant a+b \quad (n=1,2,\cdots).$$

故

$$\sup\{x_n+y_n\}\leqslant a+b=\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}.$$

例 2 设 S 为非空有下界的数集，证明：

$$\inf S=\xi\in S\Longleftrightarrow\xi=\min S.$$

证明 证"$\Rightarrow$"：设 $\inf S=\xi\in S$. 因为 ξ 是 S 的下确界，所以 ξ 是 S 的一个下界. 于是，对于 S 的任一元素 x，有 $x\geqslant\xi$，所以 ξ 是 S 中最小的数，即 $\xi=\min S$.

证"$\Leftarrow$"：设 $\xi=\min S$，则 $\xi\in S$，并且对于 S 中的任意元素 x，有 $x\geqslant\xi$，即 ξ 是 S 的一个下界. 对于任意 $a>\xi$，取 $x_0=\xi\in S$，则 $x_0<a$. 所以 ξ 是 S 的下确界，即 $\inf S=\xi\in S$.

例 3 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上单调递增，且 $f(a)\geqslant a$，$f(b)\leqslant b$，证明：存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)=x_0$.

证明 用确界原理证明. 若 $f(a)=a$ 或 $f(b)=b$，则结论成立. 下面假设 $f(a)>a$，$f(b)<b$，记 $E=\{x\mid f(x)>x,x\in[a,b]\}$. 因为 $a\in E$，所以 E 非空且有上界 b，从而必有上确界，记 $x_0=\sup E$.

下证 $f(x_0)=x_0$. 对任意的 $x\in E$，有 $x\leqslant x_0$，而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，故 $f(x)\leqslant f(x_0)$. 又 $x\in E$，故有 $x<f(x)\leqslant f(x_0)$，即 $f(x_0)$ 为 E 的一个上界，从而有 $x_0\leqslant f(x_0)$. 另一方面，由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，所以有 $a<x_0\leqslant f(x_0)\leqslant f(b)$. 由此得出

$$f(x_0)\leqslant f(f(x_0)),$$

即 $f(x_0)\in E$. 而 $x_0=\sup E$，故又有 $f(x_0)\leqslant x_0$. 综上所述，有 $f(x_0)=x_0$，$x_0\in(a,b)$ 成立.

例 4 设 $0<c<1$，$a_1=\dfrac{c}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{a_n^2}{2}$，证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明 用数学归纳法易证

$$0<a_n<1 \quad (n=1,2,\cdots). \tag{1.1}$$

下用数学归纳法证明

$$a_{n+1}\geqslant a_n \quad (n=1,2,\cdots). \tag{1.2}$$

显然 $a_2\geqslant a_1$. 归纳假设 $a_k\geqslant a_{k-1}$，则

$$a_{k+1}-a_k=\frac{1}{2}(a_k^2-a_{k-1}^2)=\frac{1}{2}(a_k+a_{k-1})(a_k-a_{k-1})\geqslant 0,$$

从而(1.2)式成立.

由(1.1),(1.2)式可知$\{a_n\}$单调递增有上界,所以$\{a_n\}$极限存在.

例 5 证明:数轴上任何闭区间$[a,b]$上的点是不可列的(不可列指$[a,b]$上的点不能与正整数集$\mathbf{Z}^+$中的点一一对应).

证明 用反证法.若$[a,b]$上的点是可列的,设其为$x_1,x_2,\cdots$,则$[a,b]=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x_k\}$.

将$[a,b]$四等分(注意不取二等分),其中必有一个不含x_1,记为$[a_1,b_1]$;再将$[a_1,b_1]$四等分,其中必有一个不含x_2,记为$[a_2,b_2]$,显然x_1,x_2均不在其中;如此重复进行,得到闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$,且$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{4^n}=0$,同时$x_1,x_2,\cdots,x_n$不含在$[a_n,b_n]$中.根据闭区间套定理,存在唯一的实数$\xi$属于所有区间$[a_n,b_n]$,但$\xi\neq x_n(n=1,2,\cdots)$.这与$\xi\notin[a,b]=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x_k\}$矛盾.故$[a,b]$上的点不可列.

例 6 证明:任何有限数集都没有聚点.

证明 用反证法.设S是一个有限数集,假设ξ是S的一个聚点.按照聚点的定义,在ξ的任何邻域内都含有S中无穷多个点.这个条件是不可能满足的,因为S是一个有限集.故任何有限集都没有聚点.

例 7 证明“ξ为点集S的聚点”的下述定义等价:

(1) 对任意的$\delta>0$,在$U(\xi,\delta)$内含有S中无限多个点;

(2) 对任意的$\delta>0$,在$U^\circ(\xi,\delta)$内含有S中至少一个点;

(3) 存在$\{x_n\}\subset S$,$x_n\neq x_m(n\neq m)$,且有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

证明 (1)⇒(2):显然.

(2)⇒(3):因对任意的$\delta>0$,存在$x\in U^\circ(\xi,\delta)\cap S$,故

取$\delta_1=1$,存在$x_1\in U^\circ(\xi,\delta_1)\cap S$;

取$\delta_2=\min\left\{\dfrac{1}{2},|\xi-x_1|\right\}>0$,存在$x_2\in U^\circ(\xi,\delta_2)\cap S$;

……

取$\delta_n=\min\left\{\dfrac{1}{2^{n-1}},|\xi-x_{n-1}|\right\}>0$,存在$x_n\in U^\circ(\xi,\delta_n)\cap S$.

显然$\{x_n\}\subset S$, $x_n\neq x_m(n\neq m)$, 且有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

(3)⇒(1):由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$知,对任意的$\delta>0$,存在$N$,当$n>N$时,有$x_n\in U(\xi,\delta)$.因$\{x_n\}$是$S$中互不相同的点列,故$U(\xi,\delta)$内含有$S$中无限多个点.

例 8 设$a_n=\dfrac{\sin1}{2}+\dfrac{\sin2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{2^n}$ ($n=1,2,\cdots$),用柯西收敛准则证明:数列$\{a_n\}$收敛.

证明 对任意的 $\varepsilon>0$（不妨限定 $\varepsilon<1$），当 $m,n\in\mathbf{Z}^+$ 时（不妨设 $m<n$），由于

$$\begin{aligned}|a_n-a_m|&=\left|\frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}}+\frac{\sin(m+2)}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}\right|\\&\leqslant\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2^{m+1}}\left(1-\frac{1}{2^{n-m}}\right)}{1-\frac{1}{2}}\\&<\frac{1}{2^m},\end{aligned}$$

要使 $|a_n-a_m|<\varepsilon$，只需 $\frac{1}{2^m}<\varepsilon$，解得

$$m>\log_2\frac{1}{\varepsilon}.$$

取 $N=\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则对任意的 $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，存在 $N=\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当 $m,n>N$ 时，有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$，从而数列 $\{a_n\}$ 收敛.

例 9 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义且每一点有极限，证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

证明 用反证法. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，则对任意的正实数 n，存在 $x_n\in[a,b]$，使得 $f(x_n)>n$. 依次取 $n=1,2,\cdots$，得到数列 $\{x_n\}\subset[a,b]$. 由致密性定理知，存在 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_k}=\xi$. 由 x_n 的选取方法有

$$f(x_{n_k})>n_k\Longrightarrow\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=+\infty.$$

这与 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 处存在极限矛盾，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

例 10 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上无界，证明：

(1) 存在 $\{x_n\}\subset[a,b]$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$；

(2) 存在 $c\in[a,b]$，使得对任意的 $\delta>0$，$f(x)$ 在 $(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$ 上无界.

证明 (1) 因为 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上无界，所以存在 $x_1\in[a,b]$，使得 $|f(x_1)|>1$. 同样由 $f(x)$ 的无界性知，存在 $x_2\in[a,b]$，使得 $|f(x_2)|>\max\{2,|f(x_1)|\}$. 如此继续，可得 $\{x_n\}\subset[a,b]$，满足

$$|f(x_{n+1})|>\max\{n+1,|f(x_n)|\},\quad n=1,2,\cdots,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\infty.$$

(2) 由致密性定理知，(1) 中的数列 $\{x_n\}$ 存在收敛子列，不妨记为本身，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$，此时 c 就是满足要求的点.