



21世纪数学精编教材

数学教育教学系列

中学数学教师 资格考试训练教程

Training Course of Mathematics Teacher's
Qualification Certificate for Middle and High Schools

程晓亮 刘影 主编



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS



21 世纪数学精编教材
数学教育教学系列

中学数学教师资格考试 训练教程

主 编	程晓亮	刘 影			
副主编	杨 尚	郑 晨	范兴亚	李松宴	
编 著	程晓亮	刘 影	郑 晨	杨 尚	
	范兴亚	李松宴	李鹏举	刘金福	
	王 乐	赵红霞			



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

中学数学教师资格考试训练教程 / 程晓亮, 刘影主编. —北京: 北京大学出版社, 2016. 10

(21 世纪数学精编教材. 数学教育教学系列)

ISBN 978-7-301-27510-8

I. ①中… II. ①程… ②刘… III. ①中学数学课—教学法—中学教师—资格考试—教材 IV. ① G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 216371 号

- 书 名** 中学数学教师资格考试训练教程
ZHONGXUE SHUXUE JIAOSHI ZIGE KAOSHI XUNLIAN JIAOCHENG
- 著作责任者** 程晓亮 刘影 主编
- 责任编辑** 曾琬婷
- 标准书号** ISBN 978-7-301-27510-8
- 出版发行** 北京大学出版社
- 地 址** 北京市海淀区成府路 205 号 100871
- 网 址** <http://www.pup.cn> 新浪微博: @北京大学出版社
- 电子信箱** zpup@pup.cn
- 电 话** 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62767347
- 印 刷 者** 北京大学印刷厂
- 经 销 者** 新华书店
- 787 毫米 × 980 毫米 16 开本 26.25 印张 551 千字
2016 年 10 月第 1 版 2016 年 10 月第 1 次印刷
- 印 数** 0001—3000 册
- 定 价** 56.00 元

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有, 侵权必究

举报电话: 010-62752024 电子信箱: fd@pup.pku.edu.cn

图书如有印装质量问题, 请与出版部联系, 电话: 010-62756370

内 容 简 介

本书主要介绍当前中学数学教师资格考试的基本内容,从内容和解题方法上指导想从事教师工作的职前人员系统学习能够胜任中学数学教师的学科知识和教学知识.全书分为三个部分,第一部分数学学科知识包括第一至四章:第一章介绍数学分析的基本知识和方法,第二章介绍高等代数的基本知识和方法,第三章介绍解析几何的基本知识和方法,第四章介绍概率与统计的基本知识和方法;第二部分数学教育教学知识包括第五、六章:第五章介绍数学课程论的基本知识,第六章介绍数学教学论基本知识与教学实践案例;第三部分是考试大纲与模拟试题.

本书紧密结合考试大纲,涵盖了中学数学教师所必备的高等数学知识和数学教育教学知识;知识点归纳性强、清晰准确,例题丰富、典型,教育教学理论解读翔实,教学案例分析透彻;针对性强,所选取的例题和习题多数为考试真题或者以考试为出发点精心设计的问题,并且根据考试大纲,结合往年的考试真题编制了10套模拟试题.

本书可以作为中学数学教师资格考试的培训教材,也可作为中学数学教师的常用参考资料.

为了方便教师多媒体教学和读者学习,作者提供与本教材配套的相关内容的电子资源,需要的读者请电子邮件联系 chengxiaoliang92@163.com.

“21 世纪数学精编教材·数学教育教学系列”编委会

名誉主编：高 旻(东北师范大学)

王光明(天津师范大学)

主 编：刘影(吉林师范大学)

程晓亮(吉林师范大学)

编 委：(按姓氏笔划排序)

马秀梅	王 乐	王 君	王明礼	王玲娣	王 彬
王 琦	王雅丽	朱石焕	刘金福	刘宝瑞	刘 露
孙广才	孙雪梅	牟 欣	杨灿荣	杨 尚	李云晖
李光海	李全有	李春玲	李艳军	李 莉	李唐海
吴晓冬	何素芳	宋士波	张丰硕	张玉环	张 平
张艳霞	张海燕	陈海俊	武江红	苗风华	范兴亚
罗守胜	罗彦东	周仕荣	周其明	周荣昌	郑雪静
郑 晨	居 蕾	柳长青	柳成行	徐 伟	徐传胜
徐苏焦	徐建国	翁小勇	郭凤秀	龚剑钧	盛 登
常金勇	彭 纲	彭艳贵	喇雪燕	程广文	蔡炯辉
潘 俭					

秘 书 长：程晓亮(吉林师范大学)

责任编辑：曾琬婷 刘 勇(北京大学出版社)

“21 世纪数学精编教材·数学教育教学系列”书目

1. 数学教学论(第二版)
2. 初等数学研究
3. 数学教学实践(初中分册)
4. 数学教学实践(高中分册)
5. 中学竞赛数学
6. 数学教育测量与评价
7. 中学数学教师资格考试训练教程

作者简介

程晓亮 吉林师范大学数学学院副教授,硕士生导师,数学与应用数学系主任.主要从事多复变与复几何、高师数学教育的研究.主持国家自然科学基金青年基金项目、吉林省自然科学基金青年基金项目等科研项目5项,主持吉林省高等教育研究项目1项,发表教研和科研论文20余篇,主编教材10余部.2010年获吉林师范大学“教学标兵”称号,2014年获吉林省第二届高校青年教师教学竞赛自然科学基础学科组一等奖.

刘影 吉林师范大学数学学院教授、硕士生导师、数学学科教学论方向学科带头人,吉林省高等师范院校数学教育研究会副理事长、全国高等师范院校数学教育研究会理事.同时为本科生开设数学教学论、中学数学研究、微格教学、数学教学测量与评价等课程,其中数学教学论课程自1994年至今一直是吉林省高等学校优秀课程.主持或参与完成教育部软科学重点研究项目和省级高等教育教学改革项目多项.在《吉林大学学报(理学版)》《中小学教师培训》《中学数学的教与学》等刊物上发表学术论文30余篇,主编和参编教材10余部.其主编的《数学教学论》教材获2011年吉林省优秀教材奖.自2010年,指导学生参加“东芝杯”全国师范大学理科学教学技能创新大赛连续4次获奖,2011年获一等奖和创新奖.

前 言

本书是“21世纪数学精编教材·数学教育教学系列”之《中学数学教师资格考试训练教程》。这套教材是为了适应中学数学课程改革而倾心打造的培养数学教育教学能力的系列教材,在其编写和出版过程中,全国众多高等师范院校数学教育教学专家和重点中学的骨干教师参与,扎实地做到了广泛征求意见、积极采纳最新研究和教学实践成果。中学教师参与教材的设计和编写,增强了这套教材的实用性和针对性。可以说,这套教材正是在数学家、数学教育家的大力支持和关心下,形成了独特的风格。目前,这套教材已经形成了电子教案、多媒体课件、标准化试题库等立体化的教学材料。

这套教材形成统一的教学体系,相辅相成又各有所侧重,以数学教育教学理论为核心,按理论篇(《数学教学论(第二版)》)、实践篇(《数学教学实践(初、高中分册)》《初中数学微格教学与教学设计》《高中数学微格教学与教学设计》)、知识篇(《初等数学研究》,《中学竞赛数学》)、技能篇(《数学教育测量与评价》)、综合篇(《中学数学教师资格考试训练教程》)五个主要篇章展开。

理论篇展现的平台是教材《数学教学论(第二版)》,它广泛吸收全国各地数学教育教学的最新理论创新成果和优秀实践经验,力求让读者深刻领悟中学数学课程改革的理念与精神,适应新世纪高等师范院校数学教育教学改革实践。为此,书中用大量笔墨撰写中学数学课程标准解读,把新思想融合在数学教育教学理论和数学教学实践中,全面体现了注重数学教育教学的实践性理念。

实践篇通过《数学教学实践(初、高中分册)》等教材展现,以人民教育出版社出版的初中和高中数学教材(A版)为蓝本,详细阐述该教材内容,进行教材分析,剖析教材重点、难点,给出教学设计建议,并将精选的教学实践案例呈现给读者。

知识篇通过《初等数学研究》和《中学竞赛数学》两部教材展现,它们在内容和难度上互相补充,在介绍知识的来龙去脉的同时阐明方法和技巧。

技能篇中的《数学教育测量与评价》结合当前国内外数学教育评价的先进理念和方法,侧重介绍数学教育评价的基本理论与实践要求。

本书属于综合篇章,主要介绍当前中学数学教师资格考试的基本内容,从内容和解题方法上指导想从事教师工作的职前人员系统学习能够胜任中学数学教师的数学学科知识和教育教学知识。全书分为三个部分,第一部分数学学科知识包括第一至四章:第一章介绍数学分析的基本知识和方法,第二章介绍高等代数的基本知识和方法,第三章介绍解析几何的基本知识和方法,第四章介绍概率与统计的基本知识和方法;第二部分数学教育教学知识包括

前言

第五、六章:第五章介绍数学课程论的基本知识,第六章介绍数学教学论基本知识与教学实践案例;第三部分是考试大纲与模拟试题.本书涵盖了中学数学教师所必备的数学学科知识和数学教育教学知识;知识点归纳性强、清晰准确,例题丰富、典型,教育教学理论解读翔实,教学案例分析透彻;针对性强,所选取的例题和习题多数为考试真题或者以考试为出发点精心设计的问题,并且根据考试大纲,结合往年的考试真题编制了10套模拟试题.它可以作为中学数学教师资格考试的参考书,也可作为中学数学教师的常用参考资料.

全书由程晓亮、刘影确定框架,统稿完成,具体编写分工如下:第一、二章由程晓亮撰写,第三、四章由程晓亮、王乐撰写,第五、六章和第三部分由程晓亮撰写.参加案例编辑和审阅工作的还有刘影、杨尚、范兴亚、李松宴、郑晨、李鹏举、刘金福、赵红霞等.

在本书的编写过程中,诸多同仁给予了大力支持和帮助,本书的出版也得到了北京大学出版社和吉林师范大学的大力支持与帮助,在此一并表示诚挚的谢意.

为了方便教师多媒体教学和读者学习,我们提供与教材配套的相关内容的电子资源,需要的读者请电子邮件联系 chengxiaoliang92@163.com.

程晓亮 刘影
2016年5月

目 录

第一部分 数学学科知识

第一章 数学分析 (3)

第一节 实数集与函数 (3)

一、重要知识点 (3)

二、典型例题解析 (3)

第二节 数列极限 (7)

一、重要知识点 (7)

二、典型例题解析 (7)

第三节 函数极限 (11)

一、重要知识点 (11)

二、典型例题解析 (12)

第四节 函数的连续性 (15)

一、重要知识点 (15)

二、典型例题解析 (17)

第五节 导数 (20)

一、重要知识点 (20)

二、典型例题解析 (22)

第六节 微分与微分中值定理及其应用 (25)

一、重要知识点 (25)

二、典型例题解析 (28)

第七节 不定积分与定积分 (31)

一、重要知识点 (31)

二、典型例题解析 (35)

第八节 级数 (40)

一、重要知识点 (40)

二、典型例题解析 (46)

习题 1 (52)

本章主要参考文献 (56)

第二章 高等代数 (57)

第一节 多项式 (57)

一、重要知识点 (57)

二、典型例题解析 (60)

第二节 行列式 (63)

一、重要知识点 (63)

二、典型例题解析 (65)

第三节 矩阵 (68)

一、重要知识点 (68)

二、典型例题解析 (71)

第四节 线性方程组 (74)

一、重要知识点 (74)

二、典型例题解析 (78)

第五节 二次型 (81)

一、重要知识点 (81)

二、典型例题解析 (84)

第六节 线性空间 (86)

一、重要知识点 (86)

二、典型例题解析 (88)

第七节 线性变换 (92)

一、重要知识点 (92)

二、典型例题解析 (94)

第八节 欧氏空间 (95)

一、重要知识点 (95)

二、典型例题解析 (97)

习题 2 (98)

本章主要参考文献 (102)

第三章 解析几何 (103)

第一节 空间坐标系与向量 (103)

一、重要知识点 (103)

二、典型例题解析 (106)

第二节 直线和平面 (109)

一、重要知识点 (109)

二、典型例题解析 (113)

第三节 圆锥曲线、曲面及曲面方程 (118)

一、重要知识点 (118)

目录

二、典型例题解析	(125)	原则	(193)
习题 3	(138)	一、对数学的认识	(193)
本章主要参考文献	(142)	二、数学教学原则	(196)
第四章 概率与统计	(144)	第二节 数学教学过程	(201)
第一节 概率	(144)	一、数学教学过程的要素	(201)
一、重要知识点	(144)	二、数学教学过程	(203)
二、典型例题解析	(148)	三、数学教学方法	(207)
第二节 统计	(154)	第三节 几种基本的数学教学类型	(210)
一、重要知识点	(154)	一、数学概念的教学	(210)
二、典型例题解析	(155)	二、数学命题的教学	(221)
习题 4	(160)	三、数学问题解决的数学	(232)
本章主要参考文献	(162)	四、推理的教学	(235)
第二部分 数学教育教学知识		第四节 数学课堂教学设计	(238)
第五章 中学数学课程与课程标准		一、数学课堂教学设计的内涵及	
.....	(165)	意义	(238)
第一节 义务教育阶段数学课程概述	(165)	二、数学课堂教学设计的基本要求	(240)
一、义务教育阶段数学课程性质	(165)	三、数学课堂教学设计的准备	(241)
二、义务教育阶段数学课程基本理念	(165)	四、数学课堂教学设计工作	(242)
三、义务教育阶段数学课程设计思路	(166)	五、数学的有效教学	(251)
第二节 义务教育阶段数学课程目标	(168)	第五节 数学课堂教学技能	(254)
一、总目标	(168)	一、数学课堂的导入技能	(254)
二、学段目标	(170)	二、数学课堂的讲解技能	(258)
第三节 义务教育阶段数学课程标准实施		三、数学课堂的提问技能	(259)
建议	(172)	四、数学课堂的结束技能	(265)
一、教学建议	(172)	五、数学课堂的语言技能	(270)
二、评价建议	(178)	六、数学课堂的板书技能	(274)
第四节 高中数学课程的性质和基本		习题 6	(278)
理念	(183)	本章主要参考文献	(288)
一、高中数学课程目标	(183)		
二、高中数学课程性质	(183)	第三部分 考试大纲与模拟试题	
三、高中数学课程基本理念	(183)	国家教师资格考试大纲：数学学科知识与	
四、高中数学课程设计思路	(186)	教学能力(初级中学)	(293)
习题 5	(189)	国家教师资格考试大纲：数学学科知识与	
本章主要参考文献	(192)	教学能力(高级中学)	(296)
第六章 中学数学教学	(193)	模拟试题(初级中学)及其参考	
第一节 对数学的认识与数学教学		答案	(299)
		模拟试题一	(299)

模拟试题二	(301)	模拟试题一	(330)
模拟试题三	(304)	模拟试题二	(333)
模拟试题四	(307)	模拟试题三	(336)
模拟试题五	(309)	模拟试题四	(338)
参考答案	(312)	模拟试题五	(342)
模拟试题(高级中学)及其参考		参考答案	(346)
答案	(330)	习题参考答案与提示	(366)

第一部分

数学学科知识

第一章

数学分析

第一节 实数集与函数

一、重要知识点

1. 上、下确界的定义

(1) 设 S 为 \mathbf{R} 中的一个数集. 若数 η 满足: 对一切 $x \in S$, 都有 $x \leq \eta$, 即 η 是 S 的上界, 且对任何 $\alpha < \eta$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \alpha$, 即 η 又是 S 的最小上界, 则称数 η 为数集 S 的上确界, 记作 $\eta = \sup S$.

(2) 设 S 为 \mathbf{R} 中的一个数集. 若数 ξ 满足: 对一切 $x \in S$, 都有 $x \geq \xi$, 即 ξ 是 S 的下界, 且对任何 $\beta > \xi$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 < \beta$, 即 ξ 又是 S 的最大下界, 则称数 ξ 为数集 S 的下确界, 记作 $\xi = \inf S$.

上确界与下确界统称为确界.

2. 关于实数完备性的几个基本定理

确界原理 设 S 为非空数集. 若 S 有上界, 则 S 必有上确界; 若 S 有下界, 则 S 必有下确界.

单调有界定理 在实数集中, 单调有界数列必有极限.

区间套定理 若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一区间套, 则在实数集中存在唯一的点 ξ , 使得 $\xi \in [a_n, b_n] (n=1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$.

有限覆盖定理 设 H 为闭区间 $[a, b]$ 的任一(无限)开覆盖, 则从 H 中可选出有限个开区间来覆盖 $[a, b]$.

聚点定理 实数集中的任一有界无限点集 S 至少有一个聚点.

柯西收敛准则 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是, 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n, m > N$ 时, 有 $|a_n - a_m| < \epsilon$ 成立.

致密性定理 任何有界数列必定有收敛的子列.

二、典型例题解析

例 1 叙述数集 A 的上确界定义, 并证明: 对任意有界数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$, 总有

$$\sup\{x_n + y_n\} \leq \sup\{x_n\} + \sup\{y_n\},$$

第一章 数学分析

解 若存在数 a 满足下面两条:

(1) 对一切 $x \in A$, 都有 $x \leq a$;

(2) 对一切 $b < a$, 一定存在 $x_0 \in A$, 使得 $x_0 > b$,

则称 a 为数集 A 的上确界, 记为 $\sup A = a$.

令 $a = \sup\{x_n\}$, $b = \sup\{y_n\}$, 则 $x_n \leq a$, $y_n \leq b$ ($n=1, 2, \dots$), 所以

$$x_n + y_n \leq a + b \quad (n=1, 2, \dots).$$

故

$$\sup\{x_n + y_n\} \leq a + b = \sup\{x_n\} + \sup\{y_n\}.$$

例 2 设 S 为非空有下界的数集, 证明:

$$\inf S = \xi \in S \iff \xi = \min S.$$

证明 证“ \Rightarrow ”: 设 $\inf S = \xi \in S$. 因为 ξ 是 S 的下确界, 所以 ξ 是 S 的一个下界. 于是, 对于 S 的任一元素 x , 有 $x \geq \xi$, 所以 ξ 是 S 中最小的数, 即 $\xi = \min S$.

证“ \Leftarrow ”: 设 $\xi = \min S$, 则 $\xi \in S$, 并且对于 S 中的任意元素 x , 有 $x \geq \xi$, 即 ξ 是 S 的一个下界. 对于任意 $a > \xi$, 取 $x_0 = \xi \in S$, 则 $x_0 < a$. 所以 ξ 是 S 的下确界, 即 $\inf S = \xi \in S$.

例 3 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上单调递增, 且 $f(a) \geq a$, $f(b) \leq b$, 证明: 存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) = x_0$.

证明 用确界原理证明. 若 $f(a) = a$ 或 $f(b) = b$, 则结论成立. 下面假设 $f(a) > a$, $f(b) < b$, 记 $E = \{x \mid f(x) > x, x \in [a, b]\}$. 因为 $a \in E$, 所以 E 非空且有上界 b , 从而必有上确界, 记 $x_0 = \sup E$.

下证 $f(x_0) = x_0$. 对任意的 $x \in E$, 有 $x \leq x_0$, 而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, 故 $f(x) \leq f(x_0)$. 又 $x \in E$, 故有 $x < f(x) \leq f(x_0)$, 即 $f(x_0)$ 为 E 的一个上界, 从而有 $x_0 \leq f(x_0)$. 另一方面, 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, 所以有 $a < x_0 \leq f(x_0) \leq f(b)$. 由此得出

$$f(x_0) \leq f(f(x_0)),$$

即 $f(x_0) \in E$. 而 $x_0 = \sup E$, 故又有 $f(x_0) \leq x_0$. 综上所述, 有 $f(x_0) = x_0$, $x_0 \in (a, b)$ 成立.

例 4 设 $0 < c < 1$, $a_1 = \frac{c}{2}$, $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明 用数学归纳法易证

$$0 < a_n < 1 \quad (n=1, 2, \dots). \quad (1.1)$$

下用数学归纳法证明

$$a_{n+1} \geq a_n \quad (n=1, 2, \dots). \quad (1.2)$$

显然 $a_2 \geq a_1$. 归纳假设 $a_k \geq a_{k-1}$, 则

$$a_{k+1} - a_k = \frac{1}{2}(a_k^2 - a_{k-1}^2) = \frac{1}{2}(a_k + a_{k-1})(a_k - a_{k-1}) \geq 0,$$

从而(1.2)式成立.

由(1.1), (1.2)式可知 $\{a_n\}$ 单调递增有上界, 所以 $\{a_n\}$ 极限存在.

例 5 证明: 数轴上任何闭区间 $[a, b]$ 上的点是不可列的(不可列指 $[a, b]$ 上的点不能与正整数集 \mathbf{Z}^+ 中的点一一对应).

证明 用反证法. 若 $[a, b]$ 上的点是可列的, 设其为 x_1, x_2, \dots , 则 $[a, b] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_k\}$.

将 $[a, b]$ 四等分(注意不取二等分), 其中必有一个不含 x_1 , 记为 $[a_1, b_1]$; 再将 $[a_1, b_1]$ 四等分, 其中必有一个不含 x_2 , 记为 $[a_2, b_2]$, 显然 x_1, x_2 均不在其中; 如此重复进行, 得到闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$, 且 $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{4^n} = 0$, 同时 x_1, x_2, \dots, x_n 不含在 $[a_n, b_n]$ 中. 根据闭区间套定理, 存在唯一的实数 ξ 属于所有区间 $[a_n, b_n]$, 但 $\xi \neq x_n (n=1, 2, \dots)$. 这与 $\xi \in [a, b] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_k\}$ 矛盾. 故 $[a, b]$ 上的点不可列.

例 6 证明: 任何有限数集都没有聚点.

证明 用反证法. 设 S 是一个有限数集, 假设 ξ 是 S 的一个聚点. 按照聚点的定义, 在 ξ 的任何邻域内都含有 S 中无穷多个点. 这个条件是不可能满足的, 因为 S 是一个有限集. 故任何有限集都没有聚点.

例 7 证明“ ξ 为点集 S 的聚点”的下述定义等价:

- (1) 对任意的 $\delta > 0$, 在 $U(\xi, \delta)$ 内含有 S 中无限多个点;
- (2) 对任意的 $\delta > 0$, 在 $U^\circ(\xi, \delta)$ 内含有 S 中至少一个点;
- (3) 存在 $\{x_n\} \subset S, x_n \neq x_m (n \neq m)$, 且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$.

证明 (1) \Rightarrow (2): 显然.

(2) \Rightarrow (3): 因对任意的 $\delta > 0$, 存在 $x \in U^\circ(\xi, \delta) \cap S$, 故

取 $\delta_1 = 1$, 存在 $x_1 \in U^\circ(\xi, \delta_1) \cap S$;

取 $\delta_2 = \min\left\{\frac{1}{2}, |\xi - x_1|\right\} > 0$, 存在 $x_2 \in U^\circ(\xi, \delta_2) \cap S$;

.....

取 $\delta_n = \min\left\{\frac{1}{2^{n-1}}, |\xi - x_{n-1}|\right\} > 0$, 存在 $x_n \in U^\circ(\xi, \delta_n) \cap S$.

显然 $\{x_n\} \subset S, x_n \neq x_m (n \neq m)$, 且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$.

(3) \Rightarrow (1): 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ 知, 对任意的 $\delta > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, 有 $x_n \in U(\xi, \delta)$. 因 $\{x_n\}$ 是 S 中互不相同的点列, 故 $U(\xi, \delta)$ 内含有 S 中无限多个点.

例 8 设 $a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n} (n=1, 2, \dots)$, 用柯西收敛准则证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明 对任意的 $\epsilon > 0$ (不妨限定 $\epsilon < 1$), 当 $m, n \in \mathbf{Z}^+$ 时 (不妨设 $m < n$), 由于

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left| \frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}} + \frac{\sin(m+2)}{2^{m+2}} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{m+1}} \left(1 - \frac{1}{2^{n-m}} \right) \\ &\qquad\qquad\qquad 1 - \frac{1}{2} \\ &< \frac{1}{2^m}, \end{aligned}$$

要使 $|a_n - a_m| < \epsilon$, 只需 $\frac{1}{2^m} < \epsilon$, 解得

$$m > \log_2 \frac{1}{\epsilon}.$$

取 $N = \left[\log_2 \frac{1}{\epsilon} \right] + 1$, 则对任意的 ϵ ($0 < \epsilon < 1$), 存在 $N = \left[\log_2 \frac{1}{\epsilon} \right] + 1$, 当 $m, n > N$ 时, 有 $|a_n - a_m| < \epsilon$, 从而数列 $\{a_n\}$ 收敛.

例 9 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义且每一点有极限, 证明: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

证明 用反证法. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无界, 则对任意的正实数 n , 存在 $x_n \in [a, b]$, 使得 $f(x_n) > n$. 依次取 $n = 1, 2, \dots$, 得到数列 $\{x_n\} \subset [a, b]$. 由致密性定理知, 存在 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$. 由 x_n 的选取方法有

$$f(x_{n_k}) > n_k \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = +\infty.$$

这与 $f(x)$ 在 $x = \xi$ 处存在极限矛盾, 故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

例 10 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上无界, 证明:

- (1) 存在 $\{x_n\} \subset [a, b]$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$;
- (2) 存在 $c \in [a, b]$, 使得对任意的 $\delta > 0$, $f(x)$ 在 $(c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$ 上无界.

证明 (1) 因为 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上无界, 所以存在 $x_1 \in [a, b]$, 使得 $|f(x_1)| > 1$. 同样由 $f(x)$ 的无界性知, 存在 $x_2 \in [a, b]$, 使得 $|f(x_2)| > \max\{2, |f(x_1)|\}$. 如此继续, 可得 $\{x_n\} \subset [a, b]$, 满足

$$|f(x_{n+1})| > \max\{n+1, |f(x_n)|\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty.$$

(2) 由致密性定理知, (1) 中的数列 $\{x_n\}$ 存在收敛子列, 不妨记为本身, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, 此时 c 就是满足要求的点.