线性代数与空间解析几何

程美玉　李　锐◇主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS
黑龙江大学出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

线性代数与空间解析几何

程美玉　李　锐◇主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS
黑龍江大學出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何 / 程美玉，李锐主编. --
哈尔滨：黑龙江大学出版社；北京：北京大学出版社，
2015.9(2017.2 重印)
ISBN 978-7-81129-940-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①程… ②李… Ⅲ.①线性代数-高
等学校-教材②立体几何-解析几何-高等学校-教材
Ⅳ.①O151.2②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 201472 号

线性代数与空间解析几何
XIANXING DAISHU YU KONGJIAN JIEXI JIHE
程美玉　李　锐　主编

责任编辑　魏翕然　李　卉
出版发行　北京大学出版社　黑龙江大学出版社
地　　址　北京市海淀区成府路 205 号　哈尔滨市南岗区学府路 74 号
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　720×1000　1/16
印　　张　16
字　　数　314 千
版　　次　2015 年 9 月第 1 版
印　　次　2017 年 2 月第 3 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-81129-940-3
定　　价　27.00 元

前 言

随着技术的迅速发展, 数学已被广泛地应用到相关的科学领域及生产实践中. 线性代数与空间解析几何是大学数学的一门重要的基础课程, 书对教与学的效果起着重要作用. 本书是按照教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会提出的"大学数学基础课程基本要求"中的经济和管理类、工科类本科数学基础教学要求, 在总结教学经验, 同时吸收同类书的精华的基础上编写的.

本书在编写时, 注重了对线性代数的基本思想与基本方法的介绍, 力求简洁、明了; 同时, 考虑到相关学科知识结构的需要, 对一些概念、方法尽可能地加以解释, 在为其他学科奠定良好基础的同时, 使学生的数学素养与能力得到提高.

按"大学数学基础课程基本要求", 本书将部分内容标星号 (*), 在使用过程中, 主讲教师可以根据不同专业的授课对象进行适当调整. 书后附有参考答案, 便于学习.

本书的第 1—4 章由程美玉编写, 第 5—7 章由李锐编写, 附录部分由两人共同完成.

本书的出版得到了北京大学出版社、黑龙江大学出版社、黑龙江大学数学科学学院有关领导的大力支持, 黑龙江大学的赵军生、李春明等老师为本书提出了宝贵意见, 在此一并致谢.

由于编者水平所限, 同时编写时间也比较仓促, 因此书中难免存在不足之处, 敬请广大读者给予批评与指正, 以便进一步完善.

编　者

2015 年 7 月

内容简介

本书内容包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、平面方程和空间直线方程、二次型与对称阵、空间曲面与空间曲线等，书后附有部分习题参考答案. 不论是教学还是自学，本书都是很好的选择.

本书可作为高等院校经济管理及理工科（非数学类）相关专业的教材，也可作为教师、学生和工程技术人员的参考书.

目　录

第 1 章　行列式

行列式是一个重要的数学工具，是线性代数必不可少的内容，它不仅在数学中的某些领域有重要应用，而且在自然科学及社会科学的许多领域里都有着广泛的应用．本章主要介绍行列式的定义、行列式的性质及计算、克莱姆法则等．

§1.1　行列式定义

1.1.1　二阶与三阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1.1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (1.2) \end{cases}$$

由 $(1.1) \times a_{22} - (1.2) \times a_{12}$ 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

类似由 $(1.2) \times a_{11} - (1.1) \times a_{21}$ 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，求得上面方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.3}$$

如果将 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 用下面记号表示，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.4}$$

称 (1.4) 式为 **二阶行列式**，简记为 D(为表明行列式的阶数也可记为 D_2)，有时写成 $D = |a_{ij}|$，其中 a_{ij} 表示行列式 D 的位于第 i 行第 j 列的元素 (或元)．此时称 D 为上述二元线性方程组的系数行列式．当 $D \neq 0$ 时，该方程组的解可以写成

$$x_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

类似地，对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

引进记号

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ =\ & a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

称 (1.5) 式为 **三阶行列式**. 上述方程组当系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，解可以写成

$$x_1=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad x_2=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad x_3=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

1.1.2　排列与逆序

由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数按照任意顺序组成的 n 元有序数组称为一个 n 级排列. 例如, 1234 和 2413 都是 4 级排列, 25314 是一个 5 级排列.

定义 1.1.1 在一个 n 级排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中，如果 $j<k$ 且 $i_j>i_k$, 则称 i_j,i_k 构成一个 **逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数, 称为它的 **逆序数**, 记为 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$.

例如，$\tau(12\cdots n)=0$，$\tau(2143)=2$，$\tau(54312)=9$.

定义 1.1.2 逆序数为奇数的排列称为 **奇排列**, 逆序数为偶数的排列称为 **偶排列**.

由上述可知 $12\cdots n$ 和 2143 是偶排列， 54312 是奇排列.

定义 1.1.3 在一个 n 级排列中，将其中某两个元素对调位置而其余元素的位置保持不变，称对这个排列进行一次 **对换**.

例如，将排列 21354 中元素 1 与 5 做对换得到排列 25314.

定理 1.1.1 对一个排列进行一次对换，则奇排列变成了偶排列，偶排列变成了奇排列，即对换改变排列的奇偶性.

证明 第一步，首先考虑对换一个排列中相邻两个数码的特殊情形. 设排列写为 $AabB$, 其中 A 表示数码 a 前面的部分， B 表示数码 b 后面的部分. 调换 a 与 b 的位置后，排列变成 $AbaB$. 比较 $AabB$ 与 $AbaB$ 两个排列中的逆序，显然， A, B 中的元素的次序没有改变，并且元素 a, b 与 A, B 中元素的次序也没有改变，仅仅改变了 a 与 b 的次序. 所以，当 $a < b$ 时， $AbaB$ 比 $AabB$ 增加一个逆序，当 $a > b$ 时， $AbaB$ 比 $AabB$ 减少一个逆序. 因此排列的奇偶性改变了.

第二步，讨论一般情形，即考虑对换一个排列中任意两个数码的情形. 设排列写为 $AaBbC$, 其中 a 与 b 中间的部分 B 由 r 个数码组成. 对换 a 与 b 则排列变成 $AbBaC$. 这个过程可以认为是先将 $AaBbC$ 中的数码 a 与 B 中的 r 个数码依次做相邻对换得到排列 $ABabC$, 再经过 $r+1$ 次依次相邻对换得到排列 $AbBaC$. 一共进行了 $2r+1$ 次对换，由第一步可知排列的奇偶性改变了.

定理 1.1.2 在全部 $n!$ 个 n 级排列中，奇排列和偶排列的个数是相等的，各有 $\dfrac{n!}{2}$ 个.

证明 假设在 $n!$ 个 n 级排列中有 s 个奇排列， t 个偶排列.

将这 s 个奇排列的头两个数码都对换一下，即将 $a_1a_2\cdots a_n$ 变换为 $a_2a_1\cdots a_n$, 就得到 s 个偶排列，而且这 s 个偶排列各不相同. 已知偶排列一共有 t 个，所以 $s \leqslant t$. 再将 t 个偶排列的头两个数码都对换一下，得到 t 个不同的奇排列，因此 $t \leqslant s$. 由此得 $s = t$, 即奇排列的总数与偶排列的总数一样. 因为这两种排列一共有 $n!$ 个，所以它们各有 $\dfrac{n!}{2}$ 个.

1.1.3 n 阶行列式

由 (1.4), (1.5) 式二阶和三阶行列式的定义可以看出，它们都是一些乘积的代数和，而每一项乘积都是由行列式中位于不同行和不同列的元素构成的，并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成的. 在 $n=2$ 时，由不同行不同列的元素构成的乘积只有 $a_{11}a_{22}$ 与 $a_{12}a_{21}$, 在 $n=3$ 时，由 (1.5) 式可以看出有 6 项. 这是二阶行列式和三阶行列式的一个特征. 另一方面，每一项乘积都带有符号. 这符号是按什么原则决定的呢？在三阶行列式的展开式 (1.5) 式中，项的一般形式可以写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是 $1,2,3$ 的一个排列. 可以看出，当 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时， (1.5) 式中的对应项带有正号，当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时， (1.5) 式中的对应项带有负号. 二阶行列式也符合这个原则. 由此推广可得 n 阶行列式定义.

定义 1.1.4 由 n^2 个数 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**, 它表示所有可能取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 所有 n 级排列求和.

行列式简记为 $|a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$.

这个定义说明 n 阶行列式展开式恰好有 $n!$ 项求和, 每一项都是由取自不同行不同列的 n 个元素的乘积再放上适当的正负号构成的, 即当行标排列为 $12\cdots n$ 时, 看列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$, 如果 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列则取正号, 如果 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列则取负号. 定义中并未说明行列式的每一项的 n 个元素乘积是按照行标自然顺序排列的, 按照定义 1.1.4, n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的一般项可以记为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{1.6}$$

其中 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 与 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 均为 n 级排列.

由乘法的交换律及定理 1.1.1 可以知道, (1.6) 式经过 s 次对换, 因子的次序改变成

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(l_1l_2\cdots l_n)} a_{1l_1}a_{2l_2}\cdots a_{nl_n} = (-1)^{\tau(l_1l_2\cdots l_n)} a_{1l_1}a_{2l_2}\cdots a_{nl_n},$$

其中 $l_1\ l_2\ \cdots\ l_n$ 是一个 n 级排列, 同时行标排列 $i_1\ i_2\ \cdots\ i_n$ 与列标排列 $j_1\ j_2\ \cdots\ j_n$ 分别经过 s 次对换变到 $1\ 2\ \cdots\ n$ 与 $l_1\ l_2\ \cdots\ l_n$, 它们的奇偶性分别改变了 s 次, 总共改变了偶数 $2s$ 次, 所以

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} = (-1)^{\tau(l_1l_2\cdots l_n)} a_{1l_1}a_{2l_2}\cdots a_{nl_n},$$

这说明 (1.6) 式是行列式的一般项. 从而 n 阶行列式也可以定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是一个 n 级排列, $\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 表示对 $1, 2, \cdots, n$ 所有 n 级排列求和.

例 1.1.1 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

这是一个四阶行列式, 在展开式中应该有 $4! = 24$ 项. 但是由于出现了许多 0, 所以不等于 0 的项数就大大减少了. 我们只需找出那些不等于 0 的项就可以了. 因为行列式中一共只有 4 个元素不等于 0, 而且这 4 个元素刚好位于不同行不同列, 所以这个行列式的展开式中只有一项 $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$, 它所带符号需要由这 4 个元素的位置决定. 将 1, 2, 3, 4 按行的顺序排好, 它们所在的列依次是 4, 3, 2, 1, 所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4321)} 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

在一个行列式中, 经常把从左上角到右下角的对角线称为 **主对角线**, 把从右上角到左下角的对角线称为 **次 (副或反) 对角线**. 我们把主对角线下方元素都是 0 的行列式称为 **上三角形行列式**, 主对角线上方元素都是 0 的行列式称为 **下三角形行列式**, 主对角线以外的元素都是 0 的行列式称为 **对角形行列式**.

例 1.1.2 计算上三角形行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

根据行列式定义, 展开式一般项形式是

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

由题可知这个行列式的第 n 行中, 除 a_{nn} 外, 其他元素都是 0, 所以 $j_n \neq n$ 的项 $a_{nj_n} = 0$, 所以只需考虑 $j_n = n$ 的项 a_{nn} 即可; 再看第 $n-1$ 行, 这一行中除去 $a_{n-1,n-1}$ 及 $a_{n-1,n}$ 外, 其他元素都是 0, 因此 j_{n-1} 只有 $n-1$, n 两个可能. 但是我们已经知道 $j_n = n$, 由行列式定义可知 $j_{n-1} \neq j_n$, 所以只有 $j_{n-1} = n-1$. 依次类推可得行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

上例说明上三角形行列式等于主对角线上元素乘积. 同样计算可得, 下三角形行列式以及对角形行列式的值都是主对角线上元素的乘积.

习　题　1.1

1.1.1 计算下列二阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ a & b \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$.

1.1.2 计算下列三阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ a & b & c \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$.

1.1.3 计算下列排列的逆序数

(1) 3421;　　(2) 13452;

(3) 235641;　　(4) $n(n-1)\cdots 21$.

1.1.4 写出四阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中含有因子 a_{12} 且带有负号的项.

1.1.5 用行列式定义计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & d & 0 & 0 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

§1.2　行列式的性质

由 n 阶行列式的定义可知, 计算一个 n 阶行列式, 需要计算 $n!$ 个 n 个元素的乘积, 所以一共需要做 $n!(n-1)$ 次乘法, 当 n 比较大时, 其计算量相当大. 因此, 必须对行列式做进一步的研究, 找出其他切实可行的计算方法. 为此我们研究行列式的性质.

性质 1.2.1 如果将行列式的第 i 行的每一个元素都写成两个数的和的形式，则这个行列式等于两个行列式的和，这两个行列式分别用两个加数之一作第 i 行，其余各行都与原来行列式的相同，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 由行列式的定义

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &\quad + \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= \text{右端}. \end{aligned}$$

容易看出，**这个性质可推广到一行中每个元素都是 m 项的和的情形**.

性质 1.2.2 用一个数 λ 乘以行列式，等于用数 λ 乘以该行列式的某一行的所有元素，即

$$\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 由行列式的定义

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \lambda \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots \lambda a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} = \text{右端}. \end{aligned}$$

性质 1.2.3　交换行列式的任意两行，则所得行列式与原行列式反号.

证明　设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i \neq k),$$

交换第 i 行与第 k 行，得到行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

由行列式的定义

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n} \\ &= -\sum_{j_1 \cdots j_k \cdots j_i \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_k \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= -D_1. \end{aligned}$$

性质 1.2.4　如果行列式中有两行的对应元素相同，则此行列式的值为零.

证明　由于行列式中有两行的对应元素相同，将这两行交换后的行列式与原行列式相同，由性质 1.2.3 可知该行列式的值为零.

性质 1.2.5　如果行列式中有两行的对应元素成比例，则此行列式的值为零.

证明　假设行列式中第 i 行的元素是第 k 行的对应元素的 λ 倍，利用性质 1.2.2 从第 i 行的元素中提出因数 λ 后的行列式是有两行的对应元素相同的，由性质 1.2.4 可知该行列式值为零.

性质 1.2.6　将行列式的某一行的所有元素同乘以数 k 加到另一行的对应元素