李学荣编著

四连杆机构综合概论

第二册

机械工业出版社

序　　言

机构综合学是从研究刚性机构的综合开始，逐渐扩展到带挠性的、带弹性的、气动或液动可变长度杆的、以至带电气及电子元件的机构综合方法。

从广义机构综合学来看，这门学科不仅要讨论刚性的强制运动链，应当还要讨论并非单纯是刚性的强制运动链[35]㊀，研究运动杆如何能够执行预期的规律运动，以便创制各种机器帮助人们工作，改善劳动条件，提高劳动生产率。

由于各种机器不全然是依靠刚性运动链构成机构，往往还要包含非刚性的杆或元件才能达到强制运动的目的，因此，运用以讨论刚性机构为主的狭义机构综合学来解决机器与机构的组成规律是不够全面的。

广义机构综合学目前还不完整，甚至尚未明确它应当研究的范围，只是提出了这样一个问题，必须发展这种广义机构综合——不仅是刚性强制运动链综合方法的研究㊁。广义机构综合学不是全部建立在机械原理的基础上，它还要应用物理学中的许多分支，特别是刚体力学、流体力学、热力学、电学、电子学等等，作为更高的指导原则。

机构综合学是一门不够完整、非常年轻的学科，但仅就

㊀ 方括弧内为参考文献编号，编号〔53〕以前载于第一册，本册由〔54〕～〔134〕详见326～331页。

㊁ 见И. И. Артоболевский. Основные проблемы теории машин и механизмов, Изд-во АН СССР, М. 1956.

刚性机构综合学而言，国外有关这方面的论文，约已有三千篇之多。可是以机构综合命名的较有系统的著作，仅有屈指可数的几册[11][14][19][38][48][56]，利用它们来解决问题，自然有一定的局限性；尽管如此，如从已有的研究成果来全面检阅，仍可以显露出这门学科的重大作用，为新机器、机构的设计，提供了有力的理论基础与有效的具体解法。

刚性机构综合学建立在机械原理的基础上，它一方面把机械原理中的分析反过来用于综合，另一方面则是更深入地分析最简机构的运动特性，促进要求更高的机构综合方法的发展。由于机器与机构毕竟是以刚性杆为主，虽然刚性机构综合学还未臻完善，但在强制运动链的范畴，总算有了一些基本理论可循，并且在实践——理论——实践的过程中螺旋上升，日益发展完善，目前已成为机械原理中的一个独立分支，并将逐渐形成完整体系。目前在利用刚性机构综合研究成果的同时，对于处理超出强制运动链范围以外的问题，需要以力学及物理学作为指导原则。

刚性机构综合的方法是建立在低副平面机构综合方法的基础上，而低副平面机构综合的基本理论又是建立在运动杆最少的四连杆机构综合理论的基础上。在国外，这从追溯戚贝舍夫（П. Л. Чебышев）学派或是累罗（F. Reuleaux）学派的发展来源，都能证实这种迹象。连杆机构综合是机构综合学中最基本的组成部分，又是比较困难的部分。自从1853年戚贝舍夫发表经典著作“平行四连杆机构原理”（Теория механиэмов, известных под названием параллелограмов）以及1888年布尔梅斯特尔（L. Burmester）发表累罗学派的奠基著作“运动学教科书”（Lehrbuch der kinematik）以来，一直到 1921 年阿耳特（H. Alt）发表“平面机构的

综合”（Zur synthese der ebenen Mechanismen）这一时期，逐步明确了尺度综合的含义、应用及其重要性。其后，在有关机构综合的文献中，绝大部分是讨论连杆机构特别是四连杆机构的综合理论，从而奠定了机构综合的基础。近十数年来，从阿尔托包列夫斯基（И. И. Артоболевский）、杜勃罗沃尔斯基（В. В. Добровольский）、列维特斯基（Н. И. Левитский）、拜耳（R. Beyer）、克劳斯（R. Kraus）、卡佩伦（Meyer Zur Capellen）、海因（K. Hain）等人的著作中，都可以见到低副机构综合与高副机构综合理论基础的某些共同性、低副机构综合理论对于高副机构综合的指导性意义及高副机构综合理论对于低副机构综合的促进作用等，这些将构成统一的体系。由此可见，研究机构综合，首先掌握连杆机构，特别是运动杆最少的四连杆机构，成为必经之途。并且，四连杆机构的综合理论，已经成为这门学科的探索发轫。

从实用上来看连杆机构，仅以四连杆机构为主的应用而言，利用串联法（Three-Bar Linkages in Series）即可构成多杆机构[12]，这些机构（连同四连杆机构本身）在农业机械化（拖拉犁的提升悬挂机构）、建筑机械化、装卸机械化、搬运机械化、沉重工作机械化及产品加工过程的全部机械化等等方面，均有广泛的应用；使以下各种工业中能利用它们创制出各种新颖的产品，如纺织业、针织业、轻工业(特别是印刷、造纸、制瓶、包装等)、交通运输业(如电力机车的集电弓、转向控制机构、无人驾驶控制机构等)、动力机械(如大功率启动开关、透平叶片控制机构等)、航空工业（如飞机的起落架、襟翼、横舵等操纵机构)、国防工业（如炮火控制仪，射击瞄准机构等)、医疗器械工业（如人造腿肢)及

日用品工业（如照相机、缝纫机、打字机及机械式台式计算机等）等。在机械制造业本身，特别是精密仪器制造工业，往往需用各种连杆机构作为核心部件；切削特殊的几何型体，利用连杆机构比用仿形机床或程序控制机床省时价廉；在机械加工的全盘机械化工作中，工序的衔接，如进给、停歇、转位、取料等等的装置，运用连杆机构的地方不断增加。在许多工业的作业过程自动化工作中，利用连杆机构可作为控制、计算、执行的统一机构（如化工生产中的阀门启闭机构）。在尖端科学研究中，也有连杆机构的应用事例（如原子能工业用的机械手、火箭阀门的控制机构）。由此可见，古老的连杆机构的新应用，可算是仅仅初露头角，发展前途正方兴未艾。

连杆机构的用途如此之多，研究人员与设计人员利用它们企图解决的问题，目的极不一致，在目前的机构综合著作中，不可能针对这些迥然不同的要求，一一作出解题方法的叙述，因此在机构综合学上只能对各种问题的共同关键——运动规律实现的方法加以阐明。按照伊·伊·阿尔托包列夫斯基的提法，低副平面机构的综合可分为两大问题来讨论、研究：一为运动杆的位置问题，一为复演轨迹问题。

本书第一册中曾叙述了四连杆机构的一般知识，本册中对尺度综合问题进行了探讨，而在尺度综合的问题中，我们在这里以位置问题作为讨论的提纲。

尺度综合的方法有实验法、分析法、几何法三大类，前两种方法在现有书籍中已作了或多或少的介绍，而几何法的基本内容，在已出版的典籍中还很少谈起或是语焉不详，特别是布尔梅斯特尔所创立的几何法（以中点曲线与圆点曲线为其核心内容）在文献中尚属空白，而这些理论与法则，经

常为近代论文所引用，为了弥补此项缺陷，作者在本册中作一些初步介绍。

几何法的优点是可以举一反三地加以应用。结合低副运动的可逆性与相对位移决定法这两大法则，能将多位置的问题归结为有限的少数位置问题求解，或者说，精通了几个位置的综合方法，解题能力可扩展到对多位置的问题作答。而分析法恰相反，属于几个位置的问题，则需以相应的数式进行运算，不可逾越。近数年来，在几何法与分析法各自发展的基础上，共同创立了几何分析法，这些方法既有几何法举一反三的优点，又有分析法较几何法更为精确地决定机构参数的可能，特别是避免了繁琐的作图与极点超出纸外的烦恼，宁愿作一些必要的计算（但工作量仍较纯粹的分析法为少）。作者希望几何法能首先得到重视，然后进一步发展几何分析法，创立实用的工程方法，推动这门学科前进，发掘连杆机构的用途，为我国社会主义建设事业服务。

本册讨论了极、镜极、极三角形与镜极三角形的性质，运动杆相对运动位置的决定法，相对极与极的位置关系，三位置综合应用的曲线——R_M 及 R^1曲线，四位置综合应用的曲线——属于焦点曲线的极位曲线（包括中点曲线与圆点曲线），以及这些曲线上的点位对应关系。并叙述了在运动杆作绝对运动时，中点曲线和圆点曲线如何互换作用；在运动杆作相对运动时，两组曲线如何互换作用。在叙述时，以位置问题为经，以上述各项理论为纬，说明了解题思路后，总结出解题步骤，并附有若干例题（这些应用示例未全部列于目录中），用以体现理论在设计工作中如何应用。写作上的这样安排，希望能引起讲授、应用、研究连杆机构的兴趣和重视，使这门学科在我国生根，得到应有的发展。

全书共计四册：

第一册　　绪论　　对创始意念设计与机构学的表里关系作出初步的阐明。对连杆机构作出一览性概述。

第二册　　位置问题　　主要叙述机构设计中的位置问题及如何利用有限接近位移理论（Burmester 理论）求解。

第三册　　气液动连杆机构　　主要叙述气液动连杆机构及如何利用极-力（Pol-Force）方法求解。

第四册　　连杆曲线及其应用　　主要叙述连杆曲线的性质及如何利用无限接近位移理论（Eular-Savary 等人的理论）求解机构。

作者短于切磋，水平有限，书中不确切与错误之处，自审难免，希望专家和读者们予以指教，俾能获得改正的机会。

原稿的誊清、整理，承任治瑾、李国瑞、张树泉三位同志的协助，特别是李、张两位同志对本册的内容安排与叙述方法提供了宝贵意见，使本书达到问世的雏形；书中部分插图承陆有光、沈英两位同志精心绘制，作者在此对以上各同志一并致谢。

作　　者

1962.5.11 日于京郊皂君庙

目　次

序言

第六章 用几何法解决四连杆机构的尺度综合问题

§6.1 根据运动杆的两个位置设计四连杆机构

6.1-1 位置问题 在本书第一册中，扼要地阐明了四连杆机构的类型及其转化与扩充，以供作型综合时的选型参考；在本册中将讨论［有限接近位移］的位置问题，以及某些与基本尺度综合方法有关的运动学理论基础，以供作尺度综合时的解题参考。

如果规定一个运动平面（运动杆）E 作平面运动时，必须由它的第一个位置 E_1，连续地经行它的第二个位置 E_2、第三个位置 E_3……，直至第 n 个位置（$n=1, 2, 3\cdots\cdots$）E_n，今需探索一个机构，其中的某一运动杆能经行预期的这若干个位置，这样的机构设计问题，称为复演预期位置问题[3][27][38][44][48]。

复演预期位置问题中，其要求条件是多种多样的。一般说来，大致可分为下列三种类型：

（1）按照运动杆上某一点必须经行若干预期的位置（点位）设计机构[71][72][79][85][97]；

（2）按照机构上某一运动杆必须经行若干预期的位置设计机构[31][34][39][70][75]；

（3）按照输出、输入杆的相应角移量设计机构（参阅第一册）[91][98][12][56]。

现在我们按照上述三种不同的要求条件，区别位置问题的性质。

1）按照运动杆上某一点复演预期位置，只要求运动平

面上（运动杆上）有一个点符合预期的运动规律便够了。当预期经行的点位的数量多到一定程度时，便成为近似复演预期轨迹（平面曲线）的问题[68][69]。

由于和固定杆相铰接的任何一杆只能作转动，所以在这些运动杆的平面上任意点的运动轨迹都是圆弧，而连杆平面上的点才能经行各式各样的平面曲线（六阶以下的平面曲线）。因此，按照预期点位设计机构，一般说来，都是对四连杆机构中的连杆有这样的要求。

在不规定各杆尺度情况下，按照点位设计机构，可以归纳为根据不同的方案，作为预期连杆位置的机构综合问题求解。

例如在图 6.1-1 中，要求运动平面上的某点C，经行C_1、C_2、C_3三点位，可以由不同的连杆位置（A_iB_i和$A_i'B_i'$）㊀来实现。

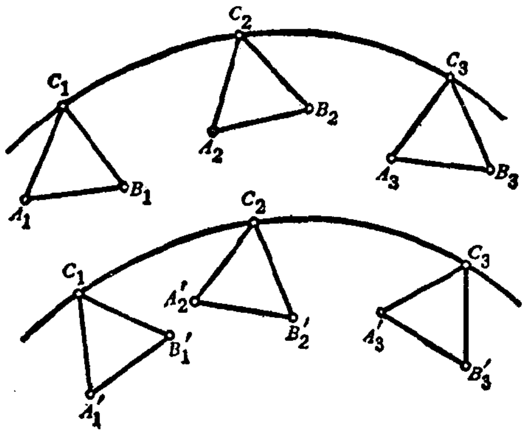

图6.1-1　按照点位设计机构，可选用不同方案作为预期连杆位置问题求解

㊀ 在这里 i 表示 1，2，3……，在后文中，也是这样表示。

按照点位设计机构时，如果规定各杆的尺度，或是要求经行的点位较多，这便需要按照复演轨迹问题处理。

按照预期的两个点位设计机构的问题，在实际应用中较少，因为通过两点，可任意作多种曲线。如图 6.1-2 中，要求四连杆机构 1、2、3、4 连杆平面上的 E 点只经行 E' 与 E'' 两点位[1]。如果既不规定 E'、E'' 两点间的轨迹，又不规定各杆的尺度，显然，可按照图 6.1-1 中的办法求解，但实际应用中，很少会有这样要求极不明确的问题。如果要求 E 点经行在一直线上的 E'、E、E'' 三点位，则成为近似复演直线问题，罗伯次(Roberts)曾用对称杆长的四连杆机构，求出解答如下：

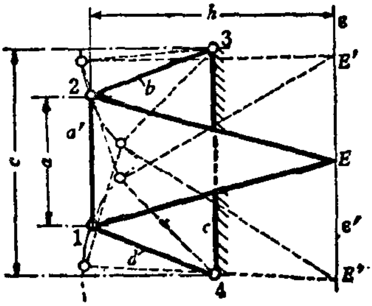

图6.1-2 按照点位设计机构的例子。罗伯次近似直移机构

$$\frac{b}{c}=0.584, \quad \frac{a}{c}=0.593,$$

$$\frac{h}{c}=1.112。$$

2）按照预期的运动杆位置设计机构，就是对运动杆上某两点同时提出位置要求，因为一根杆的位置，至少要根据这根杆平面上两个点才能决定。显然，这类问题的求解条件，较第 1）类的问题要严些。

在四连杆机构中，与固定杆铰接的两杆都只能是转动，也就是说，在运动杆的平面上，有一个点始终不变位。因而

[1] 这里仅说明问题的性质，不推导解法。按照两点位设计机构问题参阅 6.1-9段。

对于这两根杆，不能提出绕定点作转动以外的变位要求。由此可见，复杂的预期运动杆位置问题，一般说来，只能由连杆平面去实现。

为了形象化说明问题，举一个按照运动杆两位置设计机构的图例。飞机上襟翼操纵机构，可按连杆两位置来设计。飞机起飞时要求由襟翼产生不同的升力，而不同的升力，则由襟翼的不同位置来获得。在图 6.1-3 中，规定襟翼的两位置为 BC 与 B_1C_1，它们与机身的相对位置如 $ABCD$ 及 $A_1B_1C_1D_1$（实线表示正常位置，虚线表示工作位置）。在这里 AD 是四连杆机构的固定杆，BC 为连杆，AB 与推动杆相铰接，而 CD 为另一根与固定杆相铰接的杆。

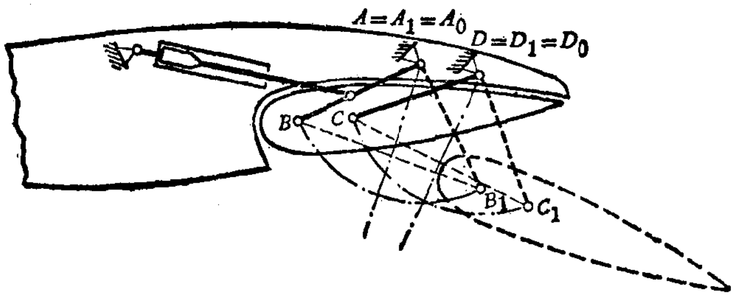

图6.1-3 规定运动杆两位置设计机构。飞机的襟翼机构

3）按照输出、输入杆的相应角移量设计机构时，对于和固定杆相铰接的两杆总是有以下的要求：即当一杆转动 φ 角时，另一杆转动 ψ 角（参阅图 6.1-10）。如果这种成对的角移量（φ_i，ψ_i）的对数多至一定程度时，则成为近似地复演预期函数问题。利用四连杆机构可做成许多近似模拟计算装置，针对这种要求，深入地探讨，可从位置问题中再分出连杆机构作为计算机构的设计问题。

为了说明这类问题的性质，举例如下。在图6.1-4中，有一精密气压表，当膜盒1及2受到气压作用时，表的指针作位移变化，根据位移量可读出压力值。这种运动的转换，可由四连杆机构来实现。膜盒运动时，CD杆成为输入角移杆，AB成为输出角移杆，AD为固定杆，BC为连杆；利用扇形齿轮使指针转动。

复演预期位置问题，大体上虽可作如上的分类，但多数机构的尺度综合问题，还不能单纯地按照上述分类情况来讨论，譬如：有些机构不但要求运动杆经行预期的许多位置，还规定了机构中某些杆件的尺度，因此在设计时，需在已知某些杆件的尺度条件下，补足另一些杆件的尺度，具体说来，也就是需决定未知杆件的铰接中心；有些机构既需输出杆、输入杆有相应的角移量，同时又需连杆经行若干预期的位置，这就成为角移量与连杆位置的复合问题；又如某些机构既需运动杆上某点经行预期的若干点位，又需输出杆、输入杆间有相应的角移量，这便成为点位与角移量同时要求的复合问题；有时在要求很严的设计问题中，甚至既要求复演预期点位，又要求杆件有相应的经行位置，同时还要求输出杆、输入杆作相应的角位移，像这种问题，十分复杂，求解也较难。

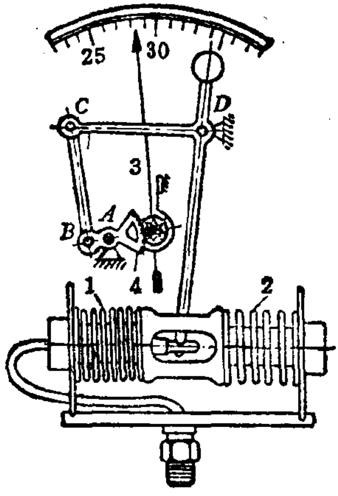

图6.1-4　按照相应角移量设计机构的例子。精密气压表

在作尺度综合时，理想的解答是应当采用杆件最少的机构来满足提出来的各项要求。

6.1-2　根据连杆的两个位置设计四连杆机构　在图6.1-5中，若 $E_1=A_1B_1$ 与$E_2=A_2B_2$ 是运动平面E上预期经行的两个有限接近位置，那末，运动平面E由第一位置E_1运动到第二运动位置E_2，相当于运动杆由 A_1B_1 运动到A_2B_2，因此我们可以把 A_1B_1 和 A_2B_2 作为四连杆机构中连杆AB的两个连续经行位置看待，$A_1B_1=A_2B_2$ 为连杆的长度，在运动前后尺度是不会改变的。求此机构其余各杆尺度时，可按下述步骤进行。

根据平面运动学[14][61][55]可知，所谓运动平面上的［极点］（简称为极），是指该平面上这样的点：

（1）如果作有限接近位移时，其位移为零的点；

（2）如果作无限接近位移时，其速度为零的点。

此外，若在作有限接近位移时，如果运动平面的位移极小而趋近于零，则有限接近位移的极——转动中心，将成为无限接近位移的极——瞬时中心。

如上所述，现在可以根据规定的两个位置 $E_1=A_1B_1$ 和 $E_2=A_2B_2$，求出此运动平面的极：作A_1、A_2与B_1、B_2连线的垂直平分线（图6.1-5）a_{12} 与 b_{12}，此两线的交点即为所求极点 P_{12}。运动平面E以P_{12}作为转动中心，由第一位置$E_1=A_1B_1$ 转动到第二位置$E_2=A_2B_2$。

现在我们只要在垂直平分线 a_{12} 与 b_{12} 上任意选取两点 A_0 与 B_0 作为所求四连杆机构的固定杆铰销中心，便能满足要求的条件。机构在第一运动位置时为 $A_0A_1B_1B_0$，四杆的长度分别是：固定杆 $A_0B_0=d$；连杆 $A_1B_1=b_1$；$A_0A_1=a_1$ 与$B_0B_1=c_1$。后两杆是和固定杆铰接的杆（连架杆）。在这

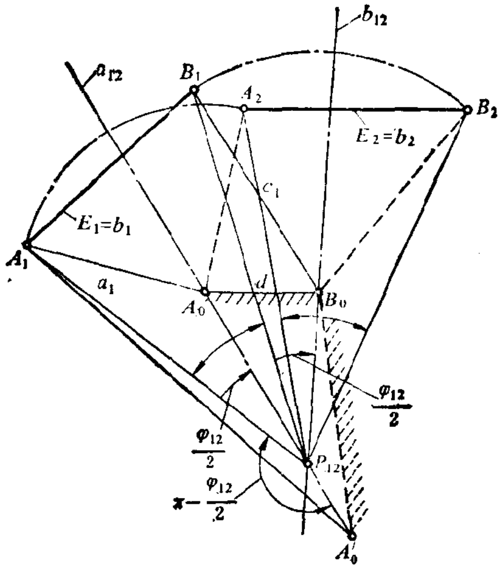

图6.1-5 利用连杆平面实现预期两变位。极与引线间的夹角关系

里，A点和B点都是连杆平面上分别与两连架杆相铰接而作圆周运动的点，因此称为“圆周点”，简称为“圆点”。而A_0和B_0则分别是两连架杆绕固定杆转动的圆心，因此称为“圆心点”，或称为“中点”。A点的两个位置A_1和A_2以及B点的两个位置B_1和B_2，称为“相关点”。

由于A_0和B_0可分别在垂直平分线a_{12}和b_{12}上任意选取，都能实现预期经行位置，因此这类问题的解答为无穷多。譬如在图6.1-6中，我们既可选取A_0'和B_0'作为固定杆的铰销中心，也可选取A_0''和B_0''作为固定杆的铰销中心，分别得到机构在第一运动位置时的各杆尺度$A_0'A_1B_1B_0'$与$A_0''A_1B_1B_0''$均可经行预期的位置$E_1=A_1B_1$及$E_2=A_2B_2$。

我们如果把铰销中心A_0和B_0同时选取在极点P_{12}上（A_0

和B_0在P_{12}点重叠)，这时，固定杆A_0B_0的长度为零，四杆机构成为活动度为零的三杆$A_1P_{12}B_1$组合体，此三杆构成一刚体的运动平面，它虽可绕P_{12}作转动，也可经行预期的两位置，但是它并不是机构，只不过是一个转动副罢了。

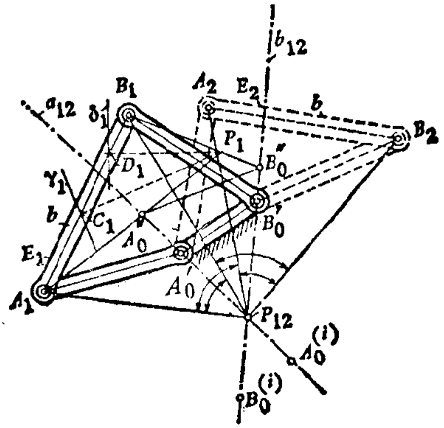

图6.1-6　用连杆b实现两预期位置。此问题的解答为无穷多

6.1-3　极与四连杆铰销中心的夹角关系　在图6.1-5中，作出了许多等角关系，这些等角关系以及角度的大小和角度的度量方向，对以后将要讨论的几何综合法有着极其重要的作用，我们借助图6.1-5在此先加以说明。

我们规定：角度的两条边界射线均为无限长的线段，例如$\angle A_1P_{12}A_0$的射线A_1P_{12}和A_0P_{12}都是无限长的线段；并规定由含有第一个字母的射线绕角顶转到含有第二个字母的射线并两线重合时，其转动方向是所夹角度的度量方向。例如图6.1-5中的射线A_1P_{12}绕角顶P_{12}顺时针方向转到与射线A_0P_{12}重合，这个顺时针方向就反映这个角度的度量方向。