上海大学出版社

2005年上海大学博士学位论文 68

图的控制数及其相关参数

● 作 者：单而芳

● 专 业：运筹学与控制论

● 导 师：刘曾荣

上海大学出版社
2005年上海大学博士学位论文 68

图的控制数及其相关参数

● 作 者： 单 而 芳
● 专 业： 运 筹 学 与 控 制 论
● 导 师： 刘 曾 荣

图书在版编目(CIP)数据

2005年上海大学博士学位论文. 第2辑/博士论文编辑部编. —上海：上海大学出版社，2009.6

ISBN 978-7-81118-367-2

Ⅰ.2… Ⅱ.博… Ⅲ.博士—学位论文—汇编—上海市—2005 Ⅳ.G643.8

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第180878号

2005年上海大学博士学位论文

——第2辑

上海大学出版社出版发行

(上海市上大路99号 邮政编码200444)

(http://www.shangdapress.com 发行热线66135110)

出版人：姚铁军

*

南京展望文化发展有限公司排版

上海华业装潢印刷厂印刷 各地新华书店经销

开本890×1240 1/32 印张274.25 字数7641千

2009年6月第1版 2009年6月第1次印刷

印数：1～400

ISBN 978-7-81118-367-2/G·490 定价：980.00元(49册)

Shanghai University Doctoral Dissertation (2005)

Domination Number and Parameters Related to Domination in Graphs

Candidate: Shan Erfang

Major: Operation Research and Control Theory

Supervisor: Liu Zengrong

Shanghai University Press

· Shanghai ·

上海大学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求.

答辩委员会签名：

蔡茂诚	研究员，中科院系统科学研究所	100080
唐国春	教授，上海第二工业大学	201209
张连生	教授，上海大学	200444
孙世杰	教授，上海大学	200444
邵嘉裕	教授，同济大学	200081

评阅人名单：

田　丰	研究员，中科院系统科学研究所	100080
林诒勋	教授，郑州大学数学系	450053
原晋江	教授，郑州大学数学系	450053
何文杰	教授，河北工业大学应用数学研究所	300134
孙　良	教授，北京理工大学	100083
胡晓东	教授，中科院应用数学研究所	100080
康丽英	教授，上海大学数学系	200444
孙世杰	教授，上海大学数学系	200444

答辩委员会对论文的评语

本文研究图的控制数及其相关的重要问题，图的控制集理论是图论中一个十分活跃的研究方向，受到国内外学者的广泛关注. 该论文内容涉及图的控制数界的估计，极值图的刻画和图的中心及树的平衡点等问题. 这些问题均为该领域中的重要研究方向.

作者主要获得了以下几个方面的成果：1. 通过改进 Reed 的路分解技术推广了关于控制数上界的已有结论，作为应用，给出了最小度至少为 3 的图的 k-限制控制数的上界. 2. 给出了匹配数与控制数相等且最小度为 2 的极值图的完全刻画. 证明了最小度至少为 4 的无爪图其全控制数不大于匹配数，并猜测这一结论对最小度为 3 的任意图成立，这一猜测蕴含了 Favaron 猜想. 3. 解决了 Harary 等在 1996 年提出的关于双控制数 Norclhaus-Gaddum 不等式的猜想. 4. 给出了配对控制数达到上界的极值图刻画，并建立了图的配对控制数与其补图色数之间的不等关系式. 5. 利用分析方法解决了 Dunbar 等人在 1999 年提出的关于偶图负控制数下界的猜想，并建立了符号 2-独立数在多部图的可达下界. 6. 证明了含两个块的连通图其 k-中心必在同一块中. 利用不等关系式简化了 Reid 关于树的平衡点结论的证明.

上述部分结果发表在《Discrete Appl. Math》、《Discrete Math.》等国内外重要学术期刊上. 以上所有工作均为该研究领域内的前沿工作，论文叙述流畅，结果深刻，答辩中表述

清楚. 回答问题准确. 作者阅读文献广泛,发展动态掌握清楚,论文内容丰富充实,有很强的科研能力.

答辩委员会一致认为这是一篇优秀的博士学位论文.

答辩委员会表决结果

答辩委员会一致通过答辩,认为这是一篇优秀的博士学位论文,建议授予单而芳同学理学博士学位.

答辩委员会主席: 蔡茂诚

2004 年 6 月 24 日

摘　要

在过去的三十年里，图论中发展最快的领域也许是图的“domination”的研究. 这一研究领域出现快速发展的因素主要有三个：第一，它在现实世界和诸如“覆盖”、“位置确定”类数学问题中广泛而深刻的应用. 例如目前编码理论中正在研究的码长为 n 覆盖半径为 r 的二进制码的最小数 $K(n, r)$ 正是图的控制集理论中超立方图的 r-距离控制数，显然，图论中的距离控制数更具有一般意义. 现在，人们已发现图的控制集理论可广泛应用于编码理论、计算机科学、通信网络、监视系统和社会网络等理论与实践中. 第二，控制参数定义类型的多样性. 根据实际背景的不同，现已定义的控制参数有几十种之多，而且随着研究的深入和应用的激发，新的参数如雨后春笋，不断涌现. 第三，图的控制参数确定问题的 NP-完全性与其他组合优化中 NP-完全问题紧密而自然的关系. 在特殊图（如弦图、圆弧图、区间图、$\#AT$-free 图等）上，寻找各类控制参数的多项式时间算法已成为组合优化领域中一个引人入胜而富有挑战性的研究方向.

本文所做工作主要包括以下四个部分：(1) 几类控制参数界的确定及与相关图参数的关系；(2) 极图的结构性质；(3) 函数控制数的界的确定；(4) 图的中心和平衡点问题.

* 在第二章，我们讨论了经典控制数的界和极值图的刻画问题，主要做了以下几个方面的工作：

• 1993 年，Reed[70] 利用“路覆盖”技术证明了最小度至少为 3 的 n 阶图其控制数 $\gamma(G)$ 不超过 $\frac{3}{8}n$. 我们通过改进这一技术进一步强化了上述结论，证明了最小度至少为 2 的 n 阶图其控制数 $\gamma(G)$ 不超过 $\frac{3n+|V_2|}{8}$，这里 V_2 是图中度数为 2 的点的数目. 作为这一结果的应用，证明了最小度至少为 3 的 n 阶图其 k -限制控制数 $r_k(G, \gamma) \leqslant \frac{3n+5k+3}{8}$.

• 对任意连通图 G，控制数、匹配数和覆盖数满足不等关系：$\gamma(G) \leqslant \beta(G) \leqslant \alpha(G)$. 我们首先证明了当 $\gamma(G)=\beta(G)$ 时，G 的最小度一定不超过2，进一步对 $\gamma(G)=\beta(G)$ 且 $\delta(G)=2$ 的图给出了完全刻画. 其次，对最小度为 1 的几类特殊图也给出了刻画.

• 尽管已知道当图的最小度小于 3 时，图的全控制数 γ_t 与匹配数 β 不可比较(见文[80])，但我们证明了下列重要结论：对任意最小度不小于 4 的无爪图 G，有 $\gamma_t(G) \leqslant \beta(G)$ 成立. 进一步我们猜测对最小度为 3 的任意图这一结论成立. 注意到事实 $\beta(G) \leqslant \frac{|V(G)|}{2}$，因此上述结果部分证明了由 Favaron 提出的关于全控制数猜想：$\gamma_t(G) \leqslant \frac{|V(G)|}{2}$.

• 第二章的最后，我们建立了 k-控制数的一个 Nordhaus-Gaddum 型不等式，由此解决了由 Harary 等（见文[29]）1996 年提出的一个关于双控制数的猜想（有关结果发表在 Discrete Applied Mathematices 2004，136）.

* 第三章讨论了图的配对控制数问题，这一概念由 Haynes 和 Slater（见文[40]）在 1998 年提出并进行研究. 我们做了以下三个方面的工作：

• 对最小度 $\delta(G)\geqslant 2$ 且 $|V(G)|\geqslant 6$ 的连通图 G，Haynes 和 Slater 证明了其配对控制数 $\gamma_p(G)$ 不超过 $\frac{2}{3}n$. 我们给出了 $\gamma_p(G)=\frac{2}{3}n$ 的极值图刻画.

• 给出了全控制数与配对控制数相等的树的一类构造性刻画.

• 讨论了配对控制数 $\gamma_p(G)$ 和它补图的色数 $\chi(G^c)$ 之间的关系. 证明了除几类图外每一个连通图的配对控制数不超过它的色数加 1.

* 第四章研究了图的函数控制数，主要得到了以下结果：

• 讨论了图的负控制数的下界. 首先证明了 1999 年由 Dunbar 等[18]提出的关于偶图负控制数的下界的一个猜想，即对任意 n 阶偶图 G，$\gamma^-(G)\geqslant 4(\sqrt{n+1}-1)-n$. 其次，我们也建立了偶图负控制数的另外一个可达下界：

$$\gamma^-(G)\geqslant\left[n-\left(\frac{|E(G)|}{\delta}+\frac{|E(G)|}{1+\max(\delta_X,\delta_Y)}\right)\right]$$

这里 $\delta_X=\min\{d(v)\mid v\in X\}$，$\delta_Y=\min\{d(v)\mid v\in Y\}$.

• 建立了任意 n 阶图符号 k-控制数的一个下界

$$\gamma_{ks}\geqslant n-\frac{2\,|E(G)|+(n-k)(\Delta+2)}{\delta+1}.$$

这一结果蕴含了在此之前得到的图的符号控制数和多数控制数在正则图上的所有下界结果(上述有关结果发表在 Theoretical Computer Science, 2003, 296).

• 2002 年，Henning[43] 研究了由 Zelinka[85] 早先提出的符号 2-独立数概念，并建立了它的几个上界. 在这里我们又给出了它的另外几个新的上界. 此外，利用分析方法建立了 n 阶多部图的最好可能上界，证明了对任意 n 阶 r-部图 G

$$\alpha_s^2(G)\leqslant\frac{3r}{r-1}+n-\sqrt{\left(\frac{3r}{r-1}\right)^2+\frac{4r}{r-1}n}.$$

(有关结果发表在 Ars Combinatoria, 2003, 69).

* 第五章讨论了图的中心和平衡点问题.

• 人们已注意到这样一个重要事实：根据不同“测度”标准定义的图的“中心”概念，多数情况下满足在树中由一个点或两个邻接点所组成，而在任意连通图必在同一个块中，也即这些中心点通常聚集在一起. Slater[74] 曾证明树的 k-中心 $C(T,k)$ 由一个点或两个邻接点所组成，我们试图证明对任意连通图，它的 k-中心必在同一个块中，但遗憾的是我们仅证明了对含两个块的连通图这一结论是成立的(这一结果发表在 J. Systems Science and Information, 2003, 1(4)).

• 1999 年, Reid[71] 提出了一类树的"中心"概念, 即树的平衡点. 他利用所谓的"双定向技术"证明了树的平衡点由一个点或两个邻接点所组成, 我们利用不等关系给出上述结果的一个简化处理(这一结果发表在 Discrete Mathematices, 2004, 280).

关键词 图, 控制集, 控制函数, 匹配, 中心, 平衡点

Abstract

Within the last thirty years, concurrent with the growth of computer science, graph theory has seen explosive growth. Perhapes the fastest growing area within graph theory is the study of domination in graphs. The rapid growth in the number of domination papers is attributable largely to three factors: (1) the diversity of applications to both real-world and other mathematical 'covering' or 'facility location' problems, such as coding theory, computer communication networks, monitor system, landing surveying and social network theory. (2) the wide variety of domination parameters that can be defined, about 40 - 50 different types of domination have been defined. (3) the NP-completeness of the basic domination problem, its close and 'natural' relationships to other NP-complete problems, and the subsequent interest in finding polynomial time solutions to domination problems in special classes of graphs.

In this paper, we pay our attention mainly on the following four parts of domination in graphs:

- Determining the bounds on several domination parameters and investigating the relationship between the domination parameters and other graphical parameters.
- Characterizing the extremal graphs for inequalities

involving in domination parameters.

• Determining the bounds on dominating functions in graphs.

• Discussing some problems on centrum and balance vertices in graphs.

In Chapter 2, we investigate the bounds on classical domination and characterize some extremal graphs for inequalities involving in domination parameters.

In 1993, Reed in [70] proved that every graph of order n with minimum degree at least three has a dominating set of at most $\frac{3n}{8}$ vertices. In Section 2.2, by modifying Reed's "disjoint path covering" method, we improve Reed's result to $\gamma(G) \leqslant \frac{3n+|V_2|}{8}$, where V_2 is the vertex set of degree 2, if G is a graph on n vertices with $\delta(G) \geqslant 2$. As an application of above result, we obtain an upper bound $r_k(G, \gamma) \leqslant \frac{3n+5k+3}{8}$ on k-restricted domination number of a graph G with order n and minimum degree at least three. It is well-known that $\gamma(G) \leqslant \beta(G) \leqslant \alpha(G)$ holds for any connected graph G. In Section 2.3, we give a complete characterization of those graphs G for which $\gamma(G) = \beta(G)$ and $\delta(G) = 2$. Furthermore, we investigate some special types of graphs G for which $\gamma(G) = \beta(G)$.

Although [78] shows that the parameters β and γ_t are not comparable for graphs with minimum degree at most 2, yet it is likely to compare β with γ_t for graphs with large minimum degree. In Section 2.4, we obtain that if G is claw-free graph and $\delta(G) \geqslant 4$, then $\gamma_t(G) \leqslant \beta(G)$. This implies that Favaron's conjecture is true for claw-free graphs with $\delta(G) \geqslant 4$. We believe that the result is true for any claw-free graph with minimum degree 3, although we were not able to settle it. If it is true, an example is given to illustrates the tight inequality.

In the end of Chapter 2, we establish the Nordhaus-Gaddum inequalities on k-domination number of graphs, which strengthens the conjecture on double domination number of graphs proposed by Harary and Haynes [29] in 1996.

In Chapter 3, we investigate the paired-domination number in graphs, which was introduced by Haynes and Slater in [40] in 1998.

Haynes and Slater in [40] showed that the problem of determining the paired-domination number $\gamma_p(G)$ of an arbitrary graph is NP-complete, and for any connected graph G with order $n \geqslant 6$ and $\delta(G) \geqslant 2$ they presented an upper bound $2n/3$ of $\gamma_p(G)$ in terms of order of a graph. However, the authors only give an example C_6 to see that the above bound is sharp, and give a family of graphs for which $\gamma_p(G)$ approach $2n/3$ for large n. In Section 3.1, we will give a complete characterization of graphs for which $\gamma_p(G) = 2n/3$.

In Section 3.2, we provide a constructive characterization of those trees with equal total domination and paired-domination numbers.

In Section 3.3, we investigate the relationship between the paired-domination number $\gamma_p(G)$ of a graph and the coloring number of its complement. We show that $\gamma_p(G) \leqslant \chi(G^c) + 1$ for any connected graph G whose complement is $K_{3,3}$-free, except for several families of graphs.

In Chapter 4, we discuss the domination functions in graphs, and obtain the following results.

In 1999, Dunbar et al. in [18] introduced the concept of minus domination and posed conjectured that for any bipartite graph G with order n, the minus domination number $\gamma^-(G) \geqslant 4(\sqrt{n+1} - 1) - n$. In Section 4.2, we prove that the conjecture is true and establish another attained lower bound $\gamma^-(G) \geqslant \left\lceil n - \left(\frac{|E(G)|}{\delta} + \frac{|E(G)|}{1 + \max(\delta_X, \delta_Y)}\right)\right\rceil$ for a bipartite graph $G = (X, Y)$ with order n. where $\delta_X = \min\{d(v) \mid v \in X\}$, $\delta_Y = \min\{d(v) \mid v \in Y\}$.

The concept of k-subdomination number γ_{ks} was introduced by Cockayne et al. in [11]. In the special cases $k = |V|$, γ_{ks} is the signed domination number $\gamma_s(G)$. Cockayne et al. established a sharp lower bound on γ_{ks} for trees. In Section 4.3, we show that for any graph G of order n and size ε, $\gamma_{ks} \geqslant n - \frac{2\varepsilon + (n-k)(\Delta + 2)}{\delta + 1}$. By above the results, we immediately obtain the lower bounds on γ_{ks} for r-regular graphs.