高等学校试用教材

工程数学

复变函数

西安交通大学高等数学教研室编

人民教育出版社

高等学校试用教材
工程数学
复变函数
西安交通大学高等数学教研室编
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷一厂印装
*
开本 787×1092 1/32　印张 5 12/16　字数130,000
1978 年 12 月第 1 版　1980 年 2 月第 2 次印刷
书号 13012·0257　　定价 0.43 元

前　言

本书是根据1977年在北京召开的工科教材会议精神，按照同年12月在西安召开的全国高等学校工科数学教材编写会议上所通过的编写大纲编写的，它是工科院校《工程数学》教材之一，可供电类各专业使用，也可供其他专业选用. 对工程技术人员可以作为参考书.

在编写过程中，我们主要参照了1966年1月前高等教育出版社出版的由我室编写的《复变函数》一书。在保持原书主要优点的基础上，适当增加了一些内容，努力贯彻理论联系实际的原则，文字上力求通俗易懂，便于自学. 同时，配备了比较丰富的习题，并于书后附有答案. 有*号的部分，可以根据各专业的需要来选用. 用28学时左右的时间可以讲完本书的主要内容.

本书由浙江大学主审，主审人为该校周茂清教授. 参加审稿的单位有北京航空学院、河北工学院、吉林工业大学、山东工学院、湖南大学、天津大学、西安冶金建筑学院、上海机械学院、上海交通大学、南京航空学院、南京工学院、重庆大学. 对于他们所提出的宝贵意见，我们表示衷心的感谢.

由于我们学识水平浅薄，教学经验不足，错误和不妥之处在所难免，诚恳地欢迎广大的教师和读者提出批评意见.

参加本书编写工作的有陆庆乐、唐象礼、王绵森三位同志。

西安交通大学高等数学教研室

1978.9.

引　　言

在我们已经学过的《高等数学》课程中，研究的主要对象是实变函数．理论的探讨和生产实践的发展，加深了人们对数的概念的认识．当引进了复数的概念之后，自然提出了对复变数的研究，而研究复变数之间的相互依赖关系，就是复变函数这门课程的主要任务．

复变函数中的许多概念、理论和方法是实变函数在复数领域内的推广和发展，因而它们之间有许多相似之处。但是，复变函数又有与实变函数不同之点。我们在学习中，要勤于思考，善于比较，既要注意共同点，更要弄清不同点．这样，才能抓住本质，融会贯通．

复变函数的理论和方法在数学、自然科学和工程技术中有着广泛的应用，是解决诸如流体力学、电磁学、热学、弹性理论中的平面问题的有力工具．而自然科学和生产技术的发展又极大地推动了复变函数的发展，丰富了它的内容．我们在学习中，要正确理解和掌握复变函数中的数学概念和方法，逐步培养利用这些概念和方法解决实际问题的能力．

目　　录

第一章　复数与复变函数

§1. 复数及其代数运算

1. 复数的概念　在学习初等代数时，已经知道 i 是方程

$$x^2+1=0$$

的一个根，即 $i^2+1=0, i=\sqrt{-1}$.

对于任意二实数 x,y，我们称 $z=x+iy$ 或 $z=x+yi$ 为复数，其中 x,y 分别称为 z 的实部和虚部，记作

$$x=\mathrm{Re}(z),\quad y=\mathrm{Im}(z),$$

而 i 称为虚单位. 当 $x=0$ 时，$z=iy$ 称为纯虚数；当 $y=0$ 时，$z=x+0i$，我们把它看作是实数 x. 例如复数 $3+0\cdot i$ 可看作实数 3.

两个复数相等，必须且只须它们的实部和虚部分别相等. 一个复数 z 等于 0，必须且只须它的实部和虚部同时等于 0.

复数与实数不同，两个复数不能比较大小.

2. 复数的代数运算　两个复数 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ 的加法、减法及乘法的定义如下：

$$(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2),\tag{1.1.1}$$

及　$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2).\tag{1.1.2}$$

显然，当 z_1 与 z_2 为实数(即当 $y_1=y_2=0$)时，以上两式与实数的运算法则一致.

至于除法，可定义为：满足

$$z_2z=z_1\quad(z_2\neq0)$$

的复数 $z=x+iy$，称为 $z_1=x_1+iy_1$ 除以 $z_2=x_2+iy_2$ 的商，记

作 $z=\frac{z_1}{z_2}$. 从这个定义，立即可推得

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \qquad (1.1.3)$$

事实上，因为 $z_2z=(xx_2-yy_2)+i(xy_2+x_2y)=x_1+iy_1$，所以

$$xx_2-yy_2=x_1, \quad xy_2+x_2y=y_1.$$

由于 $z_2\neq0$，那么 $x_2^2+y_2^2\neq0$，于是从以上两式可以解得

$$x=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \quad y=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

不难证明，和实数的情形一样，复数的运算也满足交换律、结合律和分配律:

$$z_1+z_2=z_2+z_1, \quad z_1z_2=z_2z_1;$$

$$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3, \quad z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3;$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

我们把实部相同而虚部正负号相反的两个复数称为共轭复数，与 z 共轭的复数记作 $\bar{z}$. 如果 $z=x+iy$，那么，$\bar{z}=x-iy$. 共轭复数有如下性质:

i) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$, $\quad\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$, $\quad\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

ii) $\bar{\bar{z}}=z$;

iii) $z\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$;

iv) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$, $\quad z-\bar{z}=2i\mathrm{Im}(z)$.

这些性质作为练习，由读者自己证明.

在计算$\frac{z_1}{z_2}$时，可以利用性质 iii)把分子分母同乘以$\bar{z}_2$，即可得到所求的商.

例 1 设 $z_1=5-5i$, $z_2=-3+4i$, 求$\frac{z_1}{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

[解] $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5-5i}{-3+4i}=\frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}$$
$$=\frac{(-15-20)+(15-20)i}{25}=-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}i.$$

所以 $$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i.$$

例 2 设 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$，求 $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $z\bar{z}$.

[解] $$z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=\frac{i}{i(-i)}-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$=i-\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i\right)$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i,$$

所以 $$\mathrm{Re}(z)=\frac{3}{2},\ \mathrm{Im}(z)=-\frac{1}{2},$$
$$z\bar{z}=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$$

例 3 设 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ 为两个任意复数，证明 $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

[证] $$\begin{aligned}z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2&=(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)\\&\quad+(x_1-iy_1)(x_2+iy_2)\\&=(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)\\&\quad+(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_1y_2-x_2y_1)\\&=2(x_1x_2+y_1y_2)=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).\end{aligned}$$

§ 2 复数的几何表示

1. 复数的各种表示法

i) 点表示法　由于任一复数 $z=x+iy$ 与一对实数 x, y 成一一对应，所以对于平面上给定的直角坐标系，复数 $z=x+iy$ 可以

用坐标为(x,y)的点来表示，这是一个常用的表示法．x轴称为实轴，y轴称为虚轴，两轴所在的平面称为复平面或z平面．这样，复数与复平面上的点成一一对应，并且常把“点z”作为“数z”的同义词．

ii）向量表示法　复数z还能用从原点指向点(x,y)的向量来表示(图 1.1)．向量的长度称为z的模或绝对值，记作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (1.2.1)$$

显然，下列各式成立：

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,$$
$$|z|\leqslant|x|+|y|,$$
$$z\bar{z}=|z|^2=|z^2|.$$

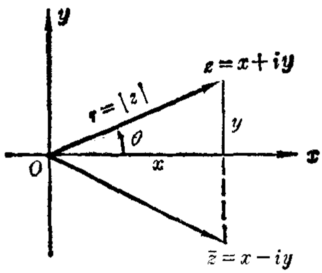

图　1.1

在$z\neq0$的情况，表示z的向量与x轴的交角θ称为z的辐角，记作

$$\operatorname{Arg} z=\theta.$$

这时，有

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z)=\frac{y}{x}. \qquad (1.2.2)$$

我们知道，任何一个复数$z\neq0$有无穷多个辐角．如果θ_1是其中的一个，那末

$$\operatorname{Arg} z=\theta_1+2k\pi \quad (k\text{ 为任意整数}) \qquad (1.2.3)$$

就给出了z的全部辐角．在$z(\neq0)$的辐角中，我们把满足$-\pi<\theta_0\leqslant\pi$的$\theta_0$称为$\operatorname{Arg} z$的主值，记作$\theta_0=\arg z$.

当$z=0$时，$|z|=0$，而辐角不确定．

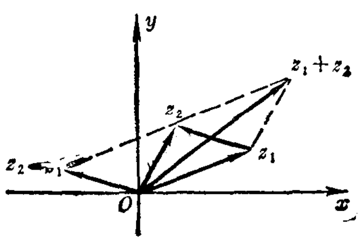

图　1.2

根据复数的运算法则可知，两个复数z_1和z_2的加、减法运

算和相应向量的加减法运算一致(图 1.2). 我们又知道, $|z_2-z_1|$ 就是 z_1 与 z_2 之间的距离,因此

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|, \tag{1.2.4}$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|. \tag{1.2.5}$$

一对共轭复数 z 和 $\bar{z}$ 在平面内的位置是关于实轴对称的(图 1.1), 因而 $|z|=|\bar{z}|$, 如果 z 不在负实轴和原点上,还有 $\arg z=-\arg\bar{z}$.

iii) 三角表示法和指数表示法　利用直角坐标与极坐标的关系:

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

复数 z 可以表示为

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta), \tag{1.2.6}$$

称为复数的三角表示法.

再利用欧拉(Euler)公式[①]: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, 我们又可以得到

$$z=re^{i\theta},$$

这种形式称为复数的指数表示法. (1.2.7)

复数的各种表示法可以相互转换, 以适应讨论不同问题时的需要.

例 1　将 $z=-\sqrt{12}-2i$ 化为三角表示式和指数表示式.

[解]　$r=|z|=\sqrt{12+4}=4,$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}=\frac{-2}{-\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

由于 z 在第三象限,所以

$$\theta=-\frac{5}{6}\pi.$$

z 的三角表示式是

① 其实, 它是欧拉公式: $e^{iz}=\cos z+i\sin z$ (z 为任意复数)的特殊情况, 这个公式的证明参见第二章 §4.

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]$$
$$=4\left(\cos\frac{5}{6}\pi-i\sin\frac{5}{6}\pi\right),$$

z 的指数表示式是

$$z=4e^{-\frac{5}{6}\pi i}.$$

例 2 设 z_1, z_2 为两个任意复数，证明：

1) $|z_1\bar{z}_2|=|z_1||z_2|$;

2) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$（三角不等式）.

［证］ 1) $|z_1\bar{z}_2|=\sqrt{(z_1\bar{z}_2)\overline{(z_1\bar{z}_2)}}=\sqrt{(z_1\bar{z}_2)(\bar{z}_1 z_2)}$
$$=\sqrt{(z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2)}=|z_1||z_2|.$$

2) 因为 $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}$
$$=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$
$$=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2+z_2\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2,$$

由 §1 例 3， $z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$,

所以 $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$
$$\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\bar{z}_2|$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|$$
$$=(|z_1|+|z_2|)^2.$$

两边开方，就得到所要证明的三角不等式.

由下面例 3 可以看出，任何一条平面曲线 $F(x,y)=0$ 一定能用复数形式的方程来表示. 而例 4 表明，一些常见平面曲线用复数形式的方程表示时往往显得特别简明.

例 3 将直线方程 $x+3y=2$ 化为复数表示式.

［解］ 由共轭复数的性质 iv)，有

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\qquad y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z}).$$

代入所给的方程，可得

$$(3+i)z+(-3+i)\bar{z}=4i.$$

这就是所给直线方程的复数表示式.

例 4 求下列方程所表示的曲线：

1) $|z+i|=2$;

2) $|z-2i|=|z+2|$;

3) $\mathrm{Im}(i+\bar{z})=4$.

[**解**] 1) 在几何上不难看出，方程 $|z+i|=2$ 表示所有与点 $-i$ 距离为 2 的点的轨迹，即中心为 $-i$、半径为 2 的圆(图 1.3(a)). 下面用代数方法求出该圆的直角坐标方程.

设 $z=x+iy$，方程变为

$$|x+(y+1)i|=2.$$

也就是

$$\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2,$$

或

$$x^2+(y+1)^2=4.$$

2) 几何上，该方程表示到点 $2i$ 和 -2 距离相等的点的轨迹，所以方程表示的曲线就是连接点 $2i$ 和 -2 的线段的垂直平分线(图 1.3(b))，它的方程为 $y=-x$. 这方程也可以用代数的方法求得，由读者自己完成.

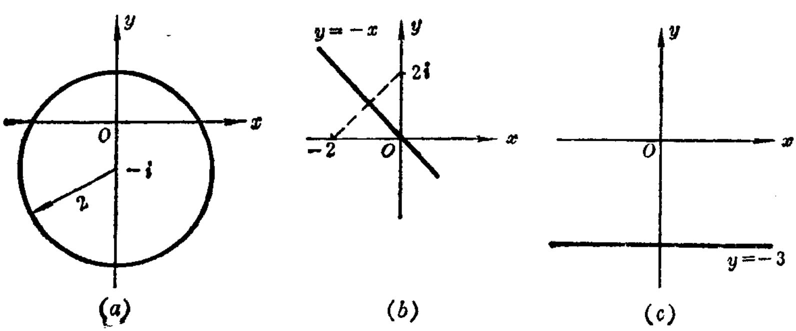

图 1.3

3）设 $z=x+iy$，那么

$$i+\bar{z}=x+(1-y)i,$$

所以
$$\operatorname{Im}(i+\bar{z})=1-y$$

从而立即可得所求曲线的方程为 $y=-3$，这是一条平行于 x 轴的直线，如图 1.3(c)所示.

2. 关于模与辐角的定理

1）乘积 设有两个复数

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

那末
$$\begin{aligned} z_1z_2&=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\ &=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\ &\quad+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\ &=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].\end{aligned}$$

于是
$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|, \tag{1.2.8}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2\text{①}, \tag{1.2.9}$$

从而有下面的定理.

定理一 两个复数乘积的模等于它们的模的乘积；两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和.

因此，当利用向量来表示复数时，可以说乘积 z_1z_2 的向量是从因子 z_1 的向量旋转一个角度 $\operatorname{Arg}z_2$，并伸长(缩短)到 $|z_2|$ 倍得到的，如图 1.4 所示. 特别，当 $|z_2|=1$ 时，乘法变成了只是旋转. 例如 iz 相当于将 z 逆时针旋转 $90°$，$-z$ 相当于将 z 逆时针旋转 $180°$. 又当 $\arg z_2=0$ 时，乘法就变成了仅仅是伸长(缩短).

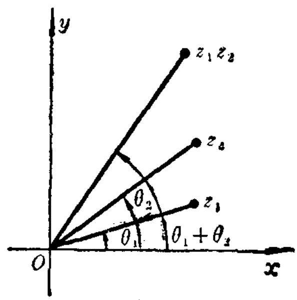

图 1.4

① 由于辐角的多值性，因此，该等式应理解为对于左端的任一个值，右端必有一个值和它相等，并且反过来也成立.

如果用指数形式表示复数:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2},$$

那么定理一可以简明地表示为:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \tag{1.2.10}$$

由此逐步可证,如果

$$z_k = r_k e^{i\theta_k} = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k), (k=1,2,\cdots,n)$$

那么

$$\begin{aligned} z_1 z_2 \cdots z_n &= r_1 r_2 \cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) \\ &\quad + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)] \\ &= r_1 r_2 \cdots r_n e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}. \end{aligned}$$

特别地,当这些数都相等且模等于1时,即

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = \cos\theta + i\sin\theta,$$

那么

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta. \tag{1.2.11}$$

这就是棣莫佛(De Moivre)公式.

2) 商　按照定义,当 $z_1 \neq 0$ 时,有

$$z_2 = \frac{z_2}{z_1} z_1.$$

由(1.2.8)和(1.2.9)就有

$$|z_2| = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| |z_1| \quad 与 \quad \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + \operatorname{Arg} z_1,$$

于是

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \operatorname{Arg} z_2 - \operatorname{Arg} z_1. \tag{1.2.12}$$

由此得

定理二　两个复数的商的模等于它们的模的商；两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

如果用指数形式表示复数: