

李学文 王宏洲 李炳照 编

# 数学建模优秀论文 精选与点评 (2011—2015)

清华大学出版社

# 第 1 章 城市表层土壤重金属污染分析

## (2011 A)

### 1.1 城市表层土壤重金属污染分析

随着城市经济的快速发展和城市人口的不断增加,人类活动对城市环境质量的影响日益突出。对城市土壤地质环境异常的查证,以及如何应用查证获得的海量数据资料开展城市环境质量评价,研究人类活动影响下城市地质环境的演变模式,日益成为人们关注的焦点。

按照功能划分,城区一般可分为生活区、工业区、山区、交通区及公园绿地区等,分别记为 1 类区、2 类区、……、5 类区,不同的区域环境受人类活动影响的程度不同。

现对某城市城区土壤地质环境进行调查。为此,将所考察的城区划分为间距 1km 左右的网格子区域,按照每平方千米 1 个采样点对表层土(0~10cm 深度)进行取样、编号,并用 GPS 记录采样点的位置。应用专门仪器测试分析,获得了每个样本所含的多种化学元素的浓度数据。另一方面,按照 2km 的间距在那些远离人群及工业活动的自然区取样,将其作为该城区表层土壤中元素的背景值。

表 1-1 列出了采样点的位置、海拔高度及其所属功能区等信息,表 1-2 列出了 8 种主要重金属元素在采样点处的浓度,表 1-3 列出了 8 种主要重金属元素的背景值。

表 1-1 取样点位置及其所属功能区

| 编号  | $x/m$ | $y/m$ | 海拔/ $m$ | 功能区 |
|-----|-------|-------|---------|-----|
| 1   | 74    | 781   | 5       | 4   |
| 2   | 1 373 | 731   | 11      | 4   |
| 3   | 1 321 | 1 791 | 28      | 4   |
| 4   | 0     | 1 787 | 4       | 2   |
| 5   | 1 049 | 2 127 | 12      | 4   |
| 6   | 1 647 | 2 728 | 6       | 2   |
| 7   | 2 883 | 3 617 | 15      | 4   |
| 8   | 2 383 | 3 692 | 7       | 2   |
| 9   | 2 708 | 2 295 | 22      | 4   |
| 10  | 2 933 | 1 767 | 7       | 4   |
| ⋮   | ⋮     | ⋮     | ⋮       | ⋮   |
| 315 | 6 924 | 5 696 | 7       | 5   |
| 316 | 4 678 | 3 765 | 40      | 5   |

续表

| 编号  | $x/m$ | $y/m$ | 海拔/m | 功能区 |
|-----|-------|-------|------|-----|
| 317 | 6 182 | 2 005 | 25   | 5   |
| 318 | 5 985 | 2 567 | 44   | 4   |
| 319 | 7 653 | 1 952 | 48   | 5   |

表 1-2 8 种主要重金属元素的浓度

| 编号  | As/( $\mu\text{g/g}$ ) | Cd/(ng/g) | Cr/( $\mu\text{g/g}$ ) | Cu/( $\mu\text{g/g}$ ) | Hg/(ng/g) | Ni/( $\mu\text{g/g}$ ) | Pb/( $\mu\text{g/g}$ ) | Zn/( $\mu\text{g/g}$ ) |
|-----|------------------------|-----------|------------------------|------------------------|-----------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1   | 7.84                   | 153.80    | 44.31                  | 20.56                  | 266.00    | 18.20                  | 35.38                  | 72.35                  |
| 2   | 5.93                   | 146.20    | 45.05                  | 22.51                  | 86.00     | 17.20                  | 36.18                  | 94.59                  |
| 3   | 4.90                   | 439.20    | 29.07                  | 64.56                  | 109.00    | 10.60                  | 74.32                  | 218.37                 |
| 4   | 6.56                   | 223.90    | 40.08                  | 25.17                  | 950.00    | 15.40                  | 32.28                  | 117.35                 |
| 5   | 6.35                   | 525.20    | 59.35                  | 117.53                 | 800.00    | 20.20                  | 169.96                 | 726.02                 |
| 6   | 14.08                  | 1 092.90  | 67.96                  | 308.61                 | 1 040.00  | 28.20                  | 434.80                 | 966.73                 |
| 7   | 8.94                   | 269.80    | 95.83                  | 44.81                  | 121.00    | 17.80                  | 62.91                  | 166.73                 |
| 8   | 9.62                   | 1 066.20  | 285.58                 | 2 528.48               | 13 500.00 | 41.70                  | 381.64                 | 1 417.86               |
| 9   | 7.41                   | 1 123.90  | 88.17                  | 151.64                 | 16 000.00 | 25.80                  | 172.36                 | 926.84                 |
| 10  | 8.72                   | 267.10    | 65.56                  | 29.65                  | 63.00     | 21.70                  | 36.94                  | 100.41                 |
| ⋮   | ⋮                      | ⋮         | ⋮                      | ⋮                      | ⋮         | ⋮                      | ⋮                      | ⋮                      |
| 315 | 6.47                   | 197.00    | 38.18                  | 21.09                  | 64.00     | 18.60                  | 40.18                  | 168.05                 |
| 316 | 6.47                   | 100.70    | 36.19                  | 13.31                  | 42.00     | 11.50                  | 34.34                  | 56.23                  |
| 317 | 4.79                   | 119.10    | 35.76                  | 19.71                  | 44.00     | 9.90                   | 39.66                  | 67.06                  |
| 318 | 7.56                   | 63.50     | 33.65                  | 21.90                  | 60.00     | 12.50                  | 41.29                  | 60.50                  |
| 319 | 9.35                   | 156.00    | 57.36                  | 31.06                  | 59.00     | 25.80                  | 51.03                  | 95.90                  |

表 1-3 8 种主要重金属元素的背景值

| 元素                     | 平均值  | 标准偏差 | 范围       |
|------------------------|------|------|----------|
| As/( $\mu\text{g/g}$ ) | 3.6  | 0.9  | 1.8~5.4  |
| Cd/(ng/g)              | 130  | 30   | 70~190   |
| Cr/( $\mu\text{g/g}$ ) | 31   | 9    | 13~49    |
| Cu/( $\mu\text{g/g}$ ) | 13.2 | 3.6  | 6.0~20.4 |
| Hg/(ng/g)              | 35   | 8    | 19~51    |
| Ni/( $\mu\text{g/g}$ ) | 12.3 | 3.8  | 4.7~19.9 |
| Pb/( $\mu\text{g/g}$ ) | 31   | 6    | 19~43    |
| Zn/( $\mu\text{g/g}$ ) | 69   | 14   | 41~97    |

注：题目及数据附件都可以到全国大学生数学建模竞赛官方网站 <http://www.mcm.edu.cn> 下载。

现要求你们通过数学建模来完成以下任务：

(1) 给出 8 种主要重金属元素在该城区的空间分布，并分析该城区内不同区域重金属的污染程度。

(2) 通过数据分析，说明重金属污染的主要原因。

(3) 分析重金属污染物的传播特征，由此建立模型，确定污染源的位置。

(4) 分析你所建立模型的优缺点,为更好地研究城市地质环境的演变模式,还应收集什么信息?有了这些信息,如何建立模型解决问题?

## 1.2 问题分析与建模思路概述

土壤重金属污染问题是要求在已有采样数据的基础上,用数学模型描述污染物在城市中的空间分布、分布特征,分析主要的污染原因和污染源。在我们的现实生活中,工业生产和日常生活造成的污染问题日益严重,并逐渐引起了各国政府和公众的高度重视,因此对污染物在不同介质中的扩散与追根溯源的研究成果也很多。此类问题有很成熟的数值模拟方法和偏微分方程模型可供利用,因此参赛队首先要对此类数学方法和算法有一定的了解。

对于问题一,可以选用插值拟合的方法给出污染物浓度的分布特征。如果对 MATLAB 等数学软件很熟悉,就可以很快算出结果并给出示意图,但应该注意对算法的数学原理予以明确说明。

对于问题二,首先需要通过文献检索了解各类重金属常见的来源,然后对各个区域的污染物浓度结合周边的工农业设施、道路和河流等地理特征进行相关性分析。通常某些重金属污染物会一起出现,这对我们了解污染原因、污染源是有利的,根据各个区域不同种类重金属的分布情况可以更容易确定其污染原因。要注意的是,不能仅根据文献中的结论就简单地认定污染原因,应该结合数据和模型来进行合理的论证,在此基础上给出判断。

对于问题三,要求建模确认污染源的位置,可选的方法很多。比如根据不同时间点各个采样点的污染数据,画出不同时间的污染范围,以此确定污染源位置;也可以根据同一时间点各个区域的污染数据和地理信息,近似画出污染物浓度的等高线,由此确定出污染源的位置。更复杂一些,还可以采用基于偏微分方程的扩散模型,以污染物浓度数据为初始值,反推其扩散过程,由此确定污染源。

对于问题四,可以结合前三个问题中建模和计算的体会,对现实中污染物数据收集提出一些建议。

## 1.3 获奖论文——城市表层土壤重金属污染分析

作者:张雨 张阳 都春霞

指导教师:闫桂峰

获奖情况:2011 全国数学建模竞赛一等奖

摘要

随着城市经济的快速发展和城市人口的不断增加,人类活动对城市环境质量的影响日显突出。本文对某城市城区表层土壤重金属的污染进行了分析与评价,研究了人类活动影响下城市地质环境的演变模式。

对问题一,我们首先对所给数据进行了特异值检验与剔除,检验标准是根据表 1-3 中所给数据,发现 8 种主要重金属元素背景值的范围在平均值加减 2 倍标准偏差内,所以当检测

数据落在平均值加减 2 倍标准差外时,被认为是特异值,应将其剔除。然后,在新得到的共 283 个样本点数据的基础上,通过 MATLAB 函数制图绘制不同元素的空间分布图,给出 8 种主要重金属元素在该城区的空间分布。接着,我们先后采用了内梅罗综合污染指数法和根据重金属毒性响应系数修正污染因子权值后的模糊综合评价模型对该城区不同区域重金属的污染程度进行了评价,并讨论了这两种模型的优缺点,发现后者比前者更符合客观实际。

对问题二,我们利用了 SPSS 软件的主成分分析功能对 5 个功能区土壤重金属元素的 8 项指标进行主成分分析,并结合问题一中得出的结论以及该城区 5 个功能区产生重金属污染物的特征,最终确定出各个功能区重金属污染的主要原因。

问题三为本文关键,是研究重点。首先是应用改进的二维扩散模型,建立新的适合该城区的扩散方程。题目所给的较为分散的 319 个数据点(剔除后剩余 283 个),分布在长宽分别达两万米的广阔区域内。综合考虑到结果的准确度和 MATLAB 计算时间的长短,采取了内插 1000 个数据点,然后将数据代入方程,利用 MATLAB 编程,求出各个元素随  $x, y$  的变化分布图,由图中极大或最大值点得出污染源的具体坐标和分布区域。

在问题四中,考虑到重金属可能的传播途径,选取了汽车数量、生活垃圾、工业垃圾、大气沉降四个主要因素对扩散方程进行改进,并给出了需要测量的值和求解污染物浓度方程的步骤,从而可以研究城市每个坐标点地质环境随时间变化的情况。

**关键词:** 重金属污染 表层土壤 内梅罗综合污染指数法 模糊综合评价模型 改进的二维扩散模型

### 1.3.1 问题的背景和重述

在城市化的进程中,飞速发展的经济和急剧增加的人口使人类对城市环境质量的影响日益增长。土壤中的重金属污染由于其潜伏性和长期性尚未受到应有重视,但其严重性和危害性同样不容忽视,这也正日益成为人类对城市环境的质量评价以及城市地质环境在人类活动影响下的演变模式的研究中的重要因素。

本题用采样法研究某城市土壤地质环境受重金属污染的情况。考虑人类不同活动的影响,按功能将城区分为生活区、工业区、山区、交通区及公园绿地区等,各记为 1 类区、2 类区、……、5 类区,然后在整体被考察区域进行由 GPS 记录地点的网格采样,间距为 1km,样本为表层土(0~10cm 深度)。对其测试分析得其中多种化学物质的浓度数据。同时以相同方法在远离人类活动的自然区以 2km 为间隔采样并测试分析,将其数据作为该城区表层土壤中元素的背景值。

表 1-1~表 1-3 中给出 4 类数据:采样点的位置和海拔高度,其所属功能区,8 种主要重金属元素在采样点处的浓度,8 种主要重金属元素的背景值。

建模研究以下问题:

(1) 结合采样点的空间位置坐标和 8 种重金属元素在采样点的浓度,给出它们在该城区的空间分布,并观察各处浓度高低,分析其中不同区域重金属的污染程度;

(2) 分析附表中数据、上一问所得重金属分布情况、5 类区域分布情况,说明重金属污染的主要原因;

(3) 分析重金属污染物的传播特征,由此建立模型,确定污染源的位置;

(4) 分析上一问所建模型的优缺点,为更好地研究城市地质环境演变模式,还应收集什么信息?有了这些信息,如何建立模型解决问题?

### 1.3.2 基本假设

(1) 当地污染源与各处土壤的重金属元素浓度变化状态是经过长时间到达的动态平衡状态,短时间内其浓度无明显增减,且污染源数量不再增加;

(2) 少数数据异常点除外,各个采样点测得数据基本准确可信;

(3) 土壤中重金属以地表传播为主要传播途径,其他方式次之甚至可以忽略;

(4) 当地各处土壤 pH 在 6.5 附近。

### 1.3.3 符号约定

$\bar{a}$ : 均值;

$s$ : 标准差;

$P_i$ : 重金属元素  $i$  的污染指数;

$X_i$ : 重金属  $i$  的含量实测值;

$S_i$ : 污染物  $i$  的评价标准,取值为该区的自然背景值的均值;

$P_K$ : 采样点的综合污染指数;

$P_K$ : 重金属污染因子;

$W_{ki}$ :  $k$  样品  $i$  元素的权重;

$F(x, y, z)$ : 扩散方程中的源强;

$u$ : 指定坐标点的浓度或浓度函数。

### 1.3.4 问题的分析

#### 问题一的分析

该问题要求给出 8 种主要重金属元素在该城区的空间分布并分析不同区域内重金属的污染程度。考虑到原始数据可能存在异常值,因此首先需要对原始数据进行特异值的检验及剔除,然后在新得到的数据上进行分析。重金属的空间分布可通过作图来表示,设想是软件绘出该城区的三维地形图,然后绘出每一种重金属元素浓度在该城区二维平面上的三维分布图,再结合以颜色深浅表示其浓度的标有海拔等高线的平面分布图,就可以由图得到 8 种主要重金属元素在该城区的空间分布。而分析污染程度即为对土壤重金属污染程度的评价,可以采用多种评价方法,如内梅罗综合污染指数法、层次分析法、污染负荷指数法、神经网络法、模糊数学法(模糊综合评价模型)等,也可以多种评价方法结合使用。

#### 问题二的分析

该问题要求通过数据分析说明重金属污染的主要原因。本题的要点在于数据分析,而这里可采用多种分析方法,如数据挖掘方法、主成分分析法等。以主成分分析法为例,分析过程可由 SPSS 软件完成,得到表明各个地区主成分的表格。在使用分析法分析数据的基础上,结合问题一得出的结论及相关重金属污染主要原因的文献,了解 8 种不同重金属污染



物主要的产生方式和原因,综合考虑该城区 5 个功能区的特征,即相关人类活动所容易产生的重金属污染物,读表分析,即可最终得出重金属污染的主要原因。

### 问题三的分析

该问题要求通过分析重金属污染物的传播特征,建立模型,确定污染源位置。本问是重点也是难点,需准确把握其特征来建立模型。本题样本来自 0~10cm 的浅土层,而重金属具有稳定、难溶、难挥发等特性,综合重金属可能的传播途径,最终确定其以地表传播为主要方式。由此建立了改进的二维扩散模型以研究重金属污染物的传播特征。针对数据点少,较分散,采用插值法扩充数据样本点,在此基础上,对数据样本代入公式编程求解得污染源,并在图中读取坐标位置。最后结合所得结果分析产生结果可能的原因。

### 问题四的分析

该问题要求收集信息改进模型使之能更好地研究城市地质环境的演变模式。这既是对之前所建模型缺点的思考和反省,又充分弥补了该题中重金属元素传播途径单一有限的不足,能以开放的角度建立更为实际而完善的传播特征模型。解决该问题首先需要考察重金属的各种传播途径和影响因素,将其中主要部分纳入考虑进而修正方程,得到较为完善的重金属传播特性模型,比如考虑大气沉降等途径,降雨等天气的影响。而且上三问中假设该城区的重金属浓度值处在一个动态平衡的状态,而本题则应该将污染源产生重金属污染物的强度变化纳入考虑,建模模拟该城区各个点动态的重金属元素浓度,这样得到的计算结果会更接近实际。

## 1.3.5 模型的建立与求解

### 1. 模型的准备

对数据进行剔除异常值等处理工作。

#### 1) 剔除特异值

特异值指观测数据中存在的过大或过小的值,可能是由于土壤采样、化验、分析过程中出现操作错误或条件改变导致。因此,有必要对原始数据进行特异值检验,并予以剔除。根据表 1-3 所给数据,可知 8 种重金属元素背景值的范围是在  $\bar{a} \pm 2s$  之间( $\bar{a}$  为其均值,  $s$  为其标准差),由此我们判断、剔除特异值的方法采用样本平均值  $\bar{a}$  加减 2 倍标准差  $s$  法,认为数据在区间  $(\bar{a} - 2s, \bar{a} + 2s)$  内为正常值,否则为特异值,给予剔除处理。

对表 1-2 中给出的 319 个样本点的数据使用 Excel 处理,结果如下:

As 测量值中特异值有 6 个,分别为样本点 6、29、30、41、84、178 处测得的数据; Cd 有 18 个,分别在样本点 6、8、9、16、22、34、35、40、90、95、143、152、163、179、192、223、310、313 处; Cr 有 5 个,分别在样本点 8、14、20、22、49 处; Cu 有 2 个,分别在样本点 8、22 处; Hg 有 4 个,分别在样本点 8、9、182、257 处; Ni 有 5 个,分别在样本点 8、22、61、128、135 处; Pb 有 12 个,分别在样本点 5、6、8、9、16、20、22、31、143、163、221、253 处; Zn 有 10 个,分别在样本点 6、8、9、20、22、30、36、61、143、178 处。共计剔除特异值样本点 36 个,筛选出 283 个样本点的数据。

用 SPSS 对剔除前后的样本分别作统计分析,得到的描述统计量如表 1-4、表 1-5 所示。

表 1-4

|                 | 描述统计量    |            |            |           |           |              |
|-----------------|----------|------------|------------|-----------|-----------|--------------|
|                 | N<br>统计量 | 极小值<br>统计量 | 极大值<br>统计量 | 均值        |           | 标准差<br>统计量   |
|                 |          |            |            | 统计量       | 标准误       |              |
| As              | 319      | 1.61       | 30.13      | 5.676 5   | 0.169 33  | 3.024 29     |
| Cd              | 319      | 40.00      | 1 619.80   | 302.396 2 | 12.596 89 | 224.987 60   |
| Cr              | 319      | 15.32      | 920.84     | 53.509 7  | 3.919 35  | 70.001 79    |
| Cu              | 319      | 2.29       | 2 528.48   | 55.0167   | 9.121 49  | 162.915 10   |
| Hg              | 319      | 8.57       | 16 000.00  | 299.711 3 | 91.236 71 | 1 629.539 78 |
| Ni              | 319      | 4.27       | 142.50     | 17.261 8  | 0.556 61  | 9.941 42     |
| Pb              | 319      | 19.68      | 472.48     | 61.740 9  | 2.802 70  | 50.057 76    |
| Zn              | 319      | 32.86      | 3760.82    | 201.202 6 | 18.993 38 | 339.232 54   |
| 有效的 N<br>(列表状态) | 319      |            |            |           |           |              |

表 1-5

|                 | 描述统计量    |            |            |           |           |            |
|-----------------|----------|------------|------------|-----------|-----------|------------|
|                 | N<br>统计量 | 极小值<br>统计量 | 极大值<br>统计量 | 均值        |           | 标准差<br>统计量 |
|                 |          |            |            | 统计量       | 标准误       |            |
| As              | 283      | 1.61       | 10.99      | 5.281 3   | 0.118 13  | 1.987 28   |
| Cd              | 283      | 40.00      | 751.20     | 249.962 9 | 8.396 82  | 141.256 33 |
| Cr              | 283      | 15.32      | 172.29     | 43.919 8  | 1.159 89  | 19.512 32  |
| Cu              | 283      | 2.29       | 277.82     | 38.165 4  | 2.200 81  | 37.023 44  |
| Hg              | 283      | 8.57       | 1801.00    | 95.903 0  | 11.280 47 | 189.766 83 |
| Ni              | 283      | 4.27       | 36.00      | 15.861 4  | 0.325 73  | 5.479 58   |
| Pb              | 283      | 19.68      | 140.62     | 52.317 3  | 1.540 89  | 25.921 80  |
| Zn              | 283      | 32.86      | 572.96     | 135.191 3 | 5.718 92  | 96.207 11  |
| 有效的 N<br>(列表状态) | 283      |            |            |           |           |            |

对比分析可知,剔除 36 个特异值后样本的标准差和均值的标准误差都显著减小,说明剔除特异值确实对计算误差的减小有助益,故之后的统计计算均采用剔除特异值后 283 个样本点的数据。

## 2) 数据的标准化处理

在实际问题中,不同的数据可能有不同的性质和不同的量纲,为使原始数据能够符合模糊聚类的要求,需将原始数据(即表 1-2 中剔除特异值后的各采样点 8 种重金属元素的浓度)列成  $283 \times 8$  的矩阵,并作标准化处理。本文中,我们通过极差变换

$$x'_{ij} = \frac{x_{ij} - \min_{1 \leq i \leq n} \{x_{ij}\}}{\max_{1 \leq i \leq n} \{x_{ij}\} - \min_{1 \leq i \leq n} \{x_{ij}\}} \quad (1)$$

将原始数据标准化,由于将 283 个样本点的数据极差化后所得表格过分大,所以收在附录中,表 1-6 仅列出 5 个功能区的极差化后的数据(其中每个功能区每种重金属元素用于极差标准化的值是该区所有样本点的均值,见表 1-7,以下所有关于 5 个功能区的数据处理计算都基于均值)。



表 1-6

|       | As               | Cd               | Cr               | Cu               | Hg                | Ni               | Pb               | Zn               |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|------------------|------------------|------------------|
| 生活区   | 0.436 326 767 09 | 0.363 606 244 38 | 0.207 708 184 36 | 0.143 288 934 43 | 0.140 464 219 33  | 0.390 203 449 8  | 0.274 851 162 79 | 0.259 115 231 14 |
| 工业区   | 0.468 670 921 93 | 0.441 625 728 59 | 0.376 057 074 91 | 0.266 235 210 84 | 0.108 039 976 8   | 0.414 510 362 22 | 0.355 483 042 37 | 0.394 019 988 34 |
| 山区    | 0.250 952 1218 7 | 0.306 374 966    | 0.262 628 983 8  | 0.220 224 277 37 | 0.156 682 699 66  | 0.322 283 273 72 | 0.178 592 289 72 | 0.270 383 985 47 |
| 交通区   | 0.487 886 644 02 | 0.355 864 553 78 | 0.218 289 744 26 | 0.140 056 760 99 | 0.051 858 728 624 | 0.472 110 323 5  | 0.318 615 352 33 | 0.246 685 976 1  |
| 公园绿地区 | 0.415 914 518 15 | 0.281 092 012 13 | 0.314 331 584 02 | 0.534 657 244 43 | 0.075 830 961 899 | 0.385 483 870 97 | 0.216 866 205 47 | 0.335 131 289 34 |

表 1-7 均值

|       | As ( $\mu\text{g/g}$ ) | Cd (ng/g)      | Cr ( $\mu\text{g/g}$ ) | Cu ( $\mu\text{g/g}$ ) | Hg (ng/g)      | Ni ( $\mu\text{g/g}$ ) | Pb ( $\mu\text{g/g}$ ) | Zn ( $\mu\text{g/g}$ ) |
|-------|------------------------|----------------|------------------------|------------------------|----------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 生活区   | 6.105 5                | 248.677 5      | 50.411 75              | 43.993 25              | 87.569 75      | 17.712 5               | 53.976 5               | 143.367 75             |
| 工业区   | 5.888 965 517 2        | 307.313 793 1  | 42.664 137 931         | 44.475 172 414         | 205.096 206 9  | 17.422 413 793         | 64.072 413 793         | 153.546 551 72         |
| 山区    | 4.106 25               | 152.623 437 5  | 36.306 875             | 16.994 375             | 41.432 343 75  | 14.069 843 75          | 36.496 25              | 70.624 531 25          |
| 交通区   | 5.278 907 563          | 299.596 638 66 | 46.782 100 84          | 49.522 268 908         | 97.026 470 588 | 16.146 806 723         | 57.602 521 008         | 172.166 806 72         |
| 公园绿地区 | 6.084 838 709 7        | 208.4          | 41.447 096 774         | 24.855 161 29          | 112.649 677 42 | 14.615 806 452         | 51.554 193 548         | 98.830 967 742         |

2. 模型的建立与求解

1) 问题一

使用上一步中处理过的数据,将其输入 MATLAB 中作图,依照输入不同依次得到该城区的地形图、等高线地形图、8 种元素关于该城区平面的浓度三维分布图和平面浓度分布图,如图 1-1~图 1-10 所示。

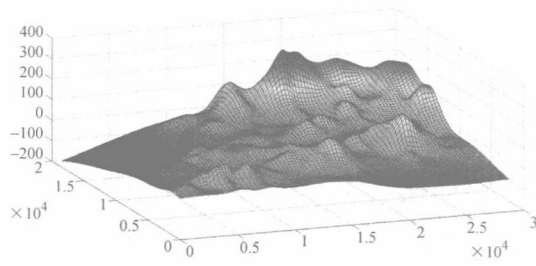


图 1-1 三维地形图

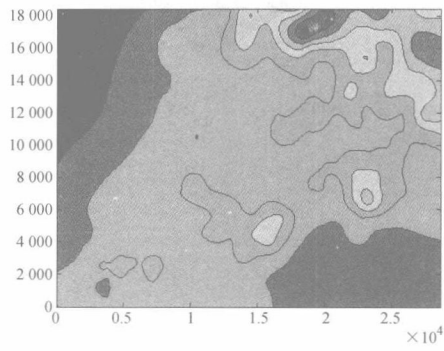


图 1-2 等高线地形图

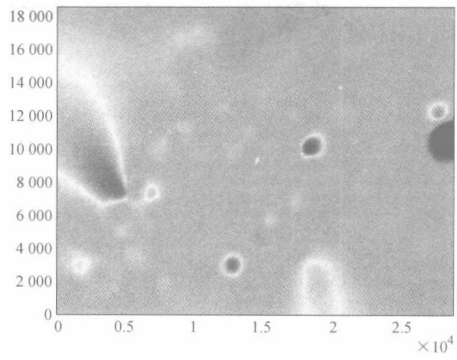
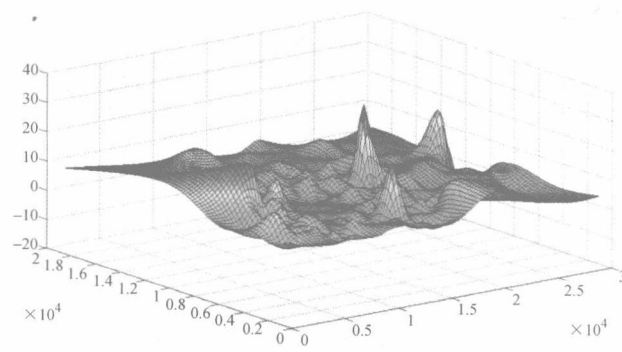


图 1-3 As 三维浓度分布图和平面浓度分布

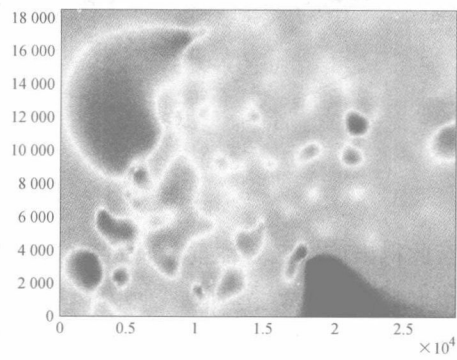
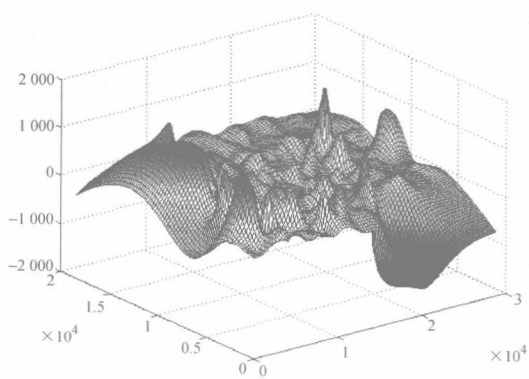


图 1-4 Cd 三维浓度分布图和平面浓度分布

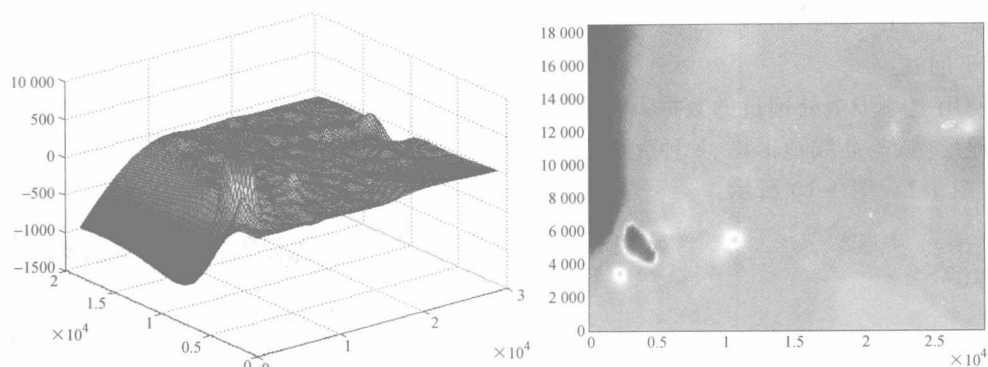


图 1-5 Cr 三维浓度分布图和平面浓度分布

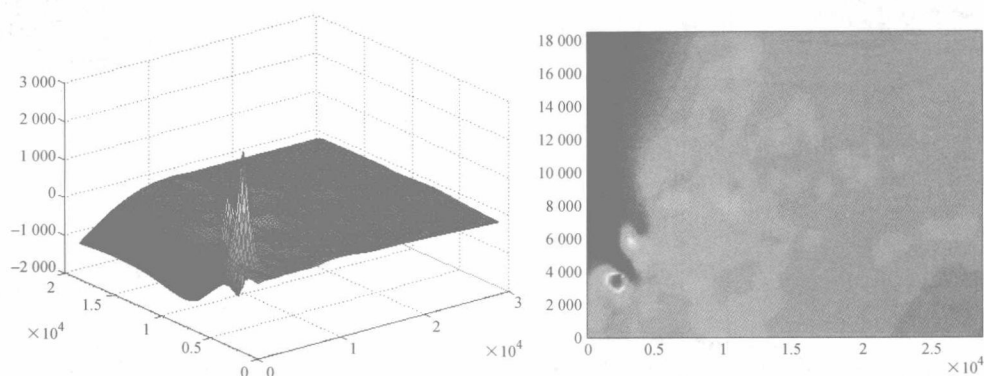


图 1-6 Cu 三维浓度分布图和平面浓度分布

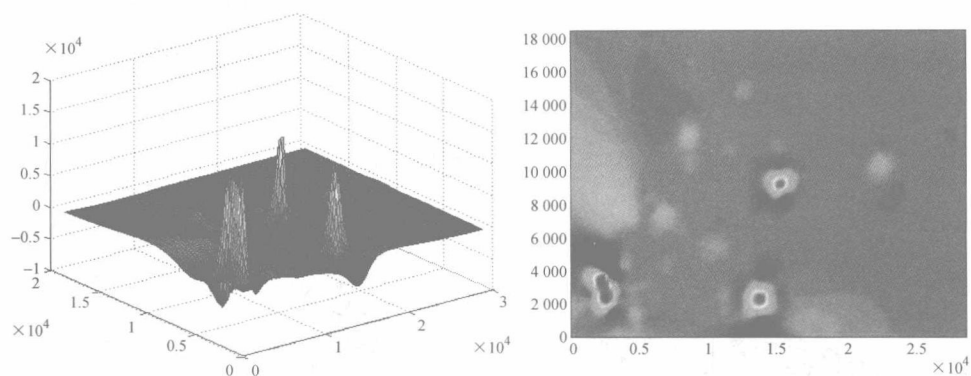


图 1-7 Hg 三维浓度分布图和平面浓度分布

至此得出该城区 8 种重金属元素的空间分布, 下面开始分析不同区域的重金属污染程度。我们使用两个模型通过不同方法解决此分析问题。

#### 模型一 内梅罗综合污染指数法

第一步, 首先用单因子指数法求出每个重金属元素的污染指数。

单因子指数法可确定主要的重金属污染物及其危害程度。一般以污染指数来表示, 以重金属含量实测值和评价标准值(本文中采用表 1-3 中所给的背景值均值)相比除去量纲来

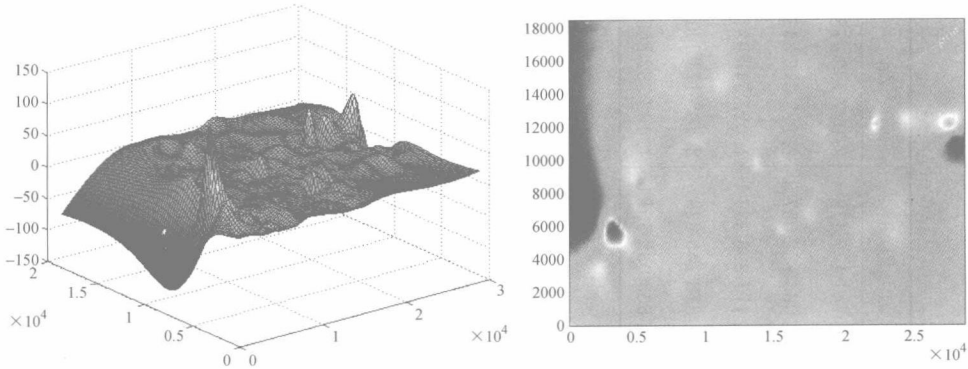


图 1-8 Ni 三维浓度分布图和平面浓度分布

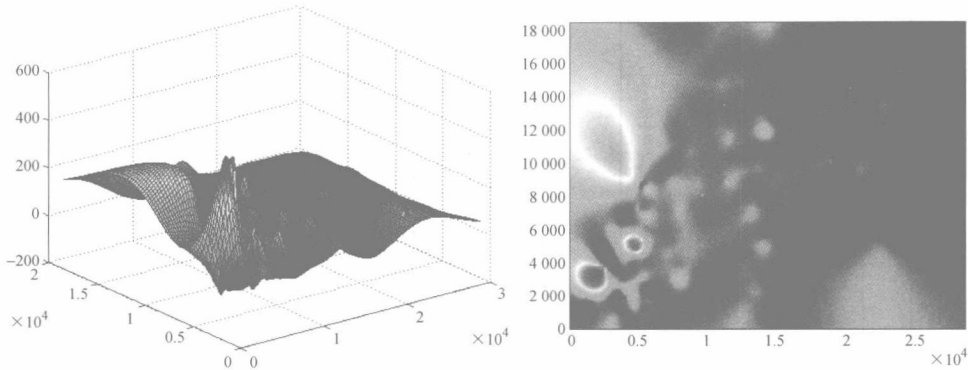


图 1-9 Pb 三维浓度分布图和平面浓度分布

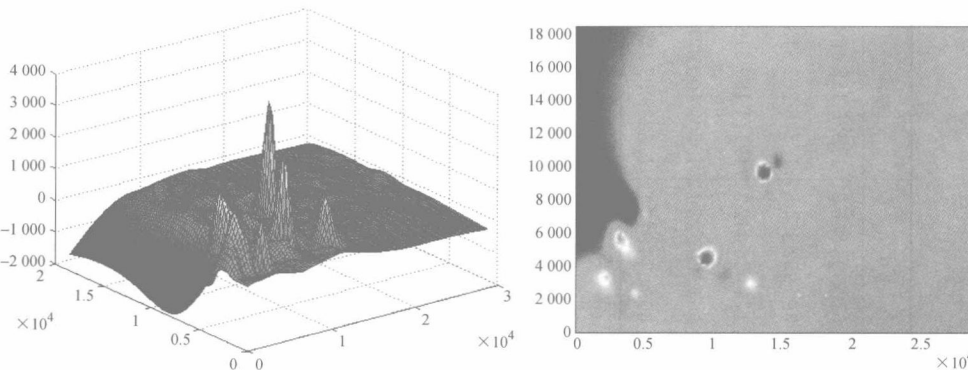


图 1-10 Zn 三维浓度分布图和平面浓度分布

计算：

$$P_i = \frac{X_i}{S_i} \tag{2}$$

式中,  $P_i$  为重金属元素  $i$  的污染指数;  $X_i$  为重金属  $i$  的含量实测值;  $S_i$  为污染物  $i$  的评价标准, 取值为该区的自然背景值的均值。

下面根据式(2)计算 5 个功能区的  $P_i$  值, 以此作为  $X_i$  值来计算  $P_i$ , 结果如表 1-8 所示。

表 1-8

|      | As              | Cd              | Cr              | Cu              | Hg              | Ni              | Pb              | Zn              |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 生活区  | 1.695 972 222 2 | 1.912 903 846 2 | 1.626 185 483 9 | 3.332 821 969 7 | 2.501 992 857 1 | 1.440 040 650 4 | 1.741 177 419 4 | 2.077 793 478 3 |
| 工业区  | 1.635 823 754 8 | 2.363 952 254 6 | 1.376 262 513 9 | 3.369 331 243 5 | 5.859 891 625 6 | 1.416 456 405 9 | 2.066 852 057 8 | 2.225 312 343 8 |
| 山区   | 1.140 625       | 1.174 026 442 3 | 1.171 189 516 1 | 1.287 452 651 5 | 1.183 781 25    | 1.143 889 735 8 | 1.177 298 387 1 | 1.023 543 931 2 |
| 交通区  | 1.466 363 212   | 2.304 589 528 1 | 1.509 100 027 1 | 3.751 687 038 5 | 2.772 184 873 9 | 1.312 748 514   | 1.858 145 839   | 2.495 171 111 9 |
| 公园绿地 | 1.690 232 974 9 | 1.603 076 923 1 | 1.337 003 121 7 | 1.882 966 764 4 | 3.218 562 212   | 1.188 276 947 3 | 1.663 038 501 6 | 1.432 332 865 8 |

表 1-9

|      | As                | Cd               | Cr                | Cu               | Hg               | Ni                | Pb               | Zn               |
|------|-------------------|------------------|-------------------|------------------|------------------|-------------------|------------------|------------------|
| 生活区  | 0.103 863 302 23  | 0.117 148 446 02 | 0.099 589 481 589 | 0.204 105 875 67 | 0.153 224 939 01 | 0.088 189 756 497 | 0.106 631 720 84 | 0.127 246 477 97 |
| 工业区  | 0.080 527 382 146 | 0.116 371 269 23 | 0.067 749 852 064 | 0.165 863 482 44 | 0.288 467 343 07 | 0.069 728 493 648 | 0.101 745 793 22 | 0.109 546 384 19 |
| 山区   | 0.122 624 024 62  | 0.126 214 879 88 | 0.125 909 893 31  | 0.138 408 877 27 | 0.127 263 580 18 | 0.122 975 003 28  | 0.126 566 633 56 | 0.110 037 107 91 |
| 交通区  | 0.083 936 121 326 | 0.131 917 048 01 | 0.086 382 420 082 | 0.214 750 380 99 | 0.158 682 681 09 | 0.075 143 059 814 | 0.106 362 157 28 | 0.142 826 131 67 |
| 公园绿地 | 0.120 597 491 6   | 0.114 378 939 85 | 0.095 394 673 477 | 0.134 348 975 51 | 0.229 643 211 96 | 0.084 783 116 466 | 0.118 657 176 08 | 0.102 196 415 12 |

进一步计算每个功能区每个  $P_i$  所占的比重,即根据式  $P'_i = \frac{P_i}{\sum_{i=1}^8 P_i}$  算得每个区 8 种重金

属的污染程度大小,如表 1-9 所示。

根据表 1-9 中数据,画每个区的饼状图表示如下。

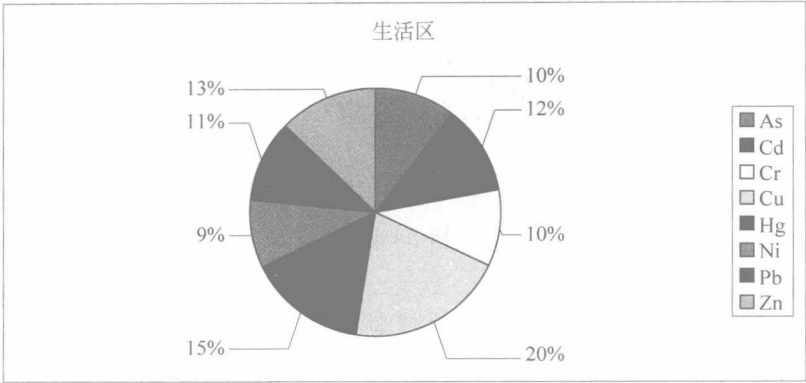


图 1-11

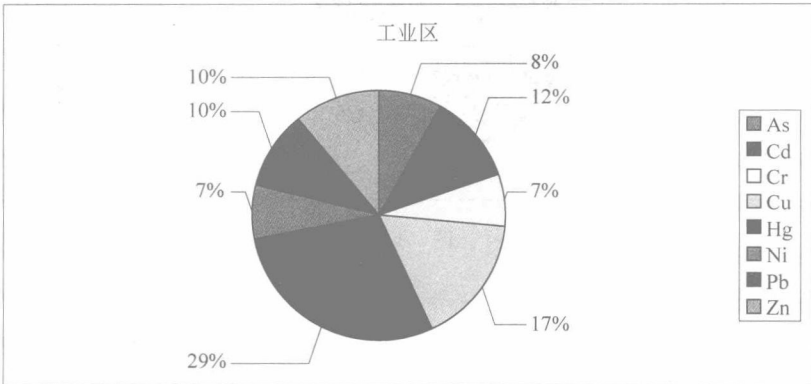


图 1-12

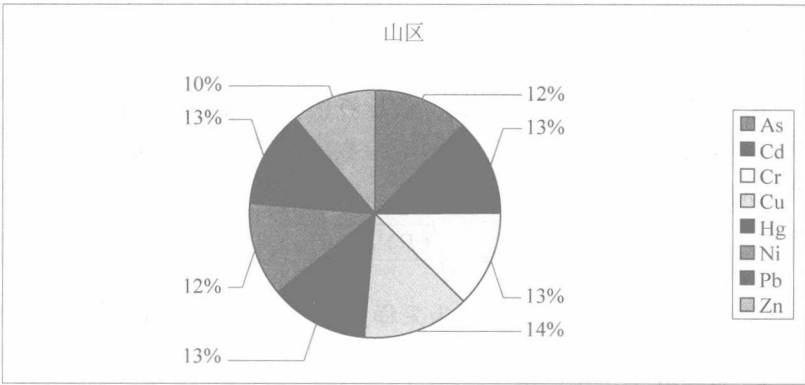


图 1-13

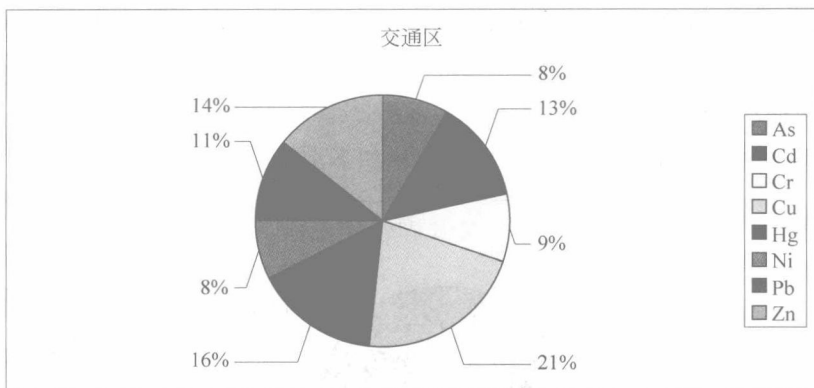


图 1-14

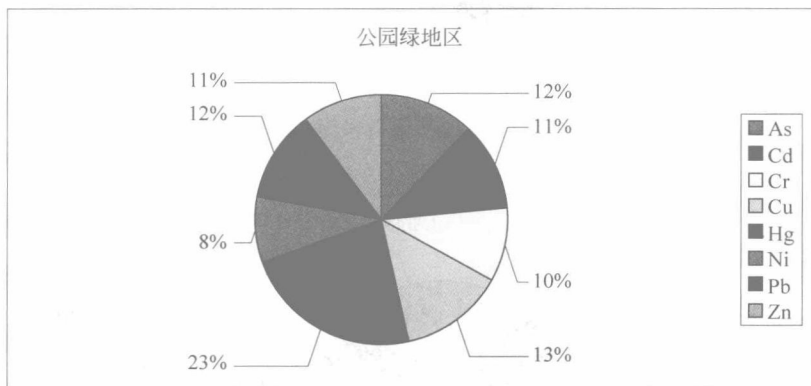


图 1-15

分析数据可得出如下结论：

在生活区，重金属污染因子的程度大小排序为  $\text{Cu} > \text{Hg} > \text{Zn} > \text{Cd} > \text{Pb} > \text{As} > \text{Cr} > \text{Ni}$ ；

工业区，重金属污染因子的程度大小排序为  $\text{Hg} > \text{Cu} > \text{Cd} > \text{Zn} > \text{Pb} > \text{As} > \text{Ni} > \text{Cr}$ ；

山区，重金属污染因子的程度大小排序为  $\text{Cu} > \text{Hg} > \text{Pb} > \text{Cd} > \text{Cr} > \text{Ni} > \text{As} > \text{Zn}$ ；

交通区，重金属污染因子的程度大小排序为  $\text{Cu} > \text{Hg} > \text{Zn} > \text{Cd} > \text{Pb} > \text{Cr} > \text{As} > \text{Ni}$ ；

公园绿地区，重金属污染因子的程度大小排序为  $\text{Hg} > \text{Cu} > \text{As} > \text{Pb} > \text{Cd} > \text{Zn} > \text{Cr} > \text{Ni}$ 。

第二步，利用单因子指数法中算得的  $P_i$  值计算内梅罗综合污染指数。

内梅罗综合污染指数法兼顾了单因子污染指数的平均值和最高值，可以突出污染较重的重金属污染物的作用。其计算公式为

$$P_g = \sqrt{\frac{(\bar{P})^2 + P_{\max}^2}{2}} \quad (3)$$

式中， $P_g$  是采样点的综合污染指数； $P_{\max}$  为采样点处重金属污染物单项污染指数中的最大

值； $\bar{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i$  为单因子污染指数平均值。

本文取评判标准如表 1-10(土壤内梅罗综合污染指数评价标准)所示。



表 1-10

|   |                    |                  |
|---|--------------------|------------------|
| 1 | $P_g \leq 0.7$     | 安全,清洁            |
| 2 | $0.7 < P_g \leq 1$ | 警戒级,尚清洁          |
| 3 | $1 < P_g \leq 2$   | 轻污染,土壤作物开始受到污染   |
| 4 | $2 < P_g \leq 3$   | 中污染,土壤作物受中污染     |
| 5 | $P_g > 3$          | 重污染,土壤作物受污染已相当严重 |

利用 Excel 统计计算得到 283 个样本点的  $P_g$  值,对照表 1-10 中的标准评出各个样本点的土壤环境质量等级,由于其数据表格过于大,故收于附录,下面仅给出 5 个功能区的  $P_g$  值及其所属的等级。

表 1-11

| 功能区(样本点数) | $P_g$   | 等级  |
|-----------|---------|-----|
| 生活区(40)   | 2.763 5 | 中污染 |
| 工业区(29)   | 4.515 9 | 重污染 |
| 山区(64)    | 1.226 7 | 轻污染 |
| 交通区(119)  | 3.069 5 | 重污染 |
| 公园绿地区(31) | 2.591 2 | 中污染 |

模型二 模糊综合评判模型

使用本模型需确定被评价对象的因素论域、评语等级论域,评价因素权向量,然后建立其隶属度函数求解,下面按步骤求解。

本题主要讨论 As、Cd、Cr、Cu、Hg、Ni、Pb、Zn 在土壤中的含量多少对土壤质量的影响。为此可确定因素集  $U = \{As, Cd, Cr, Cu, Hg, Ni, Pb, Zn\}$ ,评价集  $V = \{\text{清洁, 尚清洁, 轻污染, 中污染, 重污染}\}$ ,并根据国标 GB 15618—1995<sup>[7]</sup>将评价集分以下 5 个等级,见表 1-12。

表 1-12

| 元素     | mg/kg |     |     |     |      |
|--------|-------|-----|-----|-----|------|
|        | 浓 度   |     |     |     |      |
|        | 1 级   | 2 级 | 3 级 | 4 级 | 5 级  |
| As(旱地) | 15    | 25  | 30  | 40  | >40  |
| Cd     | 0.2   | 0.3 | 0.6 | 1   | >1.0 |
| Cr(旱地) | 90    | 150 | 250 | 300 | >300 |
| Cu(农田) | 35    | 50  | 100 | 400 | >400 |
| Hg     | 0.15  | 0.3 | 1   | 1.5 | >1.5 |
| Ni     | 40    | 50  | 60  | 200 | >200 |
| Pb     | 35    | 250 | 350 | 500 | >500 |
| Zn     | 100   | 200 | 300 | 500 | >500 |

注:元素后括号内文字表示参考国标的分类。

为使各项指标具有可比性,首先需对各项指标进行统一的无量纲化标准处理,按照式(1)经过极差变换后,得到 8 种重金属对应的分类区间如表 1-13 所示。

表 1-13

mg/kg

| 元素     | 浓 度 |           |           |     |     |
|--------|-----|-----------|-----------|-----|-----|
|        | 1 级 | 2 级       | 3 级       | 4 级 | 5 级 |
| As(旱地) | 0   | 0.4       | 0.6       | 1   | >1  |
| Cd     | 0   | 0.125     | 0.5       | 1   | >1  |
| Cr(旱地) | 0   | 0.285 714 | 0.761 905 | 1   | >1  |
| Cu(农田) | 0   | 0.041 096 | 0.178 082 | 1   | >1  |
| Hg     | 0   | 0.111 111 | 0.629 63  | 1   | >1  |
| Ni     | 0   | 0.062 5   | 0.125     | 1   | >1  |
| Pb     | 0   | 0.462 366 | 0.677 419 | 1   | >1  |
| Zn     | 0   | 0.25      | 0.5       | 1   | >1  |

设 8 种重金属元素对应的权重向量为  $W=(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8)$ 。在一般的模糊综合评价中普遍采用污染物浓度超标赋权法,即用实测值比标准值,然后归一化处理得到数值。具体计算步骤为:设  $W_{ki}$  为  $k$  样品  $i$  元素的权重,  $X_{ki}$  为土壤样品实测值,  $S_i$  标准值(背景值),则  $W_{ki} = \frac{X_{ki}/S_i}{\sum_{j=1}^n X_{kj}/S_j}$ ,但考虑到不同重金属有不同的毒性,单独采用上述方法可

能会掩盖某些低浓度有机组分的毒性作用,因此,将重金属元素的毒性级别纳入权重考虑。记  $F_i$  为第  $i$  个污染因子的毒性级别指数,则权重公式可变为

$$W_{ki} = \frac{Y_{ki}/F_i}{\sum_{j=1}^n Y_{kj}/F_j}$$

$$Y_{ki} = \frac{X_{ki}/S_i}{\sum_{j=1}^n X_{kj}/S_j}$$

根据 Hakanson 制定的标准化重金属毒性响应系数<sup>[2]</sup>,得出本文中讨论的 8 种重金属的毒性系数,分别为  $Zn=1<Cr=2<Cu=Ni=Pb=5<As=10<Cd=30<Hg=40$ 。由上式可看出毒性越大的重金属其毒性级别指数应越小,所以将 Hakanson 的毒性响应系数同时除以毒性最大的 Hg 元素的系数,得各金属毒性级别指数分别为  $F_{Zn}=40, F_{Cr}=20, F_{Cu}=F_{Ni}=F_{Pb}=8, F_{As}=4, F_{Cd}=1.33, F_{Hg}=1$ ,再对这些指数按照毒性从大到小排序分配指数赋值,得到  $F_{Hg}=1, F_{Cd}=2, F_{As}=3, F_{Cu}=F_{Ni}=F_{Pb}=4, F_{Cr}=5, F_{Zn}=1$ 。

将  $X_{ki}, F_i, S_i$  的值代入即可算得每个样本点每种重金属元素的权值。283 个样本点的权值见附录,表 1-14 给出了 5 个功能区的权值。

表 1-14

|       | As        | Cd        | Cr        | Cu        | Hg        | Ni        | Pb        | Zn        |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 生活区   | 0.089 396 | 0.151 246 | 0.051 431 | 0.131 757 | 0.395 646 | 0.056 929 | 0.068 834 | 0.054 761 |
| 工业区   | 0.054 821 | 0.118 834 | 0.027 673 | 0.084 687 | 0.589 145 | 0.035 602 | 0.051 95  | 0.037 288 |
| 山区    | 0.109 951 | 0.169 756 | 0.067 738 | 0.093 078 | 0.342 332 | 0.082 699 | 0.085 114 | 0.049 332 |
| 交通区   | 0.071 235 | 0.167 934 | 0.043 987 | 0.136 692 | 0.404 015 | 0.047 83  | 0.067 701 | 0.060 607 |
| 公园绿地区 | 0.089 812 | 0.127 772 | 0.042 626 | 0.075 04  | 0.513 065 | 0.047 355 | 0.066 275 | 0.038 054 |