

奥赛物理题选 第二版

AOSAI WULI TIXUAN

舒幼生 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

奥赛物理题选

(第二版)

舒幼生 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

奥赛物理题选/舒幼生编著. —2版. —北京:北京大学出版社, 2014.8

ISBN 978-7-301-24543-9

I. ①奥… II. ①舒… III. ①中学物理课—高中—习题集 IV. ①G634.75

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 163529 号

书 名: 奥赛物理题选(第二版)

著作责任者: 舒幼生 编著

责任编辑: 顾卫宇

标准书号: ISBN 978-7-301-24543-9/O·0982

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> 新浪官方微博:@北京大学出版社 电子信箱:zpup@pup.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752038 出版部 62754962

印 刷 者: 三河市博文印刷有限公司

经 销 者: 新华书店

787 毫米×1092 毫米 16 开本 39.5 印张 985 千字

2013 年 6 月第 1 版

2014 年 8 月第 2 版 2014 年 8 月第 1 次印刷

定 价: 79.00 元

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有, 侵权必究

举报电话: 010-62752024 电子信箱: fd@pup.pku.edu.cn

前 言

多年来，利用暑寒假，为对奥赛物理有兴趣的中学生上辅导课。讲课内容主要参考全国中学生物理竞赛考试大纲，少量内容涉及学生感兴趣的大学普通物理教程中的若干部分。

假期竞赛辅导课实际上仍是教学，有教有学即为教学。历史表明，对绝大多数学生，有教有学与单一自学相比，效率更高、效果更好。于是才有各国、各地丛生林立的学校，才有大学、中学、小学乃至幼儿园的精细延伸。

教学目的是为社会培养和选拔优秀学生。着眼于培养，教学主体应是知识和能力兼顾的素质教学；落实于选拔，发展中的泱泱大国学子无数，选拔不得不以有限时段的笔试为主。下及宽厚的平民百姓，经菲薄的中产者，上达政府官员，一样的“可怜天下父母心”，一样的对儿女期望，遂成竞争大环境。波及教员、校方，教学中自然滋生出大环境下的应试教学。沿袭辩证法，应试教学也有其正能量因素。常谓“熟能生巧”，虽然出自古代一位卖油的老人家的嘴，品味“从量变到质变”，多少还是有一点道理的。至于软件拷贝式的“死记硬背”，即使于个人，其后效应往往也会是一种伤害。

假期辅导课着重素质教学。在梳理知识点的过程中，重在解读物理概念、定律、定理的内涵，以及分析不同知识板块之间内在的联系，讨论学生在学习和解题中常会遇到的疑惑，并适时讲述处理具体问题的思想、方法。其内容累积，将待整理汇编成《奥赛物理专题》一书。

学好理论，便有了解决具体物理问题的基础，具体物理问题中往往还包含着物理知识之外的各种疑难因素，学生也应通过练习来提高分析和处理此类因素的能力。

辅导课准备的物理题较多，其中少量题在课上讲解，所起示范作用在于：

- (1) 训练和提高学生运用物理理论解决具体物理问题的能力；
- (2) 训练和提高学生解决物理问题中包含的非物理性疑难因素的能力；
- (3) 通过讲述处理具体问题的思想、方法，让学生领悟到，重要的并非学会了课上听到的示范性思想、方法，而是“我”在解决疑难问题时能否构建自己的思想、方法。

几乎每个教员都希望自己的学生能在考试中取得较好的成绩。联系到“熟能生巧”的正面效果，辅导课前准备的题目中大多数复印成册，发给每一位学生作为课后练习。逐年累积，其中大部分已汇编成《奥赛物理题选》第一部分“假期辅导班题选”。为提高学生考场应试能力，课前准备一份试题，课间组织一次听课学生间的友谊赛，组织阅卷、评奖后，举行颁奖仪式，活跃讲座氛围。历年试题汇编成《奥赛物理题选》第二部分“假期辅导班友谊赛试题”。

题选部分若干出彩题目系学生自编，早期编题高手有李翌、石长春、张霖涛、韦韬、於海涛、倪彬等，近年编题高手有王达、刘莎、周迪、张涌良、黄浩等。值此《题选》面市之际，感谢在我晚年回忆中依然会是聪明、可爱的这些学生。

多年面对优秀学生，他们在学习中喜欢思考，善于在探索中提出各种疑问，汇集到讲台上。师生交流中，我是收获最多的受益者，实可谓“青出于蓝而胜于蓝，蓝在青中更被青染”。在此，真诚地感谢我的学生们。

舒幼生

北京大学燕北园

2013年6月12日

奥数物理题选/舒幼生等著. —2版. 北京: 人民教育出版社, 2014.5
 ISBN 978-7-309-10643-9
 全套书主要内容包括: 力学、电磁学、热学、光学、原子物理学、相对论、量子力学、天体物理学、宇宙学、统计物理、信息论、非线性科学、混沌理论、复杂系统、网络科学、生物物理学、纳米科学、材料科学、能源科学、环境科学、地球科学、空间科学、海洋科学、大气科学、地球化学、地球物理学、地球天文学、地球生物学、地球语言学、地球社会学、地球法学、地球伦理学、地球哲学、地球艺术、地球文学、地球音乐、地球舞蹈、地球戏剧、地球电影、地球电视、地球广播、地球互联网、地球移动通信、地球能源、地球环境、地球安全、地球健康、地球幸福、地球和谐、地球文明、地球未来。

本书是作者多年从事物理竞赛教学和科研工作的经验总结，旨在为热爱物理的学生提供一本有价值的参考书。全书共分十卷，涵盖了物理学的各个分支。本书不仅注重知识的传授，更强调能力的培养和思维的训练。通过大量的例题和习题，帮助读者加深对物理概念的理解，提高解决问题的能力。本书适合高中物理竞赛选手、物理爱好者以及从事物理教学和科研工作的教师参考使用。

目 录

第一部分 假期辅导班题选	1
力学篇	3
运动学	3
牛顿定律 动量定理	29
能量定理	52
角动量定理 天体运动	88
质心 刚体	116
振动 波动	156
热学篇	198
分子动理论	198
热力学第一定律 热力学第二定律	217
热传导 表面现象	227
电学篇	236
静电场	236
磁场	278
电磁感应	314
电路	339
光学篇	372
几何光学	372
波动光学	412
近代物理篇	420
量子	420
相对论	453
第二部分 假期辅导班联谊赛试题	517
2008年1月寒假班试题	519
解答与评分标准(参考)	521
2008年暑期班试题	530
解答与评分标准(参考)	532
2009年暑期物理竞赛辅导班联谊赛	540
解答与评分标准(参考)	544
2010年暑期物理竞赛辅导班联谊赛	558
解答与评分标准(参考)	562

2011年暑期物理竞赛辅导班联谊赛	577
解答与评分标准(参考)	580
2012年暑期物理竞赛辅导班联谊赛	593
解答与评分标准(参考)	597
2013年暑期物理竞赛辅导班联谊赛	611
解答与评分标准(参考)	615

目 录

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

力学篇

运动学

【例 11】

如图 1-11 所示，某人骑自行车以速率 v 向东行驶，风速为 v_0 ，雨点以速率 v_0 竖直下落。此人感觉到雨点从正东方向吹来，求雨点下落的速度 v_0 与人的速率 v 之比。

第一部分

假期辅导班题选

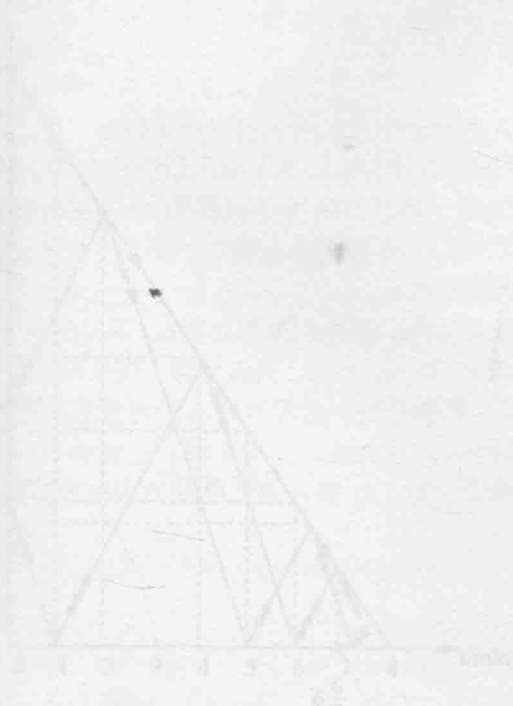


图 1-11

选向问题是如果已知一个质点的速度 v 和加速度 a ，求该质点相对 A、B 的位置及 C 的奔跑方向，则

2011年暑期地理夏令营活动简报	077
报告与评分标准(参考)	080
2012年暑期地理夏令营活动简报	284
报告与评分标准(参考)	287
2013年暑期地理夏令营活动简报	357
报告与评分标准(参考)	360

名师

名师班学员

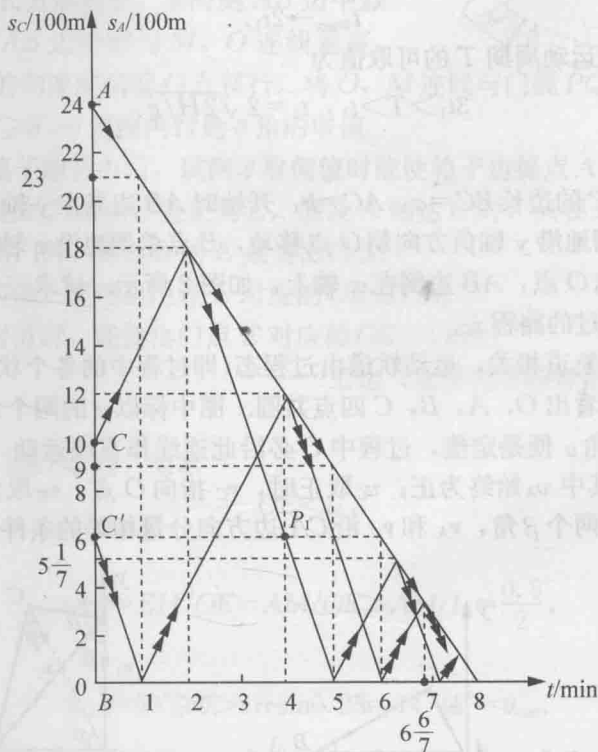
力学篇

运动学

【题 1】

如图所示，骑马人 A, B 相距 2400 m，猎犬 C 在 A, B 连线上，与 A 相距 1400 m，与 B 相距 1000 m。t=0 时刻开始，A 朝 B 骑马速度 200 m/min，B 朝 A 骑马速度 100 m/min；C 先朝 A 奔跑，速度 500 m/min，与 A 相遇后又回头朝 B 奔跑，速度大小不变，直到最后 A, B, C 相遇一处为止。

为判定 $8 \text{ min} \geq t \geq 0$ 时刻 C 相对 A, B 的位置及奔跑方向，可改取相对 B 静止的参考系。在 B 参考系中 B 不动，A 朝 B 的速度为 300 m/min，C 背离 B 的奔跑速度为 400 m/min，C 朝着 B 的奔跑速度为 600 m/min。A, C 各自与 B 的间距 s_A, s_C 随 t 变化的图线及运动方向在题解图中用一个箭矢和两个箭矢区分。例如从图线中可以找到 $t=4 \text{ min}$ 时 C 位于 P_1 处，与 A 相距 600 m，与 B 相距 600 m，C 朝着 B 奔跑。



题解图

逆向问题是如果已知某个 t 时刻(例如 $t=4 \text{ min}$) C 相对 A, B 的位置及 C 的奔跑方向，则

可反过来推导出 $t=0$ 时刻 C 的位置和奔跑方向, 但对于 $t=8\text{min}$ 的末态, 则因所有可能的 $t=0$ 初态均对应共同的 A, B, C 相遇一处的末态, 而无法反过来导出究竟是哪一个初态. 为此, 题解图中又取了 $t=0$ 时刻 C 位于与 B 相距 600m 处, 且朝着 B 奔跑对应的、用三个箭头表示的 $s_C \sim t$ 图线, 它所对应的末态与前相同.

【题 2】

某人用双手做 3 个球的抛球、接球、传球游戏. 过程中左手接住空中落下的一个球, 再传递给右手; 右手接过小球, 并将小球斜向上抛出. 假设每只手中至多留有一个球, 左手接球点高度与右手抛球点高度相同, 每个小球离开右手后的升高量均达 H , 小球相互不碰撞, 试求系统运动周期 T .

解 某个小球第 1 次从右手抛出到第 2 次从右手抛出的时间即为系统运动周期 T . T 可分成两段. 第一段时间 t_1 是小球在空中运动时间, 即有

$$t_1 = 2\sqrt{2H/g}.$$

第二段时间 t_2 包括小球在左手停留时间、从左手到右手传递时间和在右手停留时间. t_2 可短可长, 最短趋向零, 即有

$$t_{2\min} \rightarrow 0,$$

最长需受“每只手中至多留有一个小球”的限制, 故 t_2 的上限对应空中几乎始终只有一个球在运动, 即所讨论的小球几乎在另外两个小球依次都在空中运动过后, 才从右手抛出, 可得

$$t_{2\max} \rightarrow 2t_1.$$

综上所述, 系统运动周期 T 的可取值为

$$3t_1 > T > t_1, \quad t_1 = 2\sqrt{2H/g}.$$

【题 3】

直角三角板 ABC 的边长 $BC=a$, $AC=b$, 开始时 AB 边靠在 y 轴上, B 与坐标原点 O 重合. 今使 A 点单调地沿 y 轴负方向朝 O 点移动, B 点单调地沿 x 轴正方向移动, 如图 1 所示. 最终 A 点到达 O 点, AB 边倒在 x 轴上, 如图 2 所示. 试求三角板从图 1 到图 2 的移动过程中, C 点经过的路程 s_C .

解 路程与运动轨道相关, 运动轨道由过程态(即过程中的各个状态)确定. 取过程态如题解图所示, 可以看出 O, A, B, C 四点共圆. 图中标以 α 的两个角因对应同一圆弧而相等, CO 与 x 轴夹角 α 便是定值, 过程中 C 必沿此连线作直线运动. 引入图示 v_A 和 v_C , 标量化为 v_A 和 v_C . 其中 v_A 始终为正; v_C 取正时, v_C 指向 O 点, v_C 取负时, v_C 背离 O 点. 参考同一圆弧对应的两个 β 角, v_A 和 v_C 沿 CA 边方向分量相等的条件可表述成

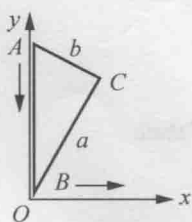


图1

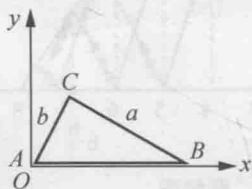
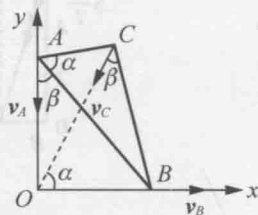


图2



题解图

$$v_A \cos[\pi - (\alpha + \beta)] = v_C \sin \beta,$$

得

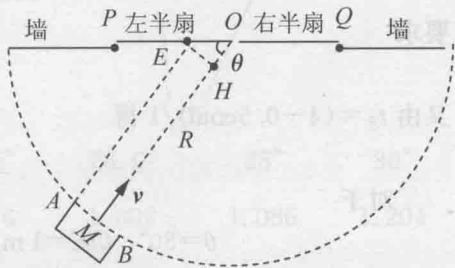
$$v_C = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \beta} v_A \begin{cases} < 0, & \text{当 } \alpha < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}, \\ = 0, & \text{当 } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \\ > 0, & \text{当 } \frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \alpha + \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

可见 C 点开始时沿直线背离 O 点运动, 到达 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ 位置时停下, 而后沿直线指向 O 点运动, 一直到图 2 所示位置为止. 据此得

$$s_C = 2\sqrt{a^2 + b^2} - (a + b).$$

【题 4】

如图所示的自动推拉门 PQ, 左、右两半扇, 每半扇长 $l_0 = 2\text{m}$. 当物体触及与门的中心 O 相距 $R = 4\text{m}$ 的半圆周时, 闭合的两半扇门即以加速度 $a = 0.25\text{m/s}^2$ 左、右匀加速打开, 各自行进 $l_0/2$ 路程后, 又以相同的加速度大小, 左、右匀减速继续打开. 长 $AB = 1\text{m}$ 的长方形箱子, 某时刻 AB 边中点 M 触及 R 半圆周, AB 边恰好与 M, O 连线垂直, 箱子正以 $v = 1\text{m/s}$ 的匀速度朝着 O 点移行. 将 O, M 连线与门线 PQ 的夹角记为 θ , 因左右对称, 只需在 $90^\circ \geq \theta > 0$ 范围内讨论 θ 角的取值.



- (1) 暂不考虑箱子能否出门, 试问 θ 取何值时能使箱子边缘点 A 到达门线 PQ 内?
- (2) 将 A 点到达的门线点位置记为 E, 假设 A 到达 E 时, 只要 E 点已被“打开”, 那么箱子一定可以推出门外, 称这样的 E 点为出门点.
 - (2.1) 问 θ 取何值, 能使命点 E 对应的 $OE \leq 1\text{m}$?
 - (2.2) 问 θ 取何值时, 能使命点 E 对应的 $OE > 1\text{m}$?

——王达 (北京大学物理学院 2004 级), 舒幼生

解 参考题图.

- (1) A 点进入门线 PQ 内, 要求

$$OE < l_0,$$

因

$$\sin \theta = EH/OE = AM/OE > AM/l_0 = \frac{0.5}{2},$$

故 θ 可取值为

$$\theta_{\max} = 90^\circ \geq \theta > \arcsin 0.25 = 14.48^\circ = \theta_{\min}.$$

- (2) 门开启一半所需时间记为 t_0 , 由 $\frac{l_0}{2} = \frac{1}{2} a t_0^2$, 得

$$t_0 = \sqrt{l_0/a} = \sqrt{8}\text{s} = 2.828\text{s},$$

门全部开启所需时间便为

$$2t_0 = 2\sqrt{8}s = 5.657s.$$

对于图示的 θ 角, 箱子边缘点 A 到达门线所需时间为

$$t_A = \frac{AE}{v} = \frac{R - AM \cot \theta}{v} = \frac{4 - 0.5 \cot \theta}{1} s,$$

$$\theta_{\max} = 90^\circ \xrightarrow{\text{对应}} 4s = t_{A\max} \geq t_A > t_{A\min} = 2.064s \xrightarrow{\text{对应}} \theta_{\min} = 14.48^\circ.$$

因

$$2t_0 = 5.657s > 4s = t_{A\max},$$

故不必考虑门全部打开后再关闭的过程.

(2.1) 出门点 E 对应 $OE \leq 1m$.

要求 A 到达 E 时, E 或者刚被打开, 或者此前已被打开.

首先由

$$\sin \theta = AM/OE \geq 0.5/1,$$

要求

$$90^\circ \geq \theta \geq 30^\circ,$$

又由 $t_A = (4 - 0.5 \cot \theta)/1$ 得

$$4s \geq t_A \geq 3.134s.$$

对于

$$\theta = 30^\circ, OE = 1m, \Rightarrow t_A = 3.134s > 2.828s = t_0,$$

即在 A 到达 E 点时, 此前 E 已被打开, 箱子自然能出门. 而在

$$\theta > 30^\circ, OE < 1m, \Rightarrow t_A \text{ 更长, 更大于 } t_0,$$

即在 A 到达 E 点时, E 在更早时刻已被打开, 箱子更“容易”出门.

结论: $OE \leq 1m$ 时, θ 可取值为

$$90^\circ \geq \theta \geq 30^\circ.$$

(2.2) 出门点 E 对应 $OE > 1m$.

首先由 $\theta_{\min} = 14.48^\circ$, 和

$$\sin \theta = AM/OE < \frac{0.5}{1}, \Rightarrow \theta < 30^\circ,$$

要求

$$30^\circ > \theta > 14.48^\circ.$$

又由 $t_A = (4 - 0.5 \cot \theta)/1$, 得

$$\theta = 30^\circ \xleftarrow{\text{对应}} 3.134s > t_A > 2.064s \xrightarrow{\text{对应}} \theta = 14.48^\circ.$$

但在

$$t_0 = 2.828s > t_A > 2.064s$$

范围内, A 到达 E 点时, 因 $OE > 1m$, E 点尚未被打开, 箱子不能出门, 故此时段不可取. 于是只可取时段

$$2t_0 = 5.657s > 3.134s > t_A \geq 2.828s = t_0.$$

此时段已等于或超过 t_0 , 门即或已进入减速状态, 要求左半扇门在此 t_A 时段行进的路程 $l_{\text{左}}$

满足下述关系式:

$$l_{\text{左}} \geq OE = AM / \sin\theta = (0.5 / \sin\theta) \text{ m},$$

$$l_{\text{左}} = \frac{l_0}{2} + (at_0)(t_A - t_0) - \frac{1}{2}a(t_A - t_0)^2; \quad t_A = \frac{4 - 0.5\cot\theta}{1} \text{ s}.$$

即要求

$$1 + (0.25 \times \sqrt{8}) \times (4 - 0.5\cot\theta - \sqrt{8}) - \frac{1}{2} \times 0.25 \times (4 - 0.5\cot\theta - \sqrt{8})^2 \sin\theta \geq 0.5,$$

或
$$\begin{cases} f(\theta) = [2 + \sqrt{2}(4 - \sqrt{8} - 0.5\cot\theta) - 0.25(4 - \sqrt{8} - 0.5\cot\theta)^2] \sin\theta, \\ f(\theta) \geq 1. \end{cases}$$

考虑到此时段对应的 θ 上限为 30° , 对应的 θ 下限则可由

$$t_A = t_0, \quad t_0 = \sqrt{8} \text{ s} \quad \text{和} \quad t_A = \frac{4 - 0.5\cot\theta}{1} \text{ s}$$

求得为

$$\theta = 23.11^\circ.$$

故在

$$30^\circ > \theta \geq 23.11^\circ$$

角范围内作数值计算, 所得如下:

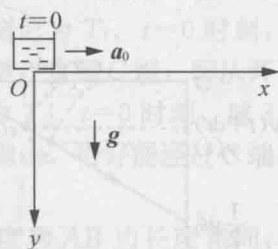
θ	23.2°	25°	26°	26.5°	26.6°	28°	30°
$f(\theta)$	0.791	0.904	0.965	0.996	1.002	1.086	1.204

结论: $OE > 1 \text{ m}$ 时, θ 可取值为

$$30^\circ > \theta > 26.6^\circ.$$

【题 5】

在竖直平面上设置图示的水平 x 轴和竖直向下的 y 轴, $t=0$ 时刻位于 $x=0, y=0$ 处的小水桶从静止出发, 以匀加速度 a_0 沿 x 轴运动. 过程中桶底小孔向下漏水, 单位时间漏水质量为常量 m_0 . 略去漏水相对水桶的初速度, 在任意 $t_0 > 0$ 时刻, 试求



(1) 漏水迹线方程;

(2) 漏水迹线中的质量线密度 λ 随 y 坐标的分布函数.

解 (1) t_0 之前, 于 t 时刻从桶底漏出的水, 在 t_0 时刻的 x, y 坐标分别为

$$x = \frac{1}{2}a_0t^2 + a_0t(t_0 - t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + a_0tt_0 - a_0t^2 = -\frac{1}{2}a_0t^2 + a_0tt_0$$

$$= \frac{1}{2}a_0t_0^2 - \frac{1}{2}a_0t_0^2 + a_0tt_0 - \frac{1}{2}a_0t^2 = \frac{1}{2}a_0t_0^2 - \frac{1}{2}a_0(t_0 - t)^2,$$

$$y = \frac{1}{2}g(t_0 - t)^2.$$

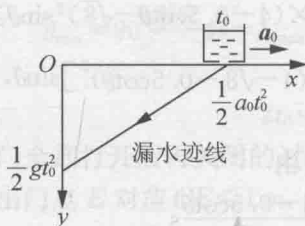
得漏水迹线方程为

$$x = \frac{1}{2}a_0t_0^2 - \frac{a_0}{g}y.$$

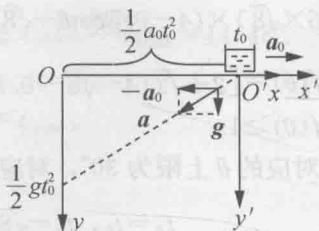
迹线如题解图 1 所示.

或者改取水桶参考系 $O'x'y'$, 该系中每一滴水漏水都沿题解图 2 所示 $a = -a_0 + g$ 方向作匀加速直线运动, 其运动轨迹即为漏水迹线. t_0 时刻漏水迹线如题解图 2 中虚线所示, 方程为

$$x' = -\frac{a_0}{g}y', \text{ 因 } x' = x - \frac{1}{2}a_0t_0^2, y' = y, \text{ 得 } x = \frac{1}{2}a_0t_0^2 - \frac{a_0}{g}y.$$



题解图 1



题解图 2

(2) 如前所述, t_0 之前, 于 t 时刻从桶底漏出的水在 t_0 时刻的 x, y 坐标分别为

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0t_0^2 - \frac{1}{2}a_0(t_0 - t)^2,$$

$$y(t) = \frac{1}{2}g(t_0 - t)^2.$$

t_0 之前, 于 $t + dt$ 时刻从桶底漏出的水在 t_0 时刻的 x, y 坐标分别为

$$x(t + dt), y(t + dt).$$

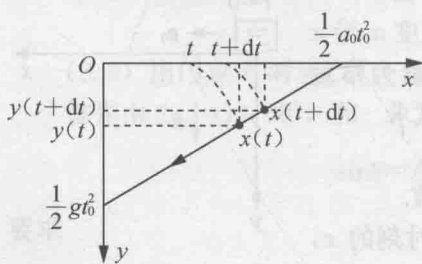
dt 时间内质量为 $dm = m_0 dt$ 的漏水, 在 t_0 时刻迹线中占据的 dx, dy 以及长度 dl 为

$$dx = a_0(t_0 - t)dt, dy = -g(t_0 - t)dt,$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{a_0^2 + g^2}(t_0 - t)dt,$$

其中 dy 为负, 是因为 $y(t) > y(t + dt)$, 如题解图 3 所示. 迹线中 $y(t)$ 处质量线密度为

$$\lambda(t) = \frac{dm}{dl} = m_0 / \sqrt{a_0^2 + g^2}(t_0 - t),$$



题解图 3

将

$$t_0 - t = \sqrt{2y/g}$$

代入, 即得 t_0 时刻迹线中质量线密度 λ 随 y 坐标的分布式:

$$\lambda(y) = \frac{m_0}{\sqrt{a_0^2 + g^2}} \sqrt{\frac{g}{2y}}.$$

【题 6】

如图, 在某竖直平面上设置 Oxy 坐标系, 其中 x 轴水平, y 轴竖直向上. 从 O 点抛出一个球, 初速度 v_0 在 Oxy 坐标面内, 大小 v_0 恒定, 方向与 x 轴夹角 θ 在 0 到 2π 之间. 小球所有可能的抛物线轨道对应的包络线已在图中用虚线表示, 试求包络线方程.

解 Oxy 坐标面中, 包络线外的各 (x, y) 点均无 θ 角对应的抛物线轨道经过, 包络线内的各 (x, y) 点似乎有两个 θ 角对应的抛物线轨道经过, 包络线上各 (x, y) 点则只有且必有一个 θ 角对应的抛物线轨道经过.

据此, 将小球抛物线轨道由常见的表述式

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + (\tan \theta)x$$

改述为

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \theta) x^2 + (\tan \theta)x.$$

因对称, 只取 I、II 象限的 θ 角解:

$$\theta = \arctan \left[\frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 2v_0^2 g y - g^2 x^2}}{g x} \right],$$

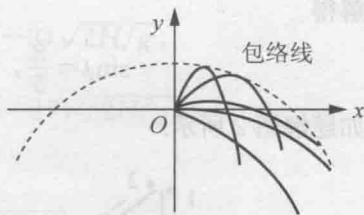
$$\text{判别式} \begin{cases} v_0^4 - 2v_0^2 g y - g^2 x^2 < 0: \text{ 包络线外的 } \{x, y\} \text{ 点,} \\ v_0^4 - 2v_0^2 g y - g^2 x^2 = 0: \text{ 包络线上的 } \{x, y\} \text{ 点,} \\ v_0^4 - 2v_0^2 g y - g^2 x^2 > 0: \text{ 包络线内的 } \{x, y\} \text{ 点.} \end{cases}$$

延展到 Oxy 平面 I、II、III、IV 象限, 得包络线方程为

$$y = \frac{1}{2v_0^2 g} (-g^2 x^2 + v_0^4),$$

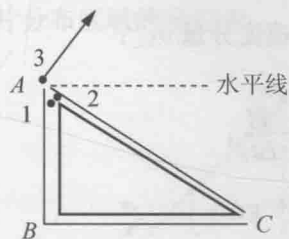
是一条数学上的抛物线.

顺便一提, 包络线内的 $\{x, y\}$ 点对应判别式大于零, 故有两个 θ 角解, 这表明包络线内任何一个点必有且仅有两条小球的抛物线轨道经过.



【题 7】

如图所示, 水平地面上方某竖直平面内有一固定的、内壁光滑的直角三角形管道 ABC, 直角边 AB 竖直向下, 直角边 BC 水平朝右, C 端开口. 取 3 个小球. $t=0$ 时刻,



球 1 从 A 端静止释放, 沿 AB 下滑, 到达 B 处后速度大小不变, 方向自动地改变为沿 BC 朝右, 直到 C 端, 即从开口处离开管道, 落到地面时刻记为 T_1 . $t=0$ 时刻, 球 2 从 A 端静止释放, 沿 AC 下滑, 直到 C 端, 即从开口处离开管道, 落到地面时刻记为 T_2 . $t=0$ 时刻, 球 3 在此竖直平面内从 A 端斜向上方抛出, 恰好能经过 C 端开口处, 落到地面时刻记为 T_3 .

已知直角边 BC 距地面的高度和 AB 边长度相同, 球 1、2、3 到达 C 端时刻相同, 试求 $T_1 : T_2 : T_3$.

解 将 AB 边长和 BC 边距地面高度同记为 H .

由球 1、2 同时到达 C 端, 确定直角三角形 ABC 的几何特征:

参考题解图 1, 有

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{1}{2} g t_1^2, \\ H \cot \phi &= (g t_1) \cdot t_2, \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2H + H \cot \phi = g t_1 (t_1 + t_2),$$

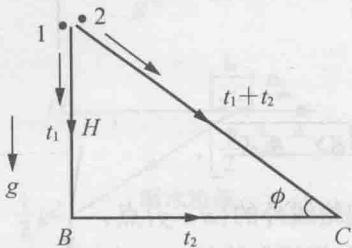
$$g t_1 = g (\sin \phi) (t_1 + t_2), \Rightarrow t_1 + t_2 = t_1 / \sin \phi,$$

$$\Rightarrow 2H + H \cot \phi = g t_1^2 / \sin \phi = 2H / \sin \phi, \Rightarrow 2 \sin \phi + \cos \phi = 2.$$

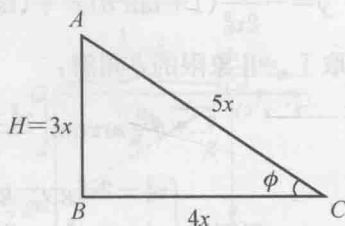
解得

$$\sin\phi = \frac{3}{5}, \cos\phi = \frac{4}{5}; \text{ABC 为 } 3:4:5 \text{ 直角三角形.}$$

如题解图 2 所示.



题解图 1



题解图 2

确定 3 个球到达 C 端前经过的相同时间 $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3$:

由球 2 经过的时间

$$\Delta t_2 = \sqrt{2 \times \frac{5}{3} H / g \sin\phi} = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

得

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

确定球 1、2 到达 C 端时的竖直向下速度分量 $v_{1\perp}$, $v_{2\perp}$:

$$v_{1\perp} = 0, v_{2\perp} = \sqrt{2(g\sin\phi)\sin\phi \cdot H} = \frac{3}{5} \sqrt{2gH}.$$

由球 3 经 Δt_3 时间到达 C 端, 确定球 3 到达 C 端时的竖直向下速度分量 $v_{3\perp}$:

球 3 在 A 端斜抛初速度的竖直向上分量记为 v_{0y} , 则有

$$v_{0y} \Delta t_3 - \frac{1}{2} g (\Delta t_3)^2 = -H, \Rightarrow v_{0y} = \frac{1}{2} g (\Delta t_3) - \frac{H}{\Delta t_3},$$

$$v_{3\perp} = -(v_{0y} - g \Delta t_3), \Rightarrow v_{3\perp} = -\left[\left(\frac{1}{2} g \Delta t_3 - \frac{H}{\Delta t_3}\right) - g \Delta t_3\right],$$

$$v_{3\perp} = \frac{17}{15} \sqrt{2gH}.$$

(附注: 球 3 在 A 端斜抛初速度的水平分量 v_{0x} , 可由

$$v_{0x} \Delta t_3 = \frac{4}{3} H$$

得

$$v_{0x} = \frac{2}{5} \sqrt{2gH}.)$$

$T_1 : T_2 : T_3$ 的确定:

球 1、2、3 从 C 端到到达地面所经时间分别记为 $\Delta t'_1$, $\Delta t'_2$, $\Delta t'_3$, 则有

$$H = \frac{1}{2} g (\Delta t'_1)^2, \Rightarrow \Delta t'_1 = \sqrt{2H/g},$$