何铁春
周世勤
编著

惯性导航加速度计

国防工业出版社

第一章　加速度计的基本原理

§1-1　惯性导航与加速度计

在第二次世界大战末期（1942年），德国科学家裴纳蒙德采用原始型惯性基准成功地发射了V-2型火箭。在V-2型火箭中，沿着火箭的纵轴方向，安装了一个积分线加速度计，它的输出端与火箭发动机的熄火装置相连，这样，在火箭的发射过程中，就可以根据火箭的加速度，来控制发动机的熄火，以实现轨道控制。这是世界上第一个实际使用的惯性导航与惯性制导系统，它开辟了惯性导航技术这一门新的学科领域。

三十多年来，技术先进的国家都争先研制惯性导航系统。经过不断地研究，惯性导航系统的性能逐渐提高，无论在理论方面，还是在工程实践方面都得到了非常迅速的发展。

惯性导航是一种自主性强、精度高、安全可靠的精密导航技术。它能够及时地输出各种导航数据，并且能为运载体提供精确的姿态基准，在航空、航海和宇航技术领域里有着极其广泛的应用。随着现代化科学技术的不断发展，航空、航海和宇航技术对惯性导航的要求更加迫切，对导航精度的要求越来越高。

什么是惯性导航、惯性制导呢？在运载体上安装加速度计，经过计算（一次积分和二次积分），从而求得运动轨道（载体的运动速度和距离），进行导航的技术，称为惯性导航。

在运载体上安装加速度计，用它来敏感、测量运载体运动的加速度，经过计算（一次积分和二次积分），从而求得运动轨道（运载体运动的速度和距离），并且产生对运载体运动所需要的控制信号，控制运载体按要求弹道运动，称为惯性制导。这就是说，惯性制导是对运载体进行测量和控制，使其沿预定的轨道运动。

无论是惯性导航还是惯性制导都是以加速度计敏感、测量载体运动加速度为基础的。因此，加速度计在惯性导航与惯性制导系统中的重要作用是显而易见的。H·海耳曼在美国“导航”杂志上曾指出：“惯性导航系统的心脏是加速度计”，“在惯性导航系统中，陀螺仪的重要性仅次于加速度计”。

加速度计是惯性导航系统的关键部件，它的重要性已经越来越为人们所理解。在各种运载体的导航定位中，通过测量位置、速度或加速度都可以得到运动物体的轨迹。但是，在运动物体内部能够测量的量只有加速度。惯性导航系统便是依据牛顿惯性原理，利用加速度计来测量运动物体的加速度，通过积分获得定位所需要的位置和速度。这便是惯性导航名称的由来。

从应用磁针和空速数据作为输入的简单航行推算装置到比较复杂的应用多普勒雷达、自动星座跟踪器、无线电系统（如劳兰系统等）和惯性导航系统，其中，只有惯性导航系统不受敌人无线电波的干扰，不需要与地面基地保持联系，不受变化莫测的气候影响，也不受磁差的影响。其它导航系统在没有外界的参考基准（如星体、陆标等）时，就不能决

定运载体的速度，也不能决定其行程。

在惯性导航系统中，陀螺仪是又一个关键部件。其作用是稳定装有加速度计的惯性导航平台，或给加速度计提供一个水平（或垂直）基准，给导航系统提供运载体的各种姿态参数。

电子计算机是惯导系统中第三个关键部件（在有的简易惯导系统中，可以用积分器来代替电子计算机）。其作用是将加速度计的输出值转换为沿载体纵向、横向和法向的速度、距离、以便进行稳定与控制。

有关陀螺仪和电子计算机的结构、原理、设计和精度分析已经有许多专门著作，本书不再叙述。

一般地说来，惯性导航系统的精度主要取决于惯性元件即精密加速度计和精密陀螺仪的精度。特别是长时间连续工作的惯性导航系统，由精密加速度计和精密陀螺仪误差引起的导航误差是随时间积累的。为了进一步提高惯性导航系统的精度，必须研制高精度的精密加速度计和精密陀螺仪。

§1-2　加速度计的力学基础

在惯性导航与惯性制导系统中，加速度计的结构是多种多样的。但就其基本原理来说，加速度计是以牛顿惯性定律做为理论基础的。

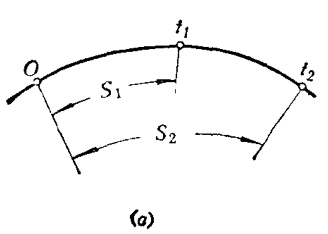
在讨论加速度计的作用原理以前，本节准备先就与加速度计有关的几个力学基础问题，做一简单扼要地叙述。

一、速度和加速度

（一）速度

速度是反映物体运动特征的不可缺少的一个概念，是作为运动快慢度量的物理量。为度量运动快慢，先分析点在任意曲线运动中路程随时间的变化。假定在任何瞬间 t_1 和 t_2，点所走的路程（弧坐标）分别为 S_1 和 S_2，那么（见图1-1）

$$V_p=\frac{S_2-S_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta S}{\Delta t} \tag{1-1}$$



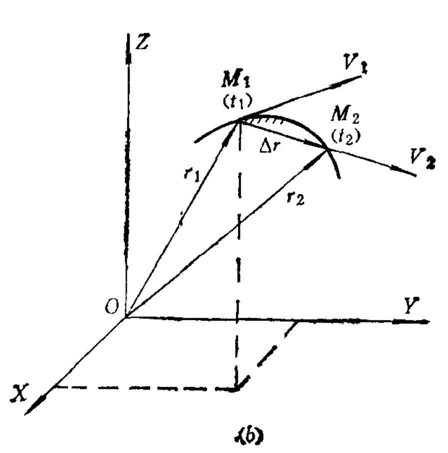


图1-1　速度示意图

V_p 称为点在 Δt 时间间隔内的平均速度。时间间隔取得越短，平均速度越接近在 t 瞬时附近的实际速度。当时间间隔趋于零时，平均速度的极限称为 t 瞬时的瞬时速度。或者说，瞬时速度的数值由该瞬时弧坐标对时间的导数值所决定：

$$V=\lim_{\Delta t\to 0}V_p=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{dS}{dt}=\dot{S} \tag{1-2}$$

速度的单位为：1 公里/小时 或 1 米/秒 等。

为讨论运动的快慢和方向，引入速度向量。用向径 r_1 和 r_2 表示瞬时 t_1 和 t_2 点在轨迹上的位置 M_1 和 M_2，向量 $\overline{M_1M_2}=\Delta r$ 称为点在 Δt 以内的位移。当时间间隔很短时，可以用直线路程 M_1M_2 近似地代替曲线 $\widehat{M_1M_2}$，那么，平均速度向量

$$V_p=\frac{\overline{M_1M_2}}{\Delta t}=\frac{\Delta r}{\Delta t} \tag{1-3}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，平均速度向量的极限就称为瞬时 t 的速度向量 V。

$$V=\lim_{\Delta t\to 0}V_p=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}=\frac{dr}{dt}=r'(t)=\dot{r} \tag{1-4}$$

在用坐标法分析点的速度时，速度向量由它在坐标轴上的三个投影来决定。如果运动方程式

$$X=f_1(t)$$
$$Y=f_2(t)$$
$$Z=f_3(t)$$

为已知，则点的向径为：

$$r(t)=X(t)i+Y(t)j+Z(t)k$$

速度向量为：

$$V=\frac{dr}{dt}=\frac{dX}{dt}i+\frac{dY}{dt}j+\frac{dZ}{dt}k$$

速度在定坐标轴上的投影等于各对应坐标对时间的导数，即：

$$\begin{aligned}V_X&=\frac{dX}{dt}=\dot{X}\\ V_Y&=\frac{dY}{dt}=\dot{Y}\\ V_Z&=\frac{dZ}{dt}=\dot{Z}\end{aligned} \tag{1-5}$$

速度向量完全由它的投影所决定，其模等于：

$$V=\sqrt{\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2} \tag{1-6}$$

它的方向由以下三个方向余弦所决定：

$$\cos(V,X)=\frac{\dot{X}}{\sqrt{\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2}}$$

$$\cos(V,Y)=\frac{\dot{Y}}{\sqrt{\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2}} \tag{1-7}$$

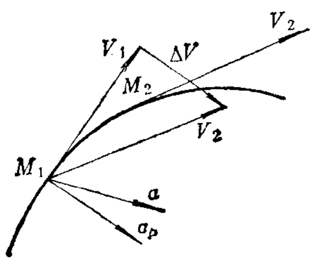
$$\cos(V,Z)=\frac{\dot{Z}}{\sqrt{\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2}}$$

(二) 加速度

在变速直线运动中，可以用加速度的概念来描述运动的越来越慢或越来越快的程度，也就是描述速度随时间的变化率。在曲线运动中，不但速度的数值，而且速度的方向也在随时间变化，因此在曲线运动中的加速度包含了速度数值与方向的变化。

假设在瞬时 t_1 和 t_2 点的速度分别为 V_1 和 V_2，如图 1-2 所示。平均加速度向量 a_p 为：

$$a_p=\frac{V_2-V_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta V}{\Delta t} \tag{1-8}$$



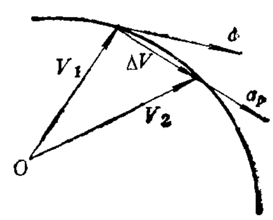


图1-2 加速度示意图

平均加速度向量表示在 Δt 时间间隔内速度向量的平均变化率。当时间间隔取得越短时，平均加速度越接近在瞬时 t 附近的速度变化率。因此当 $\Delta t\to 0$ 时，平均加速度的极限就表明在瞬时 t 的速度变化率，称作瞬时 t 的加速度 a。

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}a_p=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{dV}{dt}=\dot{V}=\ddot{r} \tag{1-9}$$

在图 1-2 中平均加速度 a_p 的方向和速度改变量 ΔV 的方向一致，当 $\Delta t\to 0$ 时，a_p 的极限大小和方向由图中的 a 表示。

在用坐标法分析点的加速度时，加速度向量由它在坐标轴上的三个投影来决定。如果运动方程式 $X=f_1(t)$，$Y=f_2(t)$，$Z=f_3(t)$ 为已知，可以求出速度向量 V：

$$V=\dot{r}=\dot{X}i+\dot{Y}j+\dot{Z}k$$

将这个关系式再求一次导数，就可以求出加速度 a：

$$a=\dot{V}=\ddot{r}=\ddot{X}i+\ddot{Y}j+\ddot{Z}k \tag{1-10}$$

由此可知，加速度在定坐标轴上的投影为：

$$a_X=\ddot{X}$$
$$a_Y=\ddot{Y} \tag{1-11}$$
$$a_Z=\ddot{Z}$$

即加速度在定坐标轴上的投影等于各对应坐标对时间的二阶导数。

加速度向量可以由它的投影所决定，它的模等于：

$$a=\sqrt{\ddot{X}^2+\ddot{Y}^2+\ddot{Z}^2} \tag{1-12}$$

它的方向由以下三个方向余弦所决定：

$$\cos(a,X)=\frac{\ddot{X}}{\sqrt{\ddot{X}^2+\ddot{Y}^2+\ddot{Z}^2}}$$

$$\cos(a,Y)=\frac{\ddot{Y}}{\sqrt{\ddot{X}^2+\ddot{Y}^2+\ddot{Z}^2}} \tag{1-13}$$

$$\cos(a,Z)=\frac{\ddot{Z}}{\sqrt{\ddot{X}^2+\ddot{Y}^2+\ddot{Z}^2}}$$

二、角速度和角加速度

（一）角速度

角速度是度量物体绕定轴转动快慢的物理量。图 1-3 表示物体绕 Z 轴转动，当物体由 A 转动到 B 时，转过了角度 α。

如果在 t_1 到 t_2 的时间间隔内，物体的转角从 α_1 变为 α_2，则比值

$$\omega_p=\frac{\alpha_2-\alpha_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$$

可以作为在这个时间间隔中转动快慢的度量，即当 ω_p 越大时，表示物体转动得就越快。ω_p 称为物体的平均角速度。

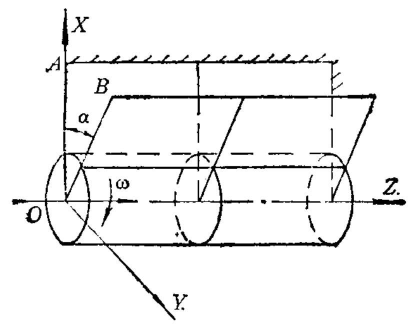


图1-3　角速度示意图

当物体在每一个瞬时转动快慢的程度都不同时，其角速度就应当以瞬时值 ω 来表示：

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\omega_p=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}=\frac{d\alpha}{dt} \tag{1-14}$$

上式说明了：物体的瞬时角速度是平均角速度的极限值，或转角对时间的一次导数。

物体转动的瞬时角速度 ω 是一个代数量，其正负号与转角一样用右手螺旋规则来决定，即当物体由 A 转到 B 时，用右手四指表示物体的旋转方向，如果姆指指向与旋转轴 Z 正向一致时为正值，反之为负。这样瞬时角速度不仅描述了物体在此瞬时转动的快慢，同时也表示了转动的方向。

（二）角加速度

物体的角加速度是描述角速度改变快慢的物理量。例如在 t_1 和 t_2 瞬时，物体的角速度分别为 ω_1 和 ω_2，则在此时间间隔中，物体角速度随时间改变的平均值是：

$$\varepsilon_p=\frac{\omega_2-\omega_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

ε_p 称为物体的平均角加速度，单位是 1/秒^2。显然当 ε_p 越大时，表示在一定的时间间隔内角速度的改变量 $\Delta\omega$ 越大；或表示 $\Delta\omega$ 一定的条件下，时间间隔越小，因此，角速度的变化也越显著。

同样，为了描述在某瞬时角速度改变的情形，角加速度就应当以瞬时值 ε 来表示：

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_p = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} \tag{1-15}$$

上式说明了：物体的瞬时角加速度是角速度对时间的一次导数或转角对时间的二次导数。

角加速度是一个代数量，其正负号要看 $\Delta\omega$ 而定。当 ε 与 ω 符号相同时，表示物体加速转动；当 ε 与 ω 符号不同时，表示物体在减速转动。

在用分析法研究物体转动时，物体的角速度与角加速度还可以用向量来表示。这个向量可以在轴上任一点画出，其作用线沿转动轴，大小则表示该瞬时角速度或角加速度的模，而方向则按右手螺旋规则决定。因此，如果以 $\bar{k}$ 代表沿转动轴 Z 的单位坐标向量，则：

$$\bar{\omega} = \omega\bar{k}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon\bar{k}$$

三、动量、动量矩和转动惯量

（一）动量

物体在运动过程中，不是孤立的，而是与周围的物体有着密切联系的，它们之间的运动不断地互相转化与传递。

物体运动的度量，不仅和运动物体的速度有关，而且还和它的质量有关。

一个物体的质量与其速度的乘积叫做这个物体的动量。即：

$$(\text{质量})\, m \times (\text{速度})\, V = (\text{动量})\, D = mV$$

动量是具有方向的量，它的方向与速度 V 一致，它反映了物体运动的传递是具有方向性的。

动量的量纲是：

$$〔\text{质量}〕\times〔\text{速度}〕= \frac{〔\text{力}〕\times〔\text{时间}〕^2}{〔\text{长度}〕} \times \frac{〔\text{长度}〕}{〔\text{时间}〕} = 〔\text{力}〕\times〔\text{时间}〕$$

动量的单位：公斤·秒。

（二）动量矩

动量是对物体直线（或是除圆以外的任意曲线）运动的一种度量，但在物体转动时，用动量的概念就不够了。例如，绕固定轴 O 转动的飞轮，如果重心 C 在转动轴上，则其速度为零，那么动量 $mV_C = 0$，这说明了动量不能用来度量转动物体的机械运动。

动量矩是对物体绕定轴转动的度量。物体上的任一点的动量对某一定轴取矩时，就得到物体上这一点运动时对于定轴的动量矩；而绕定轴转动的物体的动量矩等于这个物体上所有点的动量对定轴取矩的总和。

动量矩包括两个向量：位置向量和速度向量。因此必须明确：① 物体上的各点的速度是对于哪一个坐标系的速度；② 对空间哪一点（哪个定轴）取矩。只有这样，动量矩才有明确的意义。

图 1-4 表示了绕定轴 Z 转动的物体的动量矩。

假定有一个绕固定轴转动的物体（如图 1-4），其上任一点 m_i 的动量为 m_iV_i，它到转动轴的垂直距离为 r_i，则此质点对 Z 轴的动量矩为 $r_i \cdot m_iV_i$，而整个物体对 Z 轴的动量矩 K_Z 为：

$$K_Z = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i V_i$$

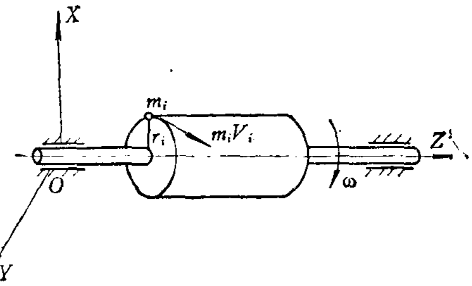


图1-4　动量矩示意图

由于　　$$V_i = r_i \cdot \omega$$

所以　$$K_Z = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i (r_i \omega) = \sum_{i=1}^{n} (m_i r_i^2)\omega$$

取　　$$J_Z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

则动量矩　　$$K_Z = J_Z \cdot \omega \tag{1-16}$$

式中　J_Z——物体对 Z 轴的转动惯量；

　　ω——物体转动的瞬时角速度。

动量矩的单位为：千克·米·秒或克·厘米·秒。

（三）转动惯量

转动惯量在转动物体中的作用正如质量在移动物体中的作用一样，转动惯量是转动物体惯性的度量。物体转动时的惯性度量不仅与质量有关也与质量的分布有关。

物体转动时，在相同外力矩作用下，如果转动惯量越大，则角加速度就越小；反之，如果转动惯量越小，则角加速度就越大。

转动惯量的一般表达式为：

$$J_Z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \tag{1-17}$$

由上式可以看出，它和物体的形状以及质量对轴 Z 的分布情形有关。显然，如果质量分布在远离转动轴的地方，则转动惯量较大；反之，如果质量集中在转动轴附近，则转动惯量就较小。

转动惯量的量纲：

$$〔长度〕^2 \times 〔质量〕 = 〔长度〕^2 \times \frac{〔力〕〔时间〕^2}{〔长度〕}$$

转动惯量的单位：公斤·米·秒^{2}或克重·厘米·秒^{2}或达因·厘米·秒^2。

如果用积分来计算转动惯量，其公式为：

$$J_Z = \int_M r^2 dm \tag{1-18}$$

对于均质的物体，如果密度为 δ，则有：

$$J_Z = \delta \int_V r^2 dV = \frac{M}{V} \int_V r^2 dV \tag{1-19}$$

式中　V——体积。

对于形状不规则或不均质的物体来说，要用纯计算的方法来求出转动惯量是有困难的，这时可以用实验方法测定。工程上用实验来测定转动惯量的方法很多，有扭转振动法、落

体观察法等等。

四、牛顿定律

（一）第一定律

如果质点不受力的作用，或者说，当作用在质点上所有力的合力为零时，则此质点保持其原来的静止或等速直线运动的状态，也就是说质点的运动速度恒定不变。

质点的这种维持其静止状态或等速直线运动状态的性质，即维持其原有运动状态的性质叫做惯性。因此，第一定律又叫惯性定律。在惯性定律中所涉及到的质点的运动和静止问题，都是对于惯性坐标系来说的。

（二）第二定律

第二定律是动力学的基本定律。

质点动量的变化率与外力成正比，如果质点的质量为常数时，则它的加速度与作用力成比例。即：

$$F=\frac{dD}{dt}=\frac{d(mV)}{dt}=m\frac{d^2R}{dt^2}=ma \tag{1-20}$$

式中　m——质点的质量；

V——质点的速度；

D——质点的动量（$D=mV$）。

第二定律所涉及到的质点运动问题，是对于惯性坐标系来说的。这里所说的加速度，指的是质点对于惯性坐标系的加速度。

式（1-20）是一个向量方程式，它表明：加速度的大小与作用力成比例，而加速度的方向是沿着作用力的方向。

如果有若干个力：F_1、F_2、……、F_i、……、F_n，同时作用在一个质点上，设每一个力使质点所产生的加速度分别是：a_1、a_2、……、a_i、……、a_n，因而在所有 n 个力的同时作用下，质点的合成加速度是：

$$a=\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}F_i=\frac{1}{m}F$$

则

$$F=ma=m\frac{d^2R}{dt^2} \tag{1-21}$$

式中的F是作用在质点上 n 个力的合力。所以，若干个力同时作用在一个质点上时，对于质点运动的影响，等效于一个单独的力，这就是 n 个力的合力。

一个质量为常数的质点在惯性坐标系中运动时，式（1-21）可以分解成为沿着三个坐标轴的标量方程式：

$$\begin{aligned} ma_X&=m\frac{d^2X}{dt^2}=F_X\\ ma_Y&=m\frac{d^2Y}{dt^2}=F_Y\\ ma_Z&=m\frac{d^2Z}{dt^2}=F_Z \end{aligned} \tag{1-22}$$

式中 F_X、F_Y 及 F_Z 分别是外力的合力沿着惯性坐标轴X、Y及Z的分量。在一般情况下，这三个分量是质点的坐标(X、Y、Z)、质点速度的各分量$\left(\frac{dX}{dt}、\frac{dY}{dt}、\frac{dZ}{dt}\right)$、时间 t 等因素的函数。所以，质点在作一般运动时，它的方程式是三个，因而系统中只能有三个未知量。

在第二定律的式（1-21）中，三个物理量之间的单位制必须统一，如果其中两个物理量的单位已选定，则第三个量的单位不能再任意选定，而必须从前二者导出。

（三）第三定律

两个质点间彼此有力作用时，这两个力的大小相等，方向相反，而且在连接两质点的同一直线上。

这个定律不但适用于两个物体相互接触的情形，同时也适用于两物体相互吸引（或排斥）的情形。

第三定律又称为作用与反作用相等定律。

五、惯性力与达伦贝尔原理

凡是由于质点运动状态变化时作用于施力物上的反作用力，称为惯性力。

质点运动的方程式为：

$$F = ma \tag{1-23}$$

式中 a 是质点对惯性空间的加速度。由式（1-23）得出：

$$F + (-ma) = 0 \tag{1-24}$$

我们引入（$-ma$）为惯性力这一概念。式（1-24）表示作用在质点上的外力 F 与惯性力（$-ma$）满足平衡条件。

对于一个受约束的运动的非自由质点M（其质量为m），$\overline{F}$ 为作用于该质点上的主动力的合力，$\overline{N}$ 为约束反作用力，则：

$$\overline{F} + \overline{N} = ma \tag{1-25}$$

也可理解为：在质点M上施加惯性力 $\overline{Q} = -ma$ 后，达到平衡状态，即：

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{Q} = 0 \tag{1-26}$$

在质点运动的每个瞬时，主动力 $\overline{F}$、约束反力 $\overline{N}$ 与惯性力 $\overline{Q}$ 互成平衡，这就是应用于质点的达伦贝尔原理。推广到质点系有：

$$\sum_{i=1}^{n} (\overline{F}_i + \overline{N}_i + \overline{Q}_i) = 0 \tag{1-27}$$

在质点系运动的每一瞬时，系内所有各点的惯性力与作用在系的主动力与约束力互成平衡。这就是应用于质点系的达伦贝尔原理。

实际上，惯性力是质点系加在使其产生加速度的物体上的反作用力，也可以称为对外力的反抗力。

达伦贝尔原理指出了用静力学的方法来研究动力学问题的可能，是分析力学的基础。动力学的问题能被看成力系的平衡问题，这就可以用平衡方程式或平衡图解法来处理动力学问题，这个在工程实践中广泛采用的方法又称为动静法。

六、比　力

运载体在惯性空间内运动，通常所受到的外力 $\overline{F}$ 由两部分组成，一部分是天体星球引力场的引力 $\overline{F}_m$，另一部分是发动机的推力 $\overline{F}_a$。在外力的作用下，运载体要产生加速度，其运动规律符合牛顿第二定律：

$$\overline{F}=\overline{F}_m+\overline{F}_a=m\overline{a} \tag{1-28}$$

天体星球引力场对运载体的引力大小，根据万有引力定律，与两物体质量的乘积成正比，而与它们之间距离的平方成反比，即：

$$\overline{F}_m=K\frac{Mm}{R^2}=\overline{G}m \tag{1-29}$$

式中 K——万有引力常数（$K=6.67\times10^{-11}$牛顿·米^2/公斤^2）；

M——星球的质量；

m——运载体的质量；

R——星球与运载体质心之间的距离；

$\overline{G}$——引力加速度$\left(G=\dfrac{KM}{R^2}\right)$。

各种星球对地球表面运载体的引力，起主要作用的是地球的引力，太阳、月球及其它星球对地球表面运载体的引力是很小的。如果没有特殊要求，通常是可以忽略不计的。

例如，太阳引力场对地球表面运载体的影响，在数值上不大于 $1.4\times10^{-7}g$，月球的引力场影响不大于 $4\times10^{-6}g$，金星的引力场影响不大于 $1.9\times10^{-8}g$，木星的引力场影响不大于 $3.7\times10^{-8}g$。

目前，在中等精度的惯导系统（导航精度为 3～1 海里/小时）和高精度惯导系统（导航精度为 0.3～0.1 海里/小时）中，分别采用精度为 $1\times10^{-5}g$和 $1\times10^{-6}g$ 的加速度计。因此，对于在地球表面运载体的导航问题，可以只考虑地球引力场，而不考虑太阳、月球和其它星球引力场的影响。

由式（1-28）和（1-29）可以得到：

$$\overline{F}=\overline{G}m+\overline{F}_a=m\overline{a} \tag{1-30}$$

令 $\overline{A}=\dfrac{\overline{F}_a}{m}$，则由式（1-30）得出：

$$\overline{A}=\overline{a}-\overline{G} \tag{1-31}$$

定义向量 $\overline{A}$ 为比力，其意义是相对惯性空间的加速度 $\overline{a}$ 与单位质量的万有引力之向量差。

有时，也称比力为非引力加速度，它可以利用加速度计进行测量。

本书讨论的惯性导航加速度计测量的参数不仅是运载体相对惯性空间的加速度，而且，还包括引力加速度。所以，更准确地应称加速度计为“比力敏感器”。

七、地球重力场

如果考虑地球围绕太阳的运动，那么，在地球表面附近运动的运载体，在太阳中心惯性坐标系中的位置是 $\overline{R}$。

$$\overline{R}=\overline{R}_O+\overline{r} \tag{1-32}$$

式中 $\overline{R}_O$——地球中心相对太阳中心的位置；

$\overline{r}$——运载体相对地球中心的位置。

根据力学中的哥氏定理，对式（1-32）进行微分：

$$\left(\frac{d\overline{R}}{dt}\right)_I=\left(\frac{d\overline{R}_O}{dt}\right)_I+\left(\frac{d\overline{r}}{dt}\right)_E+\overline{\Omega}\times\overline{r} \tag{1-33}$$

式中 $\left(\frac{d}{dt}\right)_I$、$\left(\frac{d}{dt}\right)_E$——分别相对惯性空间和地球的微分；

$\overline{\Omega}$——地球相对惯性空间的自转角速率（$\Omega=15.04107^\circ/$小时）。

再对式（1-33）进行微分，得到运载体的绝对加速度：

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2R}{dt^2}\right)_I&=\left(\frac{d^2\overline{R}_O}{dt^2}\right)_I+\left(\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\right)_E+\overline{\Omega}\times\left(\frac{d\overline{r}}{dt}\right)_E+\overline{\Omega}\times\left(\frac{d\overline{r}}{dt}\right)_I+\left(\frac{d\overline{\Omega}}{dt}\right)_I\times\overline{r}\\&=\left(\frac{d^2\overline{R}_O}{dt^2}\right)_I+\left(\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\right)_E+2\overline{\Omega}\times\left(\frac{d\overline{r}}{dt}\right)_E+\overline{\Omega}\times(\overline{\Omega}\times\overline{r})\end{aligned} \tag{1-34}$$

分析上式可知，运载体相对地球运动时，其相对惯性空间的加速度由四个分量组成：

$\left(\frac{d^2\overline{R}_O}{dt}\right)_I$——地心相对惯性空间的加速度；

$\left(\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\right)_E$——运载体相对地球的加速度；

$2\overline{\Omega}\times\left(\frac{d\overline{r}}{dt}\right)_E$——运载体相对地球速度$\left(\frac{d\overline{r}}{dt}\right)_E$引起的哥氏加速度；

$\overline{\Omega}\times(\overline{\Omega}\times\overline{r})$——因地球旋转而引起的向心加速度。

综合式（1-31）和式（1-34），可知当加速度计随运载体在地球表面运动时，其输出的测量值为：

$$\overline{A}=\overline{a}-\overline{G}=\left(\frac{d^2\overline{R}_O}{dt^2}\right)_I+\left(\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\right)_E+2\overline{\Omega}\times\left(\frac{d\overline{r}}{dt}\right)_E+\overline{\Omega}\times(\overline{\Omega}\times\overline{r})-\overline{G}(R) \tag{1-35}$$

如果忽略太阳、月球等天体星球的引力影响，并且，考虑到地球引力场与地球旋转而产生的离心力场两者共同形成了地球的重力场，即：

$$\overline{g}(r)=\overline{G}(r)-\overline{\Omega}\times(\overline{\Omega}\times\overline{r}) \tag{1-36}$$

那么，当安装有加速度计的运载体相对地球运动时，加速度计的输出值 $\overline{A}$ 为：

$$\overline{A}=\left(\frac{d\overline{V}}{dt}\right)_E+2\Omega\times\overline{V}-\overline{g}(r)=\left(\frac{d\overline{V}}{dt}\right)_p+\overline{\omega}_{pE}\times\overline{V}+2\overline{\Omega}\times\overline{V}-g(r) \tag{1-37}$$

式中 $\left(\frac{d\overline{V}}{dt}\right)_p$——运载体相对地球的速度在测量坐标系中的变化率；

$\omega_{pE}\times\overline{V}$——因测量坐标系相对地球转动所引起的向心加速度；

$2\overline{\Omega}\times\overline{V}$——因地球相对惯性空间旋转而产生的哥氏加速度；

$\overline{g}(\overline{r})$——地球重力加速度

$g(\overline{r})=\overline{G}(\overline{r})-\overline{\Omega}\times(\overline{\Omega}\times\overline{r})$；

$\overline{V}$——运载体相对地球运动的速度 $\overline{V}=\left(\frac{d\overline{r}}{dt}\right)_E$；

ω_{pE}——测量坐标系 p 相对地球运动的角速率。

当加速度计相对地球静止时，$\overline{V}=0$，$\bar{\omega}_{pE}=0$，加速度计的测量值 $\overline{A}=-\bar{g}$。这通常用加速度计测量地球的重力场，或者用地球的重力场来试验、标定加速度计。

地球上各地区的重力加速度值，随着纬度Φ和高度 h 而变化，它是所在地点相对地球位置的函数。

按照重力场理论，可以按下式计算地球表面任一点处的正常重力值。

$$g=g_0(1+0.0052884\sin^2\Phi-0.0000059\sin^2 2\Phi)-0.0003086h \text{ 厘米/秒}^2 \tag{1-38}$$

式中 g_0——赤道海平面重力加速度值（$g_0=978.049$ 厘米/秒^2）；

Φ——地理纬度；

h——海拔高度，米。

式（1-38）称为国际重力公式。按式（1-38）计算出来的重力叫正常重力。实际上，由于地球并非是一个理想的旋转椭球体，而且密度不均匀。因此，实际重力与正常重力间存在着差异，这种差异不仅表现在数值上，而且表现在方向上。实际重力相对正常重力在数值上的偏差，称为重力异常（一般为几个或几十个毫伽，1伽＝1厘米/秒^2）。实际重力相对正常重力在方向上的偏斜，称为垂线偏差（一般为几个或几十个角秒）。一般垂线偏差用两个分量ξ、η来定义。ξ——实际重力与当地子午面的夹角；η——实际重力在当地子午面内的投影与正常重力间的夹角。

国内各大城市的重力加速度 g 值列表如下。

表（1-1）

地区	重力加速度 米/秒^2	地区	重力加速度 米/秒^2
北京	9.80147	重庆	9.79136
上海	9.7946	哈尔滨	9.80655
天津	9.80106	兰州	9.79255
广州	9.78834	拉萨	9.7799
南京	9.79495	乌鲁木齐	9.80146
西安	9.79441	齐齐哈尔	9.80803
沈阳	9.80349	福州	9.7891

在表（1-1）中未列地区的重力加速度值，也可以用下式求出：

$$g_{h\Phi}=\frac{9.80665\times(1-0.00265\times\cos 2\Phi)}{1+\frac{2h}{R}} \tag{1-39}$$

式中 R——地球半径（$R=6371\times10^3$ 米）；

h——测量地点的海拔高度；

Φ——测量地点的纬度。

§1-3 加速度计的作用原理

加速度计的基本型式按照检测质量运动方式来分，有摆式加速度计和线式（直线）加速度计。如果按照测量系统的型式来分，有开环加速度计和闭环加速度计（或称力反馈式加速度计）。

在惯性导航和惯性制导系统中，作为惯性敏感元件的加速度计，虽然类型很多，但是，它们共同的基本作用原理都是基于牛顿的经典力学。

在惯性空间中，运载体运动的加速度是无法进行直接测量的，加速度计实际上是按照牛顿第二定律，通过敏感、测量相应的力来间接测量加速度的。

如前所述，惯性导航加速度计敏感、测量的不仅是运载体相对惯性空间的加速度，而且还包括引力加速度（主要是地球引力加速度），所以，更准确地应当把加速度计称为"比力敏感器"。这乃是加速度计原理的最本质的特点。

本节讨论开环摆式加速度计和开环线式加速度计的作用原理。有关力平衡摆式加速度计和力平衡线式加速度计的作用原理，将在第二章加速度系统中讨论。

一、开环摆式加速度计的作用原理

（一）简单开环摆式加速度计

图 1-5 是简单开环摆式加速度计的示意图。

绕水平轴 OY 在铅垂平面内旋转的单自由度摆，通过固定在壳体上的弹簧保持在水平面内，当壳体随运载体具有向上的加速度 a 时，作用在质量为 m 的摆上的惯性力——ma 通过摆臂 L，形成绕摆轴的惯性力矩 M_a，为使摆臂保持水平，弹簧力所形成的平衡力矩 M_R 应当能够平衡作用在摆轴上的全部力矩。如果不考虑地球旋转时，绕摆轴的力矩方程：

$$\Sigma M_i = 0 \tag{1-40}$$

则有

$$M_R + M_a + M_G - \Delta M = 0 \tag{1-41}$$

$$M_R = mL(a - G) + \Delta M \tag{1-42}$$

式中 M_R——弹簧力的平衡力矩；

M_a——惯性力矩（$M_a = -mLa$）；

M_G——引力力矩（$M_G = mLG$）；

ΔM——干扰力矩。

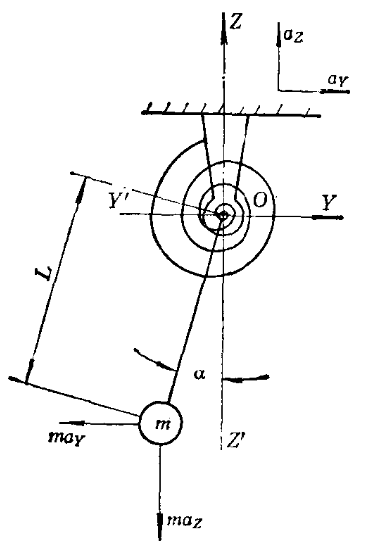


图1-5　简单开环摆式加速度计示意图

在理想情况下，忽略干扰力矩 ΔM，由于弹簧的平衡力矩可以测量，摆性 mL 是已知的物理量，若令 $A = M_R/mL$ 作为加速度计的输出量，则由式（1-31）可以得出：

$\overline{A} = \bar{a} - \overline{G}$，其物理意义是：加速度计的输出量 $\overline{A}$ 等于运载体加速度 $\bar{a}$ 和引力加速度 $\overline{G}$ 的矢量差（$\bar{a} - \overline{G}$）。

（二）开环摆式加速度计的运动方程

在图 1-6 的结构原理图中，开环摆式加速度计由悬挂在加速度计壳体单自由度轴上的单摆、弹簧和阻尼器组成。其敏感轴为 $Y - Y'$，交叉轴为 $Z - Z'$，可以把沿敏感轴方向的加速度 a_Y 变换成单摆偏离初始位置的角位移 α。

如果加速度计壳体随运载体相对惯性空间运动，那么，单摆的运动方程为：

$$J\ddot{\alpha} + C\dot{\alpha} + K\alpha = mLa_Y\cos\alpha - mLa_Z\sin\alpha \mp M_P \tag{1-43}$$

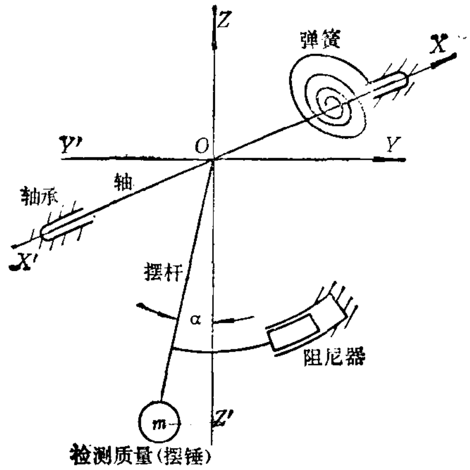


图1-6 开环摆式加速度计结构原理图

式中 J——单摆对转轴的转动惯量；

α——单摆偏离初始位置的角位移（逆时针方向取正号）；

C——阻尼器阻尼系数；

K——弹簧的刚度；

a_Y——沿敏感轴 $Y-Y'$ 方向的加速度；

a_Z——交叉加速度（向上取正）；

M_P——摩擦力矩。

如果，角位移 α 很小，那么可以近似地取：

$$\sin\alpha \approx \alpha$$

$$\cos\alpha \approx 1$$

式（1-43）可以改写为：

$$J\ddot{\alpha}+C\dot{\alpha}+K\alpha=mLa_Y-mLa_Z\cdot\alpha\mp M_P \tag{1-44}$$

或

$$J\ddot{\alpha}+C\dot{\alpha}+(K+mLa_Z)\alpha=mLa_Y\mp M_P$$

如果，交叉加速度 a_Z 不随时间变化，而是恒值，那么，可以假设

$$K_d=K+mLa_Z \tag{1-45}$$

式中 K_d 是等效反作用弹簧的刚度，它等于实际反作用弹簧的刚度加上 mLa_Z。而 mLa_Z 值是与交叉加速度 a_Z 的大小有关的。这样式（1-44）又可以改写成：

$$J\ddot{\alpha}+C\dot{\alpha}+K_d\cdot\alpha=mLa_Y\mp M_P \tag{1-46}$$

或写成：

$$\ddot{\alpha}+2\xi\omega_0\dot{\alpha}+\omega_0^2\alpha=\frac{mL}{J}a_Y\mp\frac{M_P}{J} \tag{1-47}$$

式中 $\omega_0=\sqrt{\dfrac{K_d}{J}}$——活动系统的自然角频率；

$\xi=\dfrac{C}{2\sqrt{K_d\cdot J}}$——活动系统的衰减率。

下面讨论一下静态测量的情况。此时，a_Y 为常数，$\ddot{\alpha}=0$，$\dot{\alpha}=0$。因此，静态角为：

$$\alpha_c=\frac{mL}{K_d}a_Y\mp\frac{M_P}{K_d} \tag{1-48}$$

如果a_Y是加速度计所要测量的加速度，那么a_Z称为交叉加速度，由于a_Z的存在，将会引起误差。由式（1-48）可以得到：

$$\alpha_c=\frac{mL}{K}(a_Y-a_Z\cdot\alpha_c) \tag{1-49}$$

由此可见，如果$a_Z=0$，即不存在交叉加速度时，则：

$$\alpha_{c0}=\frac{mL}{K}\cdot a_Y=S_{c0}\cdot a_Y \tag{1-50}$$

式中　$S_{c0}=\frac{mL}{K}$——加速度计的分辨率。

（三）考虑交叉加速度和摩擦力的开环摆式加速度计

在考虑交叉加速度时，由式（1-49）可以得出由于a_Z而引起的输出量的误差为：

$$\Delta\alpha=\alpha_c-\alpha_{c0}=-\frac{mL}{K}\cdot\alpha_c\cdot a_Z \tag{1-51}$$

相对误差为：

$$\zeta=\frac{\Delta\alpha}{\alpha_{c0}}=-\frac{\alpha_c\cdot a_Z}{a_Y}=-\frac{1}{\frac{K}{mLa_Z}+1} \tag{1-52}$$

由式（1-51）和式（1-52）可以看出，要想减小交叉加速度的影响，则需要增大反作用弹簧的刚度、减小摆性mL值。或者说，尽可能减小单摆相对初始位置的偏离角位移α。在加速度计的设计中，必须在结构上尽可能设法消除或减小交叉加速度a_Z的影响。

下面再来分析摩擦力矩M_P的影响。

如果交叉加速度$a_Z=0$，在式（1-48）中，直接以弹簧的刚度K来代替等效反作用弹簧的刚度K_d，可以得到：

$$\alpha_c=\frac{mL}{K}a_Y-\frac{|M_P|}{K}=\frac{1}{K}(mLa_Y-|M_P|) \tag{1-53}$$

由式（1-53）可以看出，当$mLa_Y<|M_P|$，即惯性力矩还不能克服摩擦力矩时，检测质量实际上不产生运动，加速度计没有输出量。因此，摩擦力矩将会影响加速度计的阈值。如果要改善阈值，就应当使摩擦力矩越小越好，否则为了保证阈值，就要增大摆性mL值，结果是使加速度计的体积和重量增大。

当$mLa_Y>|M_P|$时，摩擦力矩M_P引起的误差为：

$$\Delta\alpha_P=\frac{|M_P|}{K} \tag{1-54}$$

相对误差为：

$$\zeta_P=\frac{\Delta\alpha_P}{\alpha_{c0}}=\frac{|M_P|}{mLa_Y} \tag{1-55}$$

二、开环线式加速度计的作用原理

这里以电位计式线加速度计为例，讨论作用原理。开环线加速度计是将检测质量放在壳体的导轨中，运载体运动时，在加速度作用下，检测质量受惯性力，沿导轨方向产生位

移，通过电位计变换为输出电压。其结构示意图如图 1-7 所示。

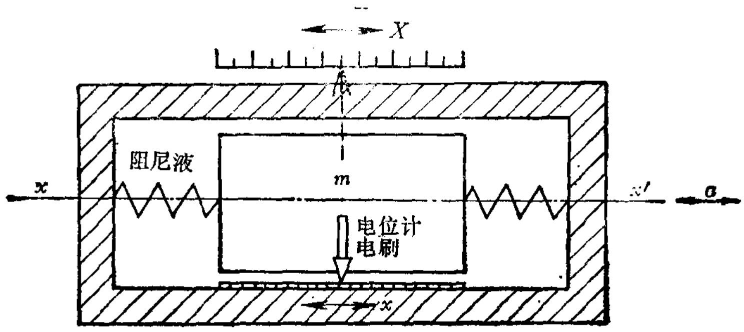


图1-7　电位计式开环线加速度计结构原理图

（一）开环线加速度计的运动方程

假定检测质量在导轨槽中运动没有摩擦，弹簧的质量小到可以忽略，而其刚度是恒定的。当加速度计的壳体随着运载体而相对于惯性空间作变速运动时，那么，检测质量受到惯性力，相对于壳体而运动，其运动方程为：

$$m\ddot{X}+C\dot{x}+Kx=0 \tag{1-56}$$

式中　X——检测质量在敏感轴 $x-x'$ 方向相对于惯性空间的位移；

x——检测质量在敏感轴 $x-x'$ 方向相对于壳体的位移；

m——检测质量的质量；

C——阻尼系数；

K——弹簧的刚度；

$m\ddot{X}=m\dfrac{d^2X}{dt^2}$——检测质量所受的惯性力；

$C\dot{x}=C\dfrac{dx}{dt}$——检测质量所受的阻尼力；

Kx——检测质量所受的弹簧力。

假设 x_i 为壳体在敏感轴 $x-x'$ 方向相对于惯性空间的距离，则：

$$X=x+x_i$$

式（1-56）可以写成：

$$m\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=-m\ddot{x}_i \tag{1-57}$$

按一般习惯用的符号可以写成：

$$\ddot{x}+2\xi\omega_0\dot{x}+\omega_0^2x=-\ddot{x}_i=-a(t) \tag{1-58}$$

式中　$\omega_0=\sqrt{\dfrac{K}{m}}$——加速度计活动系统的自然角频率；

$\xi=\dfrac{C}{2\sqrt{mK}}$——活动系统的衰减率；

$\ddot{x}_i=\dfrac{d^2x_i}{dt^2}=a(t)$——加速度计壳体相对惯性空间的加速度。

式（1-58）是开环线式加速度计动态特性方程。

当加速度 $a(t)=a=$常数；输出量 $x=x_c$ 为定值时，$\ddot{x}=0$，$\dot{x}=0$，输出量与输入量的关系为：