ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ТОМ I

Л. Д. ЛАНДАУ
Е. М. ЛИФШИЦ

МЕХАНИКА

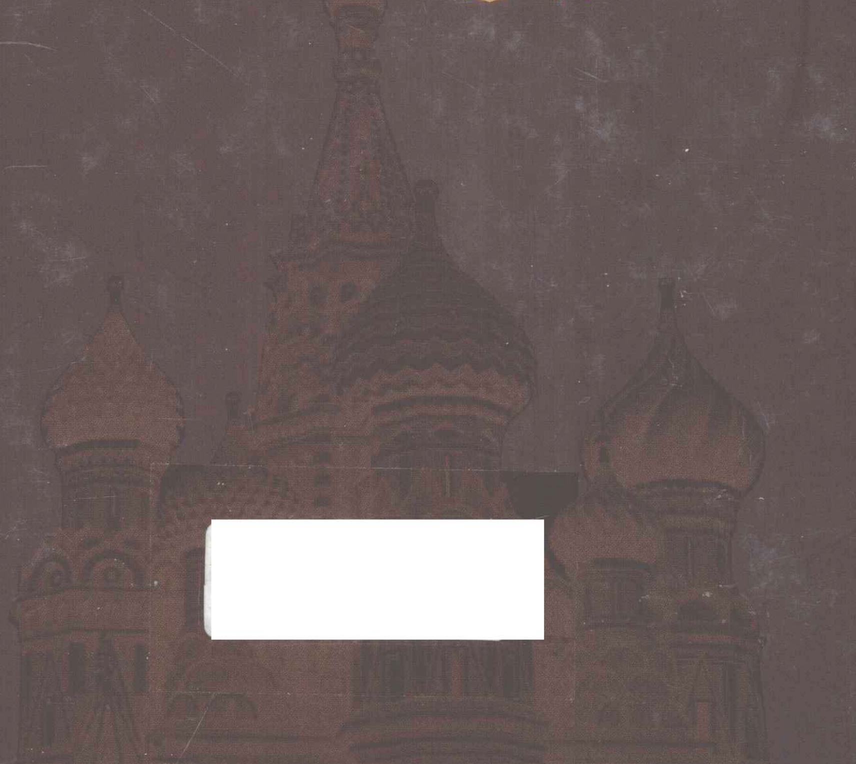
朗道

理论物理学教程 第一卷

力 学（第五版）

Л. Д. 朗道 Е. М. 栗弗席兹 著 李俊峰 鞠国兴 译校

高等教育出版社



图字:01-2007-0910 号
Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц Теоретическая физика. В 10 томах

图书在版编目(CIP)数据

力学:第5版/(俄罗斯)朗道,(俄罗斯)栗弗席兹著:
李俊峰,鞠国兴译校. —北京:高等教育出版社,
2007.4(2011.11 重印)
ISBN 978-7-04-020849-8

Ⅰ.力… Ⅱ.①朗…②栗…③李…④鞠 Ⅲ.力
学-高等学校-教材 Ⅳ.O3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 033678 号

策划编辑 王 超　　责任编辑 王 超　　封面设计 刘晓翔　　责任绘图 朱 静
版式设计 王 莹　　责任校对 刘 莉　　责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京中科印刷有限公司
开　　本 787×1092 1/16
印　　张 11.75
字　　数 220 000
插　　页 1
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2007年4月第1版
印　　次 2011年11月第3次印刷
定　　价 35.00元

物 料 号 20849-A0

重印说明

本书第二次印刷，在 2007 年 4 月第一次印刷的基础上，由南京大学物理学院鞠国兴教授依据英文版（第三版）做了全面细致的修订。

中国科学院理论物理研究所刘寄星研究员根据俄文版修订了各版的编者序以及朗道撰写的第一版序。

第四版编者序

从这本书开始，科学出版社将重新出版 Л.Д. 朗道和 Е.М. 栗弗席兹的《理论物理学》系列教程.这是首次在栗弗席兹去世后出版.在没有原作者参与下准备全教程付印是令人悲伤的，现在这个重要任务落到了我的肩上.

这次出版的《力学》修正了第三版出版后发现的印刷错误，也为使表述更为准确做了少量文字改动.这些修改是栗弗席兹和我共同完成的，其中有一部分已经反映在本书最近的英文版中.

Л.П. 皮塔耶夫斯基

1987 年 5 月

第三版序

本书的第二版与第一版几乎没有差别.在准备这一新版时,也没有发现对本书作任何重要修改的必要,所以除去改正了印刷错误外,本书的大部分内容基本上是重印.我和Л.П.皮塔耶夫斯基一起仅对讲述浸渐不变量的最后几节进行了修改和补充.

E.M.栗弗席兹

1972年6月

第一版序

从这本书开始,我们将陆续再版《理论物理学》教程,现在的计划包括以下各卷:

1. 力学,
2. 场论,
3. 量子力学(非相对论理论),
4. 相对论量子理论,
5. 统计物理学,
6. 流体力学,
7. 弹性理论,
8. 连续介质电动力学,
9. 物理动理学.

第一卷的第一版曾于1940年由Л.朗道和Л.皮亚季戈尔斯基合著出版.这次出版,虽然拟讲述内容的总计划和以前一样,但全书经过了重大修改并完全重写了.

感谢И.Е.贾洛申斯基和Л.П.皮塔耶夫斯基在校对本书时给予的帮助.

Л.Д.朗道,Е.М.栗弗席兹

莫斯科,1957年7月

目录

第一章

运动方程

§1 广义坐标

质点是力学的基本概念之一，是指那些在描述其运动时可以忽略大小的物体．当然，可否忽略大小因不同问题的具体条件而异．例如，研究行星绕太阳的运动时，可以认为行星是质点，但是在研究行星自转时就不能当作质点．

质点在空间的位置由其径矢 $\boldsymbol{r}$ 确定，其分量用笛卡儿坐标 x, y, z 表示．径矢 $\boldsymbol{r}$ 对时间的导数

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

称为质点的速度，其二阶导数 $\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2$ 称为质点的加速度．今后，对时间的导数经常用符号上面的点表示，如 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$．

为了确定由 N 个质点组成的系统在空间的位置，需要给定 N 个径矢，即给定 $3N$ 个坐标．

通常，唯一地确定系统位置所需独立变量的数目称为系统的自由度①，N 个质点组成的系统的自由度为 $3N$．这些独立变量不一定是质点的笛卡儿坐标，根据问题的条件，有时选取其它坐标更加方便．

对于 s 个自由度的系统，可以完全刻画其位置的任意 s 个变量 $q_1, q_2, \cdots, q_s$ 称为该系统的广义坐标，其导数 $\dot{q}_i$ 则称为广义速度．

① 这里讨论的是完整系统，非完整系统的自由度不能这样定义，参见：马尔契夫著．理论力学（第3版）．李俊峰译．北京：高等教育出版社，2005:21．

——译者注

然而,给定广义坐标的数值并不能确定系统在给定时刻的“力学状态”,因为还不足以预测下一时刻系统的位置.对于给定的广义坐标值,系统可以具有任意的速度,因此下一时刻(即经过无穷小的时间间隔 $\mathrm{d}t$ 后)系统的位置可能不同.

经验表明,同时给定系统的所有广义坐标和速度就可以确定系统的状态,并且原则上也可以预测以后的运动.从数学观点看,在某时刻给定所有广义坐标 q 和速度 $\dot{q}$ 就唯一地确定了该时刻的加速度 $\ddot{q}$①.

加速度与坐标、速度的关系式称为*运动方程*.对于函数 $q(t)$ 来说,这个关系式是二阶微分方程,原则上,将其积分可以求出函数 $q(t)$,进而确定系统的运动轨迹.

§2　最小作用量原理

力学系统运动规律的最一般表述由*最小作用量原理*(或者*哈密顿原理*)给出.根据这个原理,每一个力学系统都可以用一个确定的函数

$$L(q_1, q_2, \cdots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s, t),$$

或者简记为 $L(q, \dot{q}, t)$ 所表征,并且系统的运动还要满足下面的条件.

假设在时刻 $t = t_1$ 和 $t = t_2$ 系统的位置由两组坐标 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$ 确定.那么,系统在这两个位置之间的运动使得积分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t \tag{2.1}$$

取最小值②.函数 L 称为给定系统的*拉格朗日函数*,积分(2.1)称为*作用量*.

拉格朗日函数中只包含 q 和 $\dot{q}$,而不包含更高阶导数 $\ddot{q}, \dddot{q}, \cdots$,这反映了前面提到的物理事实,即系统的力学状态完全由坐标和速度确定.

下面我们通过求解使积分(2.1)取最小值的问题来推导运动微分方程.为了书写简便,我们先假设系统仅有一个自由度,只需确定一个函数 $q(t)$.

设 $q = q(t)$ 是使 S 取最小值的函数,就是说用任意函数

$$q(t) + \delta q(t) \tag{2.2}$$

代替 $q(t)$ 都会使 S 增大,其中函数 $\delta q(t)$(也称为函数 $q(t)$ 的*变分*)在从 t_1 到 t_2 的整个时间间隔内都是小量.由于比较函数(2.2)在时刻 $t = t_1$ 和 $t = t_2$ 也应该分别取值为 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$,于是有:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \tag{2.3}$$

---

① 为了书写简便,我们用 q 表示所有广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_s$,用 $\dot{q}$ 表示所有广义速度.

② 然而,应该指出的是,这个最小作用量原理的表述并不是对系统的整个运动轨迹总成立,而是仅在足够小的区段上成立.对于整个轨迹来说,积分(2.1)只能取极值而不一定是最小值.当然,这对于推导运动方程没有什么影响,因为我们只需用到极值条件.

用 $q(t)+\delta q(t)$代替 $q(t)$使 S 产生的增量为

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q, \dot{q}+\delta \dot{q}, t)\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t.$$

这个差中的被积函数按 δq 和 $\delta\dot{q}$的幂展开式是从一阶项开始的. S 取最小值[①]的必要条件是这些项之和等于零. 这个和称为积分的一阶变分(或者简称为变分). 于是,最小作用量原理可以写成

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t = 0, \tag{2.4}$$

或者变分后的形式:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right)\mathrm{d}t = 0.$$

注意到 $\delta\dot{q}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q$,将第二项分部积分得:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\mathrm{d}t = 0. \tag{2.5}$$

根据(2.3)上式中第一项等于零. 剩下的积分在 δq 任意取值时都应该等于零. 这只有在被积函数恒等于零的情况下才有可能. 于是我们得到方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

对于有 s 个自由度的系统,在最小作用量原理中有 s 个不同的函数 $q_i(t)$应该独立地变分. 显然我们可以得到 s 个方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1,2,\cdots,s). \tag{2.6}$$

这就是我们要推导的运动微分方程,在力学中称为*拉格朗日方程*[②]. 如果给定力学系统的拉格朗日函数已知,则方程(2.6)建立了加速度、速度和坐标之间的联系,它们是系统的运动方程.

从数学的观点看,方程(2.6)是包含 s 个未知函数 $q_i(t)$的 s 个二阶微分方程组. 这个方程组的通解包含 $2s$ 个任意常数. 为了确定这些常数,从而完全确定力学系统的运动,必须知道描述系统在某给定时刻状态的初始条件,例如所有坐标和速度的初值.

设力学系统由 A 和 B 两部分组成,如果每个部分都是封闭的,拉格朗日函数分别是 L_A 和 L_B. 在两个部分相距足够远以至它们的相互作用可以忽略的极限情况下,系统的拉格朗日函数趋向于极限:

---

① 一般来说是极值.

② 在求积分(2.1)极值的变分计算中,这些方程称为欧拉方程.

$$\lim L = L_A + L_B. \tag{2.7}$$

拉格朗日函数的这种可加性反映了一个事实:每一个独立部分的运动方程不可能包含与另一部分相关的物理量.

显然,将力学系统的拉格朗日函数乘以一个任意常数,不会改变运动微分方程.这似乎导致一种重要的不确定性:各个孤立力学系统的拉格朗日函数可以乘以不同的任意常数.然而,可加性消除了这个不确定性,只允许所有力学系统的拉格朗日函数都乘以同一个任意常数,而这归结为选择这个物理量度量单位的自然任意性,我们还将在§4中继续讨论这个问题.

我们还需要进行以下的一般性讨论.考虑两个拉格朗日函数 $L'(q,\dot{q},t)$和$L(q,\dot{q},t)$,它们相差某个坐标和时间的函数 $f(q,t)$对时间的全导数:

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(q,t). \tag{2.8}$$

计算这两个拉格朗日函数对应的积分(2.1)可得关系式:

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L'(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(q,t)\mathrm{d}t \\ &= S + f(q^{(2)},t_2) - f(q^{(1)},t_1), \end{aligned}$$

即 S 和S'相差一个附加项.该附加项在变分时将消失,条件 $\delta S'=0$ 和 $\delta S=0$ 完全等价,因而运动微分方程也相同.

可见,拉格朗日函数仅可以定义到相差一个对时间和坐标的任意函数的时间全导数项.

§3 伽利略相对性原理

为了研究力学现象必须选择参考系.一般来说运动规律在不同的参考系下具有不同的形式.假如任意选择参考系,则可能使确定非常简单现象的规律在形式上变得十分繁琐.这自然会产生一个问题,即如何选择参考系使得力学规律在形式上最简单.

相对于任意参考系,空间是非均匀且各向异性的.这就是说,如果某个物体与其它物体之间没有相互作用,它在空间中的不同位置和不同指向在力学意义上是不等价的.同样,一般情况下任意参考系中时间也是非均匀的,即不同时刻也是不等价的.显然,时间和空间的这些性质使力学现象的描述变得复杂.例如,自由物体(即不受任何外力作用)不可能保持静止:如果在某个时刻其速度等于零,但在下一个时刻它开始向某个方向运动.

然而,似乎总是存在某种参考系,空间相对它是均匀的各向同性的,时间相对它是均匀的.这样的参考系称为*惯性参考系*.特别是,在这样的惯性参考系中,在某个时刻静止的自由物体将永远保持静止.

对于在惯性参考系中自由运动的质点，我们立即可以得到其拉格朗日函数形式的一些结论.时间和空间的均匀性意味着这个函数不显含质点的径矢 $\boldsymbol{r}$ 和时间 t，即 L 只能是速度$\boldsymbol{v}$ 的函数.由于空间各向同性，拉格朗日函数也必是不依赖于矢量 $\boldsymbol{v}$ 的方向，只能是速度大小的函数，也就是说 L 是$\boldsymbol{v}^2=v^2$ 的函数：

$$L=L(v^2). \tag{3.1}$$

由拉格朗日函数不显含质点的径矢 $\boldsymbol{r}$ 可知$\partial L/\partial \boldsymbol{r}=0$，拉格朗日方程可写成[1]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=0,$$

由此可得$\partial L/\partial \boldsymbol{v}=\mathrm{const}$.而$\partial L/\partial \boldsymbol{v}$ 只是速度的函数，故

$$\boldsymbol{v}=\mathrm{const}. \tag{3.2}$$

可见，在惯性参考系中质点任何自由运动的速度的大小和方向都不改变.这就是*惯性定律*.

如果在我们已有的这个惯性参考系以外，再引进另一个惯性参考系，它相对第一个惯性参考系作匀速直线运动，则相对这两个参考系的自由运动规律完全相同：自由运动仍是匀速直线运动.

实验证明，不仅自由运动规律相对这两个参考系完全相同，所有力学关系式相对这两个参考系都是等价的.因此存在不只是一个，而是无穷多个惯性参考系，它们相互作匀速直线运动.在这些参考系中时间和空间的性质都是相同的，力学规律也是相同的.这个结论称为*伽利略相对性原理*，这是力学中最重要的原理之一.

上面的论述充分表明，惯性参考系的特殊性决定了人们通常采用惯性系来研究力学现象.今后如果不特别声明，我们只在惯性参考系中研究问题.

无穷多个这样的参考系的力学上的完全等价性还表明，不存在比其它参考系更优先选取的一个“绝对”惯性参考系.

设有两个不同的参考系 K 和 K′，其中 K′相对 K 以速度 $\boldsymbol{V}$ 运动，同一个质点相对这两个参考系的坐标 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$满足关系式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{V}t. \tag{3.3}$$

我们认为这两个参考系中的时间是相同的：

$$t=t'. \tag{3.4}$$

绝对时间假设是经典力学的基础之一[2].

公式(3.3)和(3.4)称为*伽利略变换*.伽利略相对性原理可以表述为：力学运动方程在伽利略变换下具有不变性.

---

① 标量对矢量的偏导数也是矢量，其分量分别等于该标量分别对矢量各个分量的偏导数.

② 这个假设在相对论力学中不成立.

§4 自由质点的拉格朗日函数

下面研究拉格朗日函数的形式,首先研究一个最简单的例子——质点相对惯性参考系的自由运动.我们已经知道,这种情况下拉格朗日函数只能依赖于速度的平方.我们利用伽利略相对性原理来确定这个依赖关系的形式.如果惯性参考系 K 以无穷小速度 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 相对另一惯性参考系 K′运动,则有 $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\varepsilon}$.拉格朗日函数 $L(v^2)$ 经过伽利略变换后得到 L',由于在所有惯性参考系中运动方程的形式都相同,故如果 L' 与 $L(v^2)$ 存在差异的话,只能相差某个关于时间和坐标的函数的全导数(参见§2末).

于是有

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \varepsilon^2).$$

将这个表达式展开成 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的幂级数并忽略一阶以上的无穷小量得:

$$L(v'^2) = L(v^2) + 2\frac{\partial L}{\partial v^2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}.$$

只有当该等式右边第二项与速度 $\boldsymbol{v}$ 呈线性依赖关系时,它才能是时间的全导数.因此 $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ 不依赖于速度,即该情况下拉格朗日函数与速度平方成正比:

$$L = \frac{m}{2}v^2, \tag{4.1}$$

其中 m 为常数.

由拉格朗日函数在速度无穷小变换下满足伽利略相对性原理可知,在参考系 K 以有限速度 $\boldsymbol{V}$ 相对 K′运动情况下,拉格朗日函数也满足该原理.事实上,

$$L' = \frac{m}{2}v'^2 = \frac{m}{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{V})^2 = \frac{m}{2}v^2 + 2\frac{m}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V} + \frac{m}{2}V^2$$

或者

$$L' = L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2\frac{m}{2}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V} + \frac{m}{2}V^2 t\right).$$

第二项是时间的全导数,可以略去.

出现在自由运动质点的拉格朗日函数(4.1)中的物理量 m 称为质点的质量.根据拉格朗日函数的可加性,对于无相互作用的质点组成的自由质点系,有①

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}. \tag{4.2}$$

必须强调,只有考虑到可加性,给出的质量定义才有实际物理意义.在§2

① 我们用拉丁字母表中前几个字母表示质点的编号,用 i,k,l 给坐标编号.

曾经指出，总是可以将拉格朗日函数乘以常数而不改变方程.对于函数(4.2)，乘以常数就相当于改变了质量的单位，不同质点的质量之间的比例关系却是具有实际物理意义的，不会发生改变.

容易看出，质量不可能是负的.事实上，根据最小作用量原理，质点从空间点1到空间点2的真实运动，使得积分

$$S = \int_1^2 \frac{mv^2}{2}\mathrm{d}t$$

取最小值.假如质量是负的，对于质点快速离开点1再快速接近点2的轨迹，作用量可以取绝对值任意大的负值，不可能有最小值①.

注意到

$$v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}l^2}{\mathrm{d}t^2}, \tag{4.3}$$

是有用的.因此为了得到拉格朗日函数只需求出在特定坐标系中弧长微元 $\mathrm{d}l$ 的平方.

例如，在笛卡儿坐标系中 $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$，进而有

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \tag{4.4}$$

在柱坐标系中 $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2$，进而有

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2), \tag{4.5}$$

在球坐标系中 $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2$，进而有

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2). \tag{4.6}$$

§5 质点系的拉格朗日函数

下面研究一种质点系，其质点之间有相互作用，但不受外部任何物体作用，称为*封闭质点系*.为了描述质点之间的相互作用，可以在自由质点系的拉格朗日函数(4.2)中增加坐标的某一函数(根据相互作用的性质确定).②将这个函数记为 $-U$，则有

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots) \tag{5.1}$$

其中 $\boldsymbol{r}_a$ 是第 a 个质点的径矢.这是封闭质点系拉格朗日函数的一般形式.

函数 U 称为质点系的势能，而

① 在第2页的脚注②中给出的说明不会影响这个结论，因为 $m<0$ 时积分在轨迹上任意小区间都不可能有最小值.

② 这个结论限于本书所述的经典(非相对论)力学范畴.

$$T=\sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$$

称为质点系的动能,这些名称的含义将在§6中解释.

势能仅依赖于所有质点在同一时刻的位置,这意味着其中任何质点位置的改变立刻影响到所有其它质点,可以说相互作用瞬间传递.这个相互作用的性质在经典力学中是必然的,它紧密联系着经典力学的基本前提,即绝对时间假设和伽利略相对性原理.如果相互作用不是瞬间传递的,即以一个有限速度传递,而时间的绝对性意味着通常的速度相加法则适用于所有现象,因此在有相对运动的不同参考系中传递速度不相同.于是相互作用的物体的运动规律在不同惯性参考系中也不相同,这就违背了伽利略相对性原理.

在§3中我们只提到了时间的均匀性.拉格朗日函数的形式(5.1)表明,时间不仅是均匀的,而且是各向同性的,即时间的性质在两个方向上都是相同的.事实上,用 $-t$ 代替 t 不会改变拉格朗日函数,进而也不会改变运动方程.换句话说,如果在参考系中某种运动是可能的,则逆运动也是可能的,即可以按照相反的顺序经历前述运动中相同的状态.在这个意义下,遵循经典力学定律的所有运动都是可逆的.

知道拉格朗日函数后就可以建立运动方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}. \tag{5.2}$$

将(5.1)代入后得:

$$m_a\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_a}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}. \tag{5.3}$$

这种形式的运动方程称为*牛顿方程*,是相互作用质点系力学的基础.方程(5.3)右端的矢量

$$\boldsymbol{F}_a=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a} \tag{5.4}$$

称为作用在第 a 个质点上的*力*.它与 U 一样,只依赖于所有质点的坐标,而不依赖于速度.因此,方程(5.3)表明,质点的加速度矢量也只是坐标的函数.

势能可以增减任意常数而不改变运动方程(这是在§2末讲到的拉格朗日函数不确定性的特殊情况).选择这个任意常数的最自然和最通用的方法是,当无限增大质点间距离时势能趋向于零.

如果描述运动不是用笛卡儿坐标,而是用任意的广义坐标 q_i,则为了得到新的拉格朗日函数必须进行相应的变换:

$$x_a=f_a(q_1,q_2,\cdots,q_s),\quad \dot{x}_a=\sum_k\frac{\partial f_a}{\partial q_k}\dot{q}_k,\quad \cdots,$$

将这些表达式代入函数