

应用高等数学

中 册

〔美〕 F. B. Hildebrand 著

陈绶章 张志强译 刘 文校

人 民 教 育 出 版 社

本书曾多次作为美国麻省理工学院教科书，全书共有十一章，中译本分上、中、下三册出版。本中册(6—9章)内容以偏微分方程为中心，包括向量分析，多元函数的微分与积分，偏微分方程，数学物理方程的解等。书中有大量例题和习题，书末给出习题答案。

本书可供高等学校理、工科有关专业及有关工程技术人员作参考用书。

应用高等数学

中 册

[美]F. B. Hildebrand 著

陈绶章 张志强译 刘 文校

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

开本 $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ 印张 11.5 字数 270,000

1980年4月第1版 1980年12月第1次印刷

印数 00,001—16,303

书号 13012·0454 定价 1.05 元

目 录

第六章 向量分析	1
6.1 向量的基本性质.....	1
6.2 两个向量的数量积.....	3
6.3 两个向量的向量积.....	5
6.4 重积.....	7
6.5 向量的微分.....	10
6.6 空间曲线几何.....	12
6.7 梯度向量.....	16
6.8 向量算子 ∇	18
6.9 微分公式.....	20
6.10 线积分.....	23
6.11 势函数.....	28
6.12 面积分.....	32
6.13 散度的解释 散度定理.....	36
6.14 格林定理.....	41
6.15 旋度的解释 拉普拉斯方程.....	42
6.16 斯托克斯定理.....	43
6.17 正交曲线坐标.....	48
6.18 特殊坐标系.....	54
6.19 对二维不可压缩流体流动的应用.....	56
6.20 可压缩理想流体的流动.....	61
第七章 多元函数的微分与积分	91
7.1 偏导数 链式法则.....	91
7.2 隐函数 雅可比行列式.....	97
7.3 函数相关.....	101
7.4 雅可比行列式和曲线坐标系 积分中变量的变换.....	104

7.5	泰勒级数	107
7.6	极大与极小	109
7.7	约束和拉格朗日乘数	111
7.8	变分法	114
7.9	含参变量积分的导数	121
7.10	牛顿迭代法	125
第八章	偏微分方程	144
8.1	定义与例题	144
8.2	一阶拟线性方程	148
8.3	特殊方法 初始条件	153
8.4	二阶线性方程和二阶拟线性方程	159
8.5	特殊二阶常系数线性方程	160
8.6	其它线性方程	164
8.7	一阶线性方程的特征	167
8.8	二阶线性方程的特征	174
8.9	积分曲面上的奇异曲线	182
8.10	关于二阶线性初值问题的附注	186
8.11	特殊拟线性问题的特征	187
第九章	数学物理方程的解	212
9.1	引言	212
9.2	热流	214
9.3	矩形平板中的稳态温度分布	217
9.4	圆环中的稳态温度分布	221
9.5	泊松积分	226
9.6	实心球中的轴对称温度分布	228
9.7	长方体中的温度分布	230
9.8	绕球体的理想流体流动	234
9.9	波动方程 圆形膜片的振动	237
9.10	热流方程 杆中的热流	242
9.11	杜阿美重叠积分	244
9.12	行波	249
9.13	脉动圆柱	254

9.14	付里叶积分应用示例	257
9.15	拉普拉斯变换方法	263
9.16	拉普拉斯变换在长传输线的电报方程中的应用	267
9.17	非齐次条件 参数变异法	272
9.18	问题的公式化	280
9.19	可压缩的理想流体流经障碍物时的超音速流动	286
中册习题答案		340
中册索引		349

第六章 向量分析

6.1 向量的基本性质

一个向量不同于一个数量,这是由于一个数量只具有大小,而一个向量既具有大小,还具有方向(零向量除外).在几何上通常用一个箭头来表示一个向量,以箭头指示其方向,以长度按比例表示其大小.于是,特别是,点 B 相对于点 A 的位置完全可用由 A 到 B 的向量 $\overrightarrow{AB}$ 来描述,因为向量 $\overrightarrow{AB}$ 同时给定了 A 到 B 的方向和距离,事实上,它说明了从 A 到 B 的位移.由于从 A 至第三点 C 的运动可沿向量 $\overrightarrow{AC}$ 来完成,或换另一种形式,先沿向量 $\overrightarrow{AB}$ 至 B ,然后由 B 沿 $\overrightarrow{BC}$ 至 C (图 6.1),所以自然而然地将加法的概念扩展到向量上:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

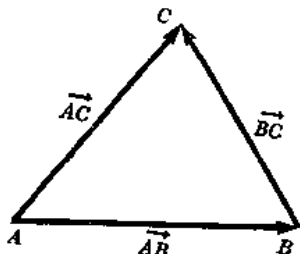


图 6.1

若两个向量具有同一方向和同样的大小,则我们说它们是相等的.按此定义,若一个向量作平行于自身的任何运动,则此向量不变;这就是说,向量在空间中的实际位置可随意指定.但是应该注意,在某些应用中,也可能必须限定向量的位置(例如在确定与一个力向量相关的力矩向量时).

按此约定†,任意两个向量 a 和 b 可用 a 的终端与 b 的始端重合的箭头来表示.则 a 与 b 之和

† 在印刷品中,往往用黑体字来表示向量(如在本书中),因此 a 表示向量,而 a 表示数量.在手抄本中,用 $\vec{a}$ 或 $\underline{a}$ 要更方便些;符号 $\hat{a}$ (或 $\hat{\hat{a}}$)往往用来表示单位向量.

$$c = a + b$$

可用一个由 a 的始端伸至 b 的终端的向量来定义。从定义中不难得出，向量加法是可交换的，即

$$a + b = b + a \quad (1)$$

同样，向量加法也满足结合律，即

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (2)$$

(2)中相等的两个表达式可写为三个向量之和 $a + b + c$ ，且此定义不难推广到任意个向量之和。

若将表示一个向量的箭头的始端和终端互换一下，则所得向量称为原向量的负向量，例如 $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ ，对于从向量 a 减去向量 b ，我们可在向量 a 上加上向量 b 的负向量，即

$$a - b = a + (-b) \quad (3)$$

若一个向量 a 乘以数量 m ，其结果仍为一个向量 ma ，其长度是 a 的长度和 m 的算术积。而它的方向，在 m 为正值时为 a 的方向，在 m 为负值时为 $-a$ 的方向。

具有单位长度的向量称为单位向量。显然，任何向量可写为其长度与单位向量的乘积。

长度为零的向量(任意方向)称为零向量，且用 0 来表示，两个相等的向量之差为零向量。

现考虑右手直角坐标系，其中坐标 x, y 和 z 是沿三个相互垂直的轴起量，而其 x 轴是按右手法则绕 z 轴旋转到 y 轴，并定义单位向量 i, j 和 k 分别具有 x, y 和 z 轴的正向(图 6.2)。于是不难证明任何在坐标轴上的投影分别为 v_x, v_y 和 v_z 的向量 v 可写为向量和

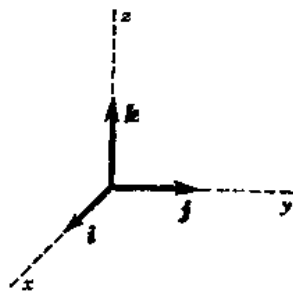


图 6.2

$$v = v_x i + v_y j + v_z k \quad (4)$$

v_x, v_y 和 v_z 称为 $\boldsymbol{v}$ 在 x, y 和 z 方向的数量分量(图 6.3). 若 $\boldsymbol{v}$ 的始端与坐标系原点重合, x, y 和 z 轴正向与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角分别记为 α, β 和 γ , 则可得

$$\begin{aligned} v_x &= v \cos \alpha \\ v_y &= v \cos \beta \\ v_z &= v \cos \gamma \end{aligned} \quad (5)$$

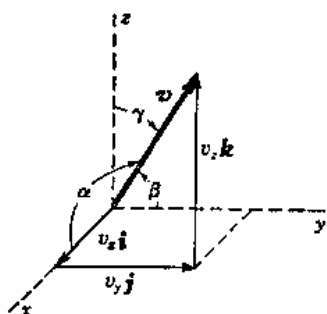


图 6.3

其中 v 为向量 $\boldsymbol{v}$ 的长度或大小. 经常

也用符号 $|\boldsymbol{v}|$ 来代替 v . $\cos \alpha, \cos \beta$ 和 $\cos \gamma$ 称为 $\boldsymbol{v}$ 的方向余弦, 且

经常分别用 l, m 和 n 来表示. 任意正比于 (l, m, n) 的三个数 (A, B, C) 称为“方向比”. 由联系 v 与 $\boldsymbol{v}$ 的数量分量的几何关系

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (6)$$

可知, 其方向余弦满足方程

$$l^2 + m^2 + n^2 \equiv \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (7)$$

我们还可看出, 若将(4)写为

$$\boldsymbol{v} = v(\boldsymbol{i} \cos \alpha + \boldsymbol{j} \cos \beta + \boldsymbol{k} \cos \gamma) \quad (8)$$

式中 v 的系数为一单位向量, 则向量

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{i} \cos \alpha + \boldsymbol{j} \cos \beta + \boldsymbol{k} \cos \gamma \quad (9)$$

是 $\boldsymbol{v}$ 向量的单位向量. 综合方程(5)和(6), 有

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \end{aligned} \quad (10)$$

6.2 两个向量的数量积

两个向量的乘积通常有两类定义. 其第一类乘积称为数量积, 点积或内积, 并写为 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 或 $(\boldsymbol{a} \boldsymbol{b})$. 这类乘积定义为一数量, 它等于

两个向量长度与其正向夹角的余弦之乘积 (图 6.4), 因而可由下式

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta \quad (11)$$

给出, 由于 $b \cos \theta$ 是 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 上的投影, 而 $a \cos \theta$ 却是 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的投影, 由此可知, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 在数值上等于 $\mathbf{b}$ 的长度乘

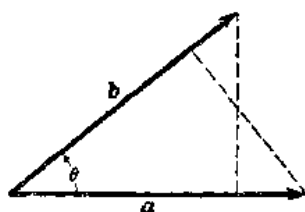


图 6.4

以 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的投影, 或等于 $\mathbf{a}$ 的长度乘以 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 上的投影. 若 θ 为钝角, 则所述投影取负值. 特别是, 若两个向量相互垂直, 则其点积为零. 由其几何说明不难看出, 点积服从交换律, 即

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (12)$$

且服从分配律

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad (13)$$

对单位向量 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$, 可立即得出

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

因而, 若

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k} \quad (15)$$

则应用方程(13), 有

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (16)$$

$\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 之间夹角的余弦可由方程(11)和(16)给为

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (17)$$

或若用 (l_1, m_1, n_1) 和 (l_2, m_2, n_2) 来表示 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的方向余弦, 则

$$\cos \theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 \quad (18)$$

有时用简式 a^2 表示 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$, 则同样有

$$a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 = a^2 \quad (19)$$

点积特别有助于将一给定向量 $\mathbf{v}$ 表示为三个相互垂直的单位

向量 u_1, u_2 和 u_3 的线性组合, 因为若令

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 \quad (20)$$

并在上式两端逐次取 u_1, u_2 和 u_3 的点积, 可得

$$c_1 = v \cdot u_1, \quad c_2 = v \cdot u_2, \quad c_3 = v \cdot u_3$$

于是方程(20)化为

$$v = (v \cdot u_1) u_1 + (v \cdot u_2) u_2 + (v \cdot u_3) u_3 \quad (21)$$

由此可见, 上述表达式仅在 v 的分量与 u_1, u_2 和 u_3 都垂直时可能会失效, 然而这一情况在三维空间中显然是不可能的, 因为 u_1, u_2 和 u_3 是假设相互垂直的。

6.3 两个向量的向量积

两个向量 a 和 b 的第二类常用的积称为向量积, 叉积, 或外积, 并写为 $a \times b$ 或 $[ab]$. 它定义为一个具有如下性质的向量: (1) $a \times b$ 的长度是 a 与 b 的长度及其夹角 θ 正弦值之积, (2) 向量 $a \times b$ 垂直于 a 和 b 形成的平面, 且其方向是按右手法则由 a 绕 $a \times b$ 转至 b (但其转角不大于 180°) 来确定的。

按此定义, 有(参看图 6.5)

$$|a \times b| = |ab| \sin \theta \quad (22)$$

因此, $a \times b$ 的长度等于以 a 和 b 作为其相邻两边的三角形面积的两倍。可见, 由于按定义,

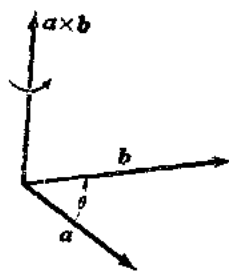


图 6.5

$$b \times a = -(a \times b) \quad (23)$$

所以叉积是不可交换的, 但是它服从分配律, 因而

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \quad (24)$$

上述关系式可从几何上考虑来建立。可以看出, 两个平行向量的叉积为零。

对单位向量 i, j, k , 按定义有

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0 \quad (25)$$

$$i \times j = -j \times i = k, j \times k = -k \times j = i, k \times i = -i \times k = j$$

这些关系式很易用下列循环排列来记忆,

$$\dots i j k i j k \dots$$

若我们注意到, 在上述排列中向右读取时, 一个向量与其相邻向量的叉积即为其下一个向量, 而当向左读取时, 则为下一个向量的负值.

为了用(15)所给的分量来计算两个向量 a 和 b 的叉积, 可应用方程(24)和(25)得出

$$a \times b = (a_y b_z - a_z b_y) i + (a_z b_x - a_x b_z) j + (a_x b_y - a_y b_x) k \quad (26)$$

此结果可方便地写为行列式

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (27)$$

叉积的用途可用以下两个物理应用来说明. 首先, 考虑以大小为 ω 的角速度绕一固定轴旋转的刚体上一点 P . 令 O 为转轴上的一点, 并用长度为 ω 的向量 ω 来表示角速度, 而按右手法则决定其沿转轴的方向(图 6.6). 于是, 若令 O 至 P 的位置向量为 r , 则点 P 的速度向量可由下式

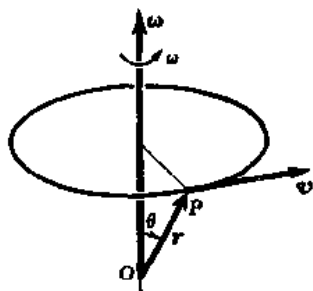


图 6.6

$$v = \omega \times r \quad (28)$$

给出, 由于此向量的大小为 $\omega r |\sin \theta|$, 其中 $r |\sin \theta|$ 是点 P 至转轴的距离; 而此向量的方向如图所示.

作为第二个应用, 考虑作用在点 P 上的力 F 所产生的在点 O

处的力矩向量 M (图 6.7). 若令 O 至 P 的位置向量为 r , 则 F 对点 O 的力矩可定义为向量

$$M = r \times F \quad (29)$$

可见, 向量 M 垂直于 $\overline{OP}$ 和向量 F 所构成的平面, 且其大小为

$$|M| = M = Fr |\sin \theta|$$

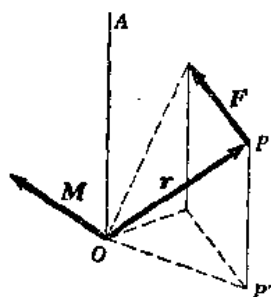


图 6.7

式中 θ 为 r 和 F 间的夹角, 因而 $r |\sin \theta|$ 为点 O 至 F 的作用线的垂直距离. 因此, 我们可以说, M 是该力对 M 轴的数量矩. 在几何上, M 可看作是由 r 和 F 所确定的三角形面积的两倍. 而且, 该力对经过点 O 的任意轴 OA 的数量矩 M_{OA} 可看作为该三角形在经过点 O 且与 OA 垂直的平面上的投影面积的两倍. 但因所述两个平面间的夹角与对应轴间的夹角相同, 故该投影面积必等于 M 在 OA 上的数量投影. 这就是说, F 对经过点 O 的任意轴的数量矩在数值上等于 M 在该轴上投影的长度.

6.4 重积

含有三个向量的三种类型的乘积是重要的, 它们分别为 $(a \cdot b)c$, $(a \times b) \cdot c$ 和 $(a \times b) \times c$. 第一类

$$(a \cdot b)c$$

仅为数量 $a \cdot b$ 和向量 c 之积.

第二类

$$(a \times b) \cdot c$$

称为三重数性积, 它是向量 $a \times b$ 和向量 c 的点积, 因而是一数量. 此积的值是由 $a \times b$ 的长度和 c 在 $a \times b$ 上投影之积来给出 (图 6.8). 但由于 $a \times b$ 是一个垂直于 a 和 b 所在平面的向量, 其长度在数值上等于 a 和 b 为其相邻两边的平行四边形的面积, 且由于

c 在 $a \times b$ 上的投影就是由 a , b 和 c 为其相邻边的平行六面体之高, 因此 $(a \times b) \cdot c$ 在数值上等于该平行六面体的体积, 另一方面, 我们看到, $(a \times b) \cdot c$ 在数值上等于以 a , b 和 c 为棱的四面体体积的六倍. 此积的符号取决于这三个向量的相对指向, 当且仅当 a , b 和 c 形成一右手系时为正号, 在此情况下, c 和 $a \times b$ 位于 a 和 b 所确定平面的同侧. 由此事实不难看出

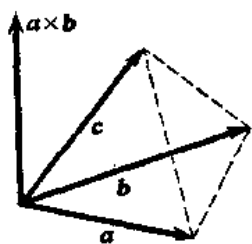


图 6.8

$$(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot b \quad (30)$$

而另外的积

$$(a \times c) \cdot b = (b \times a) \cdot c = (c \times b) \cdot a \quad (31)$$

具有相反的代数符号. 可见, 三重数性积在三个向量循环置换时, 其值不变. 因为从方程(30)和(12)还可得出

$$(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = a \cdot (b \times c)$$

由此可知, 在三重数性积中点积和叉积可互换. 为此, 常用符号 (abc) 来表示方程(30)中所列相等的各个积.

若令

$$a = a_x i + a_y j + a_z k, \quad b = b_x i + b_y j + b_z k$$

$$c = c_x i + c_y j + c_z k$$

则求得

$$\begin{aligned} (abc) &= a \cdot (b \times c) = a \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \\ &= a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x) \end{aligned}$$

或写为行列式形式

$$(abc) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (32)$$

从方程(32)可以看出, 若积 (abc) 中的两个向量平行, 则此积为零, 因为在此情况下, 在行列式(32)的两行中, 其对应元素是成比例的.

第三类三重积

$$(a \times b) \times c$$

显然是一个向量. 因为它垂直于 $a \times b$, 而 $a \times b$ 本身又垂直于 a 和 b 所构成的平面, 同时它还垂直于 c , 因此, $(a \times b) \times c$ 是一个在 a 和 b 所构成的平面内且垂直于 c 的向量. 由此, 该积必定可表示为 a 和 b 的线性组合, 即

$$(a \times b) \times c = ma + nb$$

为确定式中数量 m 和 n , 可先将上式两端与 c 进行点积, 推导出

$$ma \cdot c + nb \cdot c = 0$$

然后令 $n = \lambda a \cdot c$, 则有 $m = -\lambda b \cdot c$, 因而对某数量 λ 有

$$(a \times b) \times c = \lambda[(a \cdot c)b - (b \cdot c)a] \quad (33)$$

将 $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ 等关系式代入, 最后得

$$\lambda = 1$$

因而有

$$(a \times b) \times c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a \quad (34a)$$

(习题 22 中介绍了一种确定 λ 的较为简便的方法). 类似地, 向量 $a \times (b \times c)$ 可表示为 b 和 c 的线性组合, 且由 (34a) 可推导出恒等式

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (b \cdot a)c \quad (34b)$$

如果我们注意到, 在每个展开式中, 一项是其左端的中间因子乘以其他两个因子的点积, 而带负号的一项则是左端括号内另一

因子乘以其余因子的点积，则这两个公式 (34a, b) 就很容易记住。

应该注意，如 $\mathbf{a}\mathbf{b}$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ 这样的组合在此并没有给予定义。

含有三个以上向量的向量积不准用上述的积予以计算，例如积

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$$

可看作为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 和 $(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$ 的三重数量积，因而，若暂时令 $\mathbf{u}=\mathbf{c}\times\mathbf{d}$ 则有

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{u} &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{u} \\ &= \mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})] \\ &= \mathbf{a}\cdot[(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\mathbf{c}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d}]\end{aligned}$$

因而

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \quad (35)$$

特别是当取

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}, \quad \mathbf{d}=\mathbf{b}$$

时，方程 (35) 化为

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \quad (36)$$

此关系式称为拉格朗日恒等式。方程 (36) 的正确性还可由下述事实得出，即它可改写为

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = a^2b^2 - a^2b^2\cos^2\theta = (ab\sin\theta)^2$$

此结果可由 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 的定义推出。

6.5 向量的微分

设向量 $\mathbf{v}$ 的定义含有参变量 t ，若极限

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \quad (37)$$

存在, 则称此极限为向量 $\mathbf{v}(t)$ 对 t 的导数.

由此定义可知, 一数量 $s(t)$ 和一向量 $\mathbf{v}(t)$ 之积的导数可由熟知的乘积求导法则给出, 即

$$\frac{d}{dt} s\mathbf{v} = s \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{ds}{dt} \mathbf{v} \quad (38)$$

所以, 如果一向量用其沿固定坐标轴的分量表示为

$$\mathbf{v} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

由于其中 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$ 为常向量, 故有

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{df}{dt}\mathbf{i} + \frac{dg}{dt}\mathbf{j} + \frac{dh}{dt}\mathbf{k} \quad (39)$$

同样按定义可知, 含有两个或两个以上向量之积, 其导数可按相应的数量情况来计算, 但其因子的顺序保持不变. 因此我们可得出如下公式, 例如

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{c}}{dt}$$

在上述第一个公式中, 其各项的因子顺序是无关紧要的, 但对第二个公式和第三个公式, 这就不成立.

一个长度一定, 但方向改变的向量, 其导数垂直于该向量. 这可由下述情况看出, 对长度为一定的向量 $\mathbf{a}$, 则有

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = \frac{d}{dt} a^2 = 0$$

和

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

这些结果仅在 $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ 为零或 $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ 垂直于 $\mathbf{a}$ 时才是相容的.

6.6 空间曲线几何

当参变量 t 在指定范围内变化时, 方程

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t) \quad (40)$$

定义了一条空间曲线. 我们将由原点 O 至对应于给定值 t 的点 $P(x, y, z)$ 的位置向量记为 $\mathbf{r}$,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (41)$$

若 t 有一增量 Δt , 则 x, y 和 z 有相应的增量, 则由点 O 至新点 Q 的向量可写为

$$\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} = (x + \Delta x)\mathbf{i} + (y + \Delta y)\mathbf{j} + (z + \Delta z)\mathbf{k}$$

因而可得

$$\Delta \mathbf{r} = (\Delta x)\mathbf{i} + (\Delta y)\mathbf{j} + (\Delta z)\mathbf{k} \quad (42)$$

显然, 这一向量即为向量 $\overrightarrow{PQ}$, 因而其长度等于弦长 PQ (参看图 6.9). 若方程 (42) 两端均除以增量 Δt , 则有

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\mathbf{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\mathbf{k}$$

设 s 表示沿曲线的弧长, 则可将上式改写为

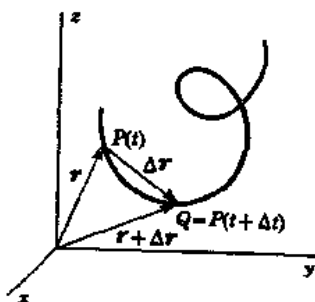


图 6.9

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta s}\mathbf{j} + \frac{\Delta z}{\Delta s}\mathbf{k} \right) \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (43)$$

上式括号内的向量 $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}$ 在 s 随 t 增加时, 其指向与 $\overrightarrow{PQ}$ 相同,

否则与此相反; 其长度等于弦长与弧长之比. 因此, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 得其极限为

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k} \right) \frac{ds}{dt} \quad (44)$$