圣才电子书 圣才考研网
www.100xuexi.com

大礼包
扫码领取

国内外经典教材辅导系列·经济类

尼科尔森《微观经济理论——基本原理与扩展》（第11版）笔记和课后习题详解

主编：圣才考研网
www.100xuexi.com

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM

国内外经典教材辅导系列·经济类

尼科尔森
《微观经济理论——基本原理与扩展》
（第11版）
笔记和课后习题详解

主编：圣才考研网

www.100xuexi.com

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM

内 容 提 要

本书是与尼科尔森《微观经济理论——基本原理与扩展》配套的学习辅导书。本书基本遵循第11版的章目编排，共分19章，每章包括两部分：第一部分为复习笔记，总结本章的重难点内容；第二部分是课（章）后习题详解，对第11版的所有习题都进行了详细的分析和解答。

圣才考研网（www. 100xuexi. com）提供尼科尔森《微观经济理论——基本原理与扩展》网授精讲班【教材精讲】、电子书、题库。购书享受超值大礼包服务【本书电子书＋微观经济学考研强化班内部讲义（精华版）＋考研专业课咨询服务】。手机扫码（本书封面的二维码）免费领取本书大礼包。

图书在版编目（CIP）数据

尼科尔森《微观经济理论——基本原理与扩展》（第11版）笔记和课后习题详解/圣才考研网主编．—北京：中国石化出版社，2016. 8

国内外经典教材辅导系列·经济类

ISBN 978－7－5114－4239－0

Ⅰ．①尼… Ⅱ．①圣… Ⅲ．①微观经济学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ．①F016

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第175497号

中国石化出版社出版发行

地址：北京市朝阳区吉市口路9号

邮编：100020　电话：（010）59964500

发行部电话：（010）59964526

http：//www. sinopec-press. com

E-mail：press@ sinopec. com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经销

*

787×1092毫米16开本20印张506千字

2017年12月第1版　2017年12月第1次印刷

定价：68.00元

国内外经典教材辅导系列·经济类

编　委　会

序言

我国各大院校一般都把国内外通用的权威教科书作为本科生和研究生学习专业课程的参考教材，这些教材甚至被很多考试(特别是硕士和博士入学考试)和培训项目作为指定参考书。为了帮助读者更好地学习专业课，我们有针对性地编著了一套与国内外教材配套的复习资料，并提供配套的名师讲堂和题库。

尼科尔森的《微观经济理论——基本原理与扩展》是世界上最受欢迎的中级微观经济学教材之一。作为该教材的学习辅导书，具有以下几个方面的特点：

1. 浓缩内容精华，整理名校笔记。本书每章的复习笔记对本章的重难点进行了整理，并参考了国内名校名师讲授尼科尔森的《微观经济理论——基本原理与扩展》的课堂笔记，因此，本书的内容几乎浓缩了经典教材的知识精华。

2. 解析课后习题，总结知识考点。国内外教材一般没有提供课(章)后习题答案或者答案很简单，本书参考国外教材的英文答案和相关资料对每章的习题进行了详细的解答，并对该章的重要知识点进行了归纳。

3. 补充相关要点，强化专业知识。一般来说，国外英文教材的中译本不太符合中国学生的思维习惯，有些语言的表述不清或条理性不强而给学习带来了不便，因此，对每章复习笔记的一些重要知识点和一些习题的解答，我们在不违背原书原意的基础上结合其他相关经典教材进行了必要的整理和分析。

与本书相配套，圣才考研网提供尼科尔森《微观经济理论——基本原理与扩展》网授精讲班【教材精讲】、电子书、题库。

要深深牢记：考研不同一般考试，概念题(名词解释)要当作简答题来回答，简答题要当作论述题来解答，而论述题的答案要像是论文，多答不扣分。有的论述题的答案简直就是一份优秀的论文(其实很多考研真题就是选自一篇专题论文)，完全需要当作论文来回答！

购买本书享受大礼包增值服务：手机扫码(本书封面的二维码)免费领取本书大礼包。具体包括：①本书电子书(手机版，电脑版)；②微观经济学考研强化班内部讲义(精华版)；③考研专业课咨询服务。

圣才考研网(www.100xuexi.com)是圣才学习网旗下的考研考博专业网站，提供全国各高校经济类专业考研考博辅导班【一对一辅导(面授/网授)、网授精讲班等】、电子书、题库、全套资料(历年真题及答案、笔记讲义等)、经济类国内外经典教材名师讲堂、考研教辅图书等。

考研辅导：kaoyan.100xuexi.com(圣才考研网)
资格考试：www.100xuexi.com(圣才学习网)

圣才学习网编辑部

目 录

第1篇 引 言

第2篇 选择与需求

第3篇 不确定性与策略

第4篇 生产与供给

第1篇 引 言

第1章 经济模型

1.1 复习笔记

1. 经济模型

(1)经济模型的含义

经济模型是一种分析方法，它极其简单地描述现实世界的情况。现实世界的情况是由各种主要变量和次要变量构成的，错综复杂，因而除非把次要的因素排除在外，否则就不可能进行严格的分析，或使分析复杂得无法进行。通过作出某些假设，可以排除许多次要因素，从而建立起模型，便于进行分析。

(2)经济模型的三个共同因素

①"其他条件不变"的假设；

②经济决策者寻求某项最优化的假设；

③准确地区分"实证性"和"规范性"问题。

(3)检验经济模型的方法

用于验证经济模型的一般方法有两种：①直接法，即检验作为模型基础的基本假设是否成立；②间接法，即看所抽象出的模型对现实预测的有效性。

2."水与钻石悖论"

亚当·斯密在《国富论》指出"具有极大使用价值的东西往往只有很少的或没有交换价值，相反，那些具有极大交换价值的东西往往很少或没有使用价值。再没有比水更有用的东西了，但水却不能购买任何东西，没有东西和水交换。相反，钻石几乎没有使用价值，却十分昂贵。"由此引出了水与钻石悖论。

英国经济学家马歇尔从需求和供给两方面来共同解释了该悖论：

从需求一方看，价格取决于商品的边际效用，而不是总效用。对于水，水源充足，人们对水的消费量大，因而其边际效用很小，价格也就很便宜。同理，人们对钻石的边际效用很大，其价格也就相应地昂贵。

从供给一方看，由于水源充足，生产人类用水的成本很低，因而其价格也低。钻石则很稀缺，生产钻石的成本也很大，因而钻石很昂贵。

综合需求和供给两方面，则水便宜，钻石昂贵。即虽然水的使用价值极大，却没有交换价值；而钻石几乎没有使用价值，却可以交换大量的其他商品。

3. 经济均衡

(1)局部均衡模型

局部均衡模型是一种经济分析方法，指在其他情况不变的情况下，仅考察经济生活在一定时间的某个变数对有关经济变量的影响的分析方法。其特点是以单个的生产者和消费者为

分析的对象，而不考虑它同其他生产者或消费者之间的相互影响。英国著名经济学家马歇尔在其价值论和分配论的阐释中运用了这种分析方法。

(2)一般均衡模型

一般均衡模型是1874年法国经济学家瓦尔拉斯创立的。瓦尔拉斯认为，整个经济体系处于均衡状态时，所有消费品和生产要素的价格将有一个确定的均衡值，它们的产出和供给，将有一个确定的均衡量。他还认为在“完全竞争”的均衡条件下，出售一切生产要素的总收入和出售一切消费品的总收入必将相等。该理论的实质是说明资本主义经济可以处于稳定的均衡状态。在资本主义经济中，消费者可以获得最大效用，企业家可以获得最大利润，生产要素的所有者可以得到最大报酬。

1.2 课后习题详解

本章没有课后习题。本章是全书的一个引言，主要要求读者对微观经济模型有一个整体了解，然后在以后各章的学习中逐渐深化认识。

第2章 微观经济学中的数学工具

2.1 复习笔记

1. 一元函数最大值问题

假设企业所获得的利润(π)仅取决于出售商品的数量(q)，它的数学表达为 $\pi=f(q)$，则利润最大化的产量 q 必须满足以下两个条件：

(1)最大化的一阶条件(必要条件)：对于上述一元函数，如果在某一点 q^* 取到最大值，它在该点的导数(如果存在)必为零，即 $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}q}\right|_{q=q^*}=0$。

(2)最大化的二阶条件(必要条件)：在满足一阶导数等于零的条件下，并不能保证该点为极大值点，还必须满足二阶导数小于零，即 $\left.\frac{\mathrm{d}^2\pi}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q=q^*}=\left.f''(q)\right|_{q=q^*}<0$。

上述两个条件同时满足才构成最大化的充分条件。

2. 多元函数的最值问题

函数 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ 取最大值(或者最小值)的必要条件是，对于任意 x 的微小变化的组合都有 $\mathrm{d}y=0$，这样该点必有：$f_1=f_2=...=f_n=0$，此为极值的一阶条件。但这个条件并不能保证最大化，还需要考察该点的二阶偏导数是否满足自身的二阶偏导数为负，如果满足才能保证最大化。

3. 包络定理

在经济分析中，人们常常要考察经济中的某些参数的变化对目标函数(最大值)的影响，如一商品价格的变化对消费者的效用的影响，一投入要素价格的变化(或要素禀赋的变动)对厂商收入(或利润)的影响，此时，包络定理为这种分析提供了方便。

考察如下一个最优化问题：

$$\max_x f(x, \alpha)$$
$$s.t.\ g(x, \alpha)=0$$

其中，x 为 n 维向量，参数 α 为 m 维向量。

定义值函数和拉格朗日函数分别为：

$$V(\alpha)=\max_x\{f(x, \alpha)\mid g(x, \alpha)=0\}=f[x(\alpha), \alpha]$$
$$L(x, \alpha; \lambda)=f(x, \alpha)-\lambda g(x, \alpha)$$

包络定理可以表示为：

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_k}=\left.L_{\alpha_k}(x, \alpha)\right|_{x^*}$$

即参数 α_k 对最大值函数(目标函数的最大值)的影响，就等于拉格朗日函数直接对参数 α_k 求偏导数，并且在最优解 x^* 处取值。

4. 有约束条件的最大化问题

求解具有约束条件最大化问题的一种方法是拉格朗日乘数法。假设求解 $x_1, x_2, \cdots, x_n$

的值，以便最大化下式：

$$y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

其中部分自变量是有限制的，但可以将约束条件一般性地记为：

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$$

其中函数 g 表示所有 x 满足的关系。

构造拉格朗日函数：

$$\xi=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)+\lambda g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

有一阶条件为：

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_1}=f_1+\lambda g_1=0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_2}=f_2+\lambda g_2=0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_n}=f_n+\lambda g_n=0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \lambda}=g(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$$

上述方程能够解出 x_1，x_2，…，x_n 和 λ 的值。此解满足两个性质：第一，x 服从约束条件；第二，所有这些服从约束条件的 x 使得 ξ(与 f) 尽可能大。

5. 有约束条件下的最大化问题中的包络定理

假设求解以下函数的最大值：

$$y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n; a)$$

其变量服从约束条件：

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n; a)=0$$

函数 f 与 g 对参数 a 具有依赖性。求解这个问题的一种方法是建立拉格朗日表达式：

$$\xi=f(x_1, x_2, \ldots, x_n; a)+\lambda g(x_1, x_2, \ldots, x_n; a)$$

求解最优值 x_1^*，…，x_n^* 的一阶条件，它可以表示为：

$$\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}a}=\frac{\partial \xi}{\partial a}(x_1^*, \ldots, x_n^*; a)$$

即当参数 a 的改变(与所有重新计算的 x 的最优值)导致 y 的最优值的改变可由对拉格朗日表达式求偏导数，再将极值点的数据代入得到。因此，拉格朗日表达式在计算约束条件下的问题和没有约束条件的问题时，包络定理起了相同的作用。

6. 齐次函数

对于一个多元函数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，如果对于任意正数 t，满足：

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)=t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

则称其为 k 次齐次函数。

(1)齐次函数的偏导数

一个 k 次齐次可微函数的各个偏导数是 $k-1$ 次齐次的。例如，对齐次函数表达式的两边分别关于 x_1 求偏导数，有：

$$\frac{\partial f(tx_1, \cdots, tx_n)}{\partial x_1}\cdot t=t^k\frac{\partial f(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_1}$$

$$f_1(tx_1, \cdots, tx_n) = t^{k-1} f_1(x_1, \cdots, x_n)$$

可见 f_1 是满足 $k-1$ 次齐次的定义的。

(2)欧拉定理

齐次函数的一个重要性质是对因子 t 求偏导得到的。对齐次函数表达式的两边分别对 t 求偏导得：

$$kt^{k-1} f(x_1 \cdots x_n) = x_1 f_1(tx_1 \cdots tx_n) + \cdots + x_n f_n(tx_1 \cdots tx_n)$$

令 $t=1$，有：

$$kf(x_1 \cdots x_n) = x_1 f_1(x_1 \cdots x_n) + \cdots + x_n f_n(x_1 \cdots x_n)$$

这就是齐次函数的欧拉定理。它说明了对于齐次函数，其函数值与其各个偏导数之间有确定的关系。

(3)位似函数

齐次函数经过任意的单调映射得到的函数称之为位似函数。位似函数保持了原函数自变量到函数值对应的序关系。即对于函数 f，如果一组自变量对应的函数值大于另一组的，那么经过单调映射后前者的函数值仍大于后者。但是由于单调映射有很多可能的形式，原齐次函数的很多性质是不能保持的。要注意的是，位似函数有个很好的性质，即函数各个自变量之间的隐含替代关系只取决于自变量之间的比例，而不取决于其绝对值。

定积分的微分运算规律：对积分变量求微分；对积分上限求微分；对非积分变量求微分。

7. 动态最优化

(1)最优控制问题

假设一个决策者希望在时间区间 $[t_0, t_1]$ 内找到变量 $x(t)$ 的最优的时间路径。x 随 t 的变化由下述微分方程表示：

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = g[x(t), c(t), t]$$

其中，变量 $c(t)$ 被用于“控制” $x(t)$ 的变化。在每一个时期，决策者都能够得到 $f[x(t), c(t), t]$ 的收益，同时他的目标是最大化 $\int_{t_0}^{t_1} f[x(t), c(t), t]\mathrm{d}t$。

(2)极大值问题

单一时间点上决策者的决策问题：不仅仅关注目标函数的现值，同样也关注 $x(t)$ 值的隐性变化。$x(t)$ 的现值由 $\lambda(t)x(t)$ 给出，它的即时变化率由下式给出：

$$\frac{\mathrm{d}[\lambda(t)x(t)]}{\mathrm{d}t} = \lambda(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + x(t)\frac{\mathrm{d}\lambda(t)}{\mathrm{d}t}$$

同时，在任意时间 t，决策者整体关注的函数为：

$$H = f[x(t), c(t), t] + \lambda(t) g[x(t), c(t), t] + x(t)\frac{\mathrm{d}\lambda(t)}{\mathrm{d}t}$$

上述表达式达到最优化所需要满足的条件为：

$$\frac{\partial H}{\partial c} = f_c + \lambda g_c = 0 \text{ 或者 } f_c = -\lambda g_c$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = f_x + \lambda g_x + \frac{\mathrm{d}\lambda(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ 或者 } f_x + \lambda g_x = -\frac{\mathrm{d}\lambda(t)}{\mathrm{d}t}$$

这就是动态问题的两个最优化条件。这两个条件也经常被称为极大值原理。

8. 数理统计

随机变量分为离散随机变量和连续随机变量。对任意的随机变量，它的概率密度函数(PDF)能够体现其每一个特定结果出现的概率。任意概率密度函数都要满足$f(x)\geqslant 0$，同时函数值求和(或者积分)为1。常用的概率密度函数有：二项分布、均匀分布、指数分布和标准正态分布。

2.2 课后习题详解

1. 已知$U(x, y)=4x^2+3y^2$。

(1)计算$\frac{\partial U}{\partial x}$，$\frac{\partial U}{\partial y}$。

(2)当$x=1$，$y=2$时，求这两个偏导数的值。

(3)写出U的全微分。

(4)当$dU=0$，计算dy/dx，即保持U不变，y和x的替代关系如何?

(5)说明当$x=1$，$y=2$时，$U=16$。

(6)当$x=1$，$y=2$时，x，y要以怎样的比例微小变化才能保持$U=16$不变?

(7)$U=16$的等高线是什么图形?它各点的斜率是多少?

解：(1)对于函数$U(x, y)=4x^2+3y^2$，其关于x和y的偏导数分别为：

$$\frac{\partial U}{\partial x}=8x,\ \frac{\partial U}{\partial y}=6y$$

(2)当$x=1$，$y=2$时，(1)中的偏导数值分别为：

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=1}=8,\ \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=2}=12$$

(3)U的全微分为：

$$\mathrm{d}U=\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y=8x\mathrm{d}x+6y\mathrm{d}y$$

(4)当$\mathrm{d}U=0$时，由(3)可知：$8x\mathrm{d}x+6y\mathrm{d}y=0$

从而可以解得：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-8x}{6y}=\frac{-4x}{3y}$

(5)将$x=1$，$y=2$代入U的表达式，可得：$U=4\times 1+3\times 4=16$。

(6)由(4)可得，在$x=1$，$y=2$处，当保持$U=16$不变，即$\mathrm{d}U=0$时，有：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-4\times 1}{3\times 2}=-2/3$$

(7)当$U=16$时，该函数变为：$4x^2+3y^2=16$，因而该等高线是一个以原点为中心的椭圆。由(4)可知，该等高线在(x, y)处的斜率为：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{4x}{3y}$。

2. 假设某企业的总收入只由产量决定，且关系式为$R=70q-q^2$，总成本也只由q决定，$C=q^2+30q+100$。

(1)要使利润$(R-C)$最大化，产量定为多少?最大利润是多少?

(2)说明(1)问题的答案满足极值的二阶条件。

(3)结果满足“边际收益=边际成本”原则吗?请解释。

解：(1)公司的利润函数为：

$$\pi = R - C = -2q^2 + 40q - 100$$

利润最大化的一阶条件为：

$$\frac{d\pi}{dq} = -4q + 40 = 0$$

从而可以解得利润最大化时的产量为：$q^* = 10$；

相应的最大化的利润为：$\pi^* = -2 \times 10^2 + 40 \times 10 - 100 = 100$。

(2) 在 $q^* = 10$ 处，利润最大化的二阶条件为：$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -4 < 0$，因而满足利润最大化的二阶条件。

(3) 在 $q^* = 10$ 处，边际收益为：$MR = \frac{dR}{dq} = 70 - 2q^* = 70 - 2 \times 10 = 50$；

边际成本为：$MC = \frac{dC}{dq} = 2q^* + 30 = 2 \times 10 + 30 = 50$；

因而有 $MR = MC = 50$，即"边际收益等于边际成本"准则满足。

3. 设 $f(x, y) = xy$，在 $x + y = 1$ 的约束条件下分别用代入消元法和拉格朗日乘数法求最大值。

解：(1) 代入消元法

由 $x + y = 1$ 可得：$y = 1 - x$，将其代入 f 可得：$f = xy = x - x^2$，从而有：$\frac{df}{dx} = 1 - 2x = 0$，可以解得：$x = 0.5$，$y = 0.5$，$f = 0.25$。

(2) 拉格朗日乘数法

构造拉格朗日函数为：$L = xy + \lambda(1 - x - y)$

一阶条件为：

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - x - y = 0$$

从而可以解得：$x = y = 0.5$，因而有：$f = xy = 0.25$。

4. 上一题的对偶问题是给定 $xy = 0.25$，求 $x + y$ 的最小值。用拉格朗日乘数法求解。比较这两题中算出的拉格朗日乘数的大小，并解释其关系。

解：(1) 设最小化问题的拉格朗日函数为：

$$L = x + y + \lambda(0.25 - xy)$$

一阶条件为：$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - \lambda y = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - \lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.25 - xy = 0$$

从而有：$x = y$，$xy = x^2 = 0.25$，从而可以解得：$x = y = 0.5$。

(2) 将本题与第 3 题进行比较可知，两种情况下求得的拉格朗日乘数的值分别为 0.5 和

2，互为倒数。这是因为第3题中受约束的最大化问题是本题中受约束的最小化问题的一个对偶问题。

5. 垂直向上抛球，t 秒后高度为 $f(t) = -0.5gt^2 + 40t$（其中 g 是重力加速度）。

(1) 达到最高点时 t 为多少？将其写成 g 的函数。

(2) 用上一问的结果解释当 g 发生改变时，最高点高度如何变化。

(3) 用包络定理求解第(2)小题。

(4) 在地球上 $g = 32$，但在不同的地方略有不同。如果两地 g 相差 0.1，球能达到的最大高度大约差多少？

解：(1) 对高度函数 $f(t) = -0.5gt^2 + 40t$ 关于时间求导数可得：

$$\frac{df}{dt} = -gt + 40 = 0$$

从而可以解得使高度最大的时间为：$t^* = \dfrac{40}{g}$，从而可知小球处于最高处的时间 t 与参数 g 成反比例关系。

(2) 将 $t^* = \dfrac{40}{g}$ 代入高度函数中可得：

$$f(t^*) = -0.5g(40/g)^2 + 40(40/g) = 800/g$$

从而有：$\dfrac{\partial f(t^*)}{\partial g} = -800/g^2 < 0$

即随着 g 的增大，最大高度将变小。

(3) 由包络定理可知：$\dfrac{\partial f}{\partial g} = -\dfrac{1}{2}(t^*)^2$ 取决于 g，因为 t^* 取决于 g。

因而有：$\dfrac{\partial f}{\partial g} = -0.5(t^*)^2 = -0.5\left(\dfrac{40}{g}\right)^2 = \dfrac{-800}{g^2} < 0$。

(4) 当 $g = 32$ 时，最大高度为：$f = 800/32 = 25$；

当 $g = 32.1$ 时，最大高度为：$f' = 800/32.1 \approx 24.92$；

因而两地最大高度的差异为：$\Delta f = f' - f = 24.92 - 25 = -0.08$。

6. 为了建造一艘油轮，我们把一块长 $3x$，宽 x 的铁皮四角各剪去一块边长为 t 的正方形，再折起来，就形成了无盖油箱的结构。

(1) 证明油箱的体积 $V = t(x-2t)(3x-2t) = 3tx^2 - 8t^2x + 4t^3$。

(2) 对于给定的 x，为了使油箱容积最大，t 应该取多少？

(3) 把 V 视为 x 的函数，V 是否有最大值？

(4) 如果造船厂只有 1000000 平方英尺的铁皮，即 t，x 满足约束条件 $3x^2 - 4t^2 = 1000000$。现在求解 V 的最大值。此时的结果和(2)，(3)两个问题有什么区别？

解：(1) 如图2-1所示，长方形四个角处去掉一个边长为 t 的正方形后叠起来的油箱是一个长方体，该长方体的长为 $(3x-2t)$，宽为 $(x-2t)$，高为 t，因而其体积为：

$$V = t(x-2t)(3x-2t) = 3tx^2 - 8t^2x + 4t^3$$

(2) V 关于 t 求导数可得：$\dfrac{\partial V}{\partial t} = 3x^2 - 16xt + 12t^2 = 0$

从而可以解得：$t = \dfrac{16x \pm \sqrt{256x^2 - 144x^2}}{24} = \dfrac{16x \pm 10.6x}{24}$

即：$t_1 = 0.225x$，$t_2 = 1.11x$

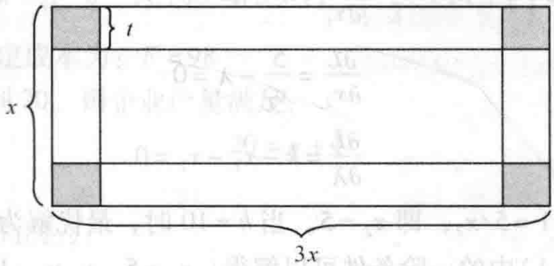

图 2 - 1　油轮模型的制作

二阶条件为：$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -16x + 24t$

因此，只有当 $t = 0.225x$ 时，才有 $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -16x + 24t < 0$，即只有当 $t = 0.225x$ 才能使给定 x 下的 V 最大。

(3) 当 $t = 0.225x$ 时，$V \approx 0.67x^3 - 0.04x^3 + 0.05x^3 \approx 0.68x^3$。因而当 x 增大时，V 随之增大，没有极限。因此，不存在一个 x 使得所装油的体积最大。

(4) 受约束的最优化问题为：

$$\max\ V = 3tx^2 - 8t^2x + 4t^3$$
$$s.\ t.\ \ 3x^2 - 4t^2 = 1000000$$

设拉格朗日函数为：

$$L = 3tx^2 - 8t^2x + 4t^3 + \lambda(1000000 - 3x^2 + 4t^2)$$

一阶条件为：

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 3x^2 - 16tx + 12t^2 + 8\lambda t = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 6tx - 8t^2 - 6\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1000000 - 3x^2 + 4t^2 = 0$$

从而可以利用拉格朗日乘数法求得最优的 t^*、x^*。显然，该受约束的最大化问题的解将有别于(2)和(3)中求解出来的解。

7. 考虑条件极值问题，使 y 最大化，其中

$$y = x_1 + 5\ln x_2$$

x_1，x_2 满足约束条件 $k - x_1 - x_2 = 0$，k 为任意常数。

(1) 当 $k = 10$ 时，求解该条件极值问题。

(2) 证明 $k = 4$ 时，$x_1 = -1$。

(3) 如果要求自变量必须非负，$k = 4$ 时的最优解是多少？

(4) 当 $k = 20$ 时，求解之，并与问题(1)的结果做比较，能得出什么结论？

(注：这个问题涉及的函数称为“准线性函数”，在消费者行为理论中还会用到。)

解：(1) 设拉格朗日函数为：

$$L = x_1 + 5\ln x_2 + \lambda(k - x_1 - x_2)$$

一阶条件为：

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=1-\lambda=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=\frac{5}{x_2}-\lambda=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=k-x_1-x_2=0$$

从而可以解得：$\lambda=1=5/x_2$，即 $x_2=5$。当 $k=10$ 时，最优解为：$x_1=x_2=5$。

(2)当 $k=4$ 时，由(1)中的一阶条件可以解得：$x_2=5$，$x_1=-1$，因此结论成立。

(3)如果此问题的解非负时，最优解为：$x_1=0$，$x_2=4$，$y=5\ln 4$。因为任何正的 x_1 的值都将使 y 变小。

(4)如果 $k=20$，则由(1)可得最优解为：$x_1=15$，$x_2=5$。因为 x_2 给 y 提供了一个递减的边际增量，而 x_1 却没有，所以，所有的最优解要求一旦 x_2 增至5，额外的增量应该全部由 x_1 的增加来实现。

8. 假定一个企业的边际成本函数是 $MC(q)=q+1$。

(1)这个企业的总成本函数是什么？解释为什么总成本函数只取决于一个代表了固定成本的积分常数。

(2)在之前的经济学课程中已经学习到，在企业做出定价决策(p)时，产量 q 和价格 p 要满足关系 $p=MC(q)$。如果企业依照这个利润最大化规律进行决策，那么在 $p=15$ 时，企业的产量是多少？假设企业在这个价格时不赚不赔，那么企业的固定成本是多少？

(3)如果价格上涨到20，企业将获得多少利润？

(4)请证明，如果继续假设企业依据利润最大化规律做决策，那么企业的利润能够写成价格 p 的一元函数。

(5)求解价格从 $p=15$ 上涨到 $p=20$ 后利润的增量有两种计算方法：①直接使用(4)中的函数求解；②对逆边际成本函数 $MC^{-1}(p)=p-1$ 积分，积分下限为 $p=15$，积分上限为 $p=20$。请分别使用这两种方法计算利润增量，并使用包络定理在直观上解释结果。

解：(1)由企业的边际成本函数是 $MC(q)=q+1$，设企业的固定成本为 F，则企业的总成本函数为：

$$TC(q)=F+\int_0^q (t+1)\mathrm{d}t=\frac{q^2}{2}+q+F$$

由于企业的边际成本是指企业多生产一单位的产品所增加的企业成本。用公式描述企业总成本函数和边际成函数之间的关系就是 $MC(q)=\frac{\mathrm{d}TC(q)}{\mathrm{d}q}$。而上述所求的总成本函数代表了在此边际成本函数下的总成本函数族。此时，要使总成本函数唯一，主要取决于固定成本 F。

所以说，总成本函数只取决于一个代表了固定成本的积分常数。

(2)在企业做出定价决策(p)时，产量 q 和价格 p 要满足关系 $p=MC(q)$。如果企业依照这个利润最大化规律进行决策，那么在 $p=15$ 时，企业的产量满足：

$$15=q+1$$

解得：$q=14$

企业在这个价格时不赚不赔，此时的企业利润为零，即：