



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中 外 物 理 学 精 品 书 系

前 沿 系 列 · 39

结构力学中的定性理论

王大钧 王其申 何北昌 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

前沿系列 · 39

结构力学中的定性理论

王大钧 王其申 何北昌 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

结构力学中的定性理论/王大钧, 王其申, 何北昌著. —北京: 北京大学出版社, 2014. 12

(中外物理学精品书系)

ISBN 978-7-301-25137-9

I. ①结… II. ①王… ②王… ③何… III. 结构力学-定性理论 IV. ①O342
中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 272062 号

书 名: 结构力学中的定性理论

著作责任者: 王大钧 王其申 何北昌 著

责任编辑: 邱淑清

标准书号: ISBN 978-7-301-25137-9/O · 1021

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> 新浪官方微博: @北京大学出版社

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752021

出版部 62754962

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

印 刷 者: 北京中科印刷有限公司

经 销 者: 新华书店

730 毫米×980 毫米 16 开本 28 印张 464 千字

2014 年 12 月第 1 版 2014 年 12 月第 1 次印刷

定 价: 75.00 元

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有, 侵权必究

举报电话: 010-62752024 电子信箱: fd@pup.pku.edu.cn

“中外物理学精品书系”

编委会

主 任：王恩哥

副主任：夏建白

编 委：（按姓氏笔画排序，标 * 号者为执行编委）

王力军	王孝群	王 牧	王鼎盛	石 兢
田光善	冯世平	邢定钰	朱邦芬	朱 星
向 涛	刘 川*	许宁生	许京军	张 酣*
张富春	陈志坚*	林海青	欧阳钟灿	周月梅*
郑春开*	赵光达	聂玉昕	徐仁新*	郭 卫*
资 剑	龚旗煌	崔 田	阎守胜	谢心澄
解士杰	解思深	潘建伟		

秘 书：陈小红

序 言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础，同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天，物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴，而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到，改革开放三十多年来，随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展，我国物理学取得了跨越式的进步，做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下，近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势，在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看，尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书，但系统总结物理学各门类知识和发展，深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源，并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考，仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展，特别是展现近年来中国物理学家的研究水平和成果，北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了“中外物理学精品书系”，试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家，确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富，涵盖面广，可读性强，其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结，也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示；既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态，也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说，“中外物理学精品书系”力图完整呈现近现代世界和中国物理

科学发展的全貌，是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

“中外物理学精品书系”另一个突出特点是，在把西方物理的精华要义“请进来”的同时，也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻，引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态，可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面，改革开放几十年来，我国的物理学研究取得了长足发展，一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域，使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解，不仅充分展示出中国物理学研究和积累的“硬实力”，也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”，对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是，“中外物理学精品书系”还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20 世纪以来，中国物理界诞生了很多经典作品，但当时大都分散出版，如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中，读者们对这些论著也都是“只闻其声，未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫，对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统的整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值，不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献，充分发挥其应有的传世育人的作用，更能使广大物理学人和青年学子切身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统，真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在 2006 年中国科学技术大会上指出，“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径，是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新，而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信，这套“中外物理学精品书系”的出版，不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣，也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展，为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

“中外物理学精品书系”编委会 主任

中国科学院院士，北京大学教授

王恩哥

2010 年 5 月于燕园

内 容 简 介

本书主要包含两方面内容：一为结构振动的定性性质，主要是模态的定性性质；另为结构理论解的存在性等基础理论。鉴于目前国内外有关结构力学中的定性理论的著作甚少，本书的出版或可适时的为有关同行提供一本既有实用价值又有理论意义的参考书。

全书共分九章：第一章为结构力学中的定性理论概论；第二至第六章，论述弦、杆、梁和膜振动的定性性质；第七章论述重复性结构的连续系统和离散系统振动的定性性质；第八章论述一般结构的模态的三项定性性质；第九章论述弹性力学和结构理论解的存在性等基础理论。附录是振荡矩阵和振荡核理论的简述。

本书内容理论应用兼顾，作者精心地整理和吸收了有关定性理论的文献与专著精华，并反映了作者 50 余篇论文的研究成果；体例编写独特，如第一章概论，给出了全书重要结果，工程技术人员可以直接应用这些结果，具有不同背景的读者可以各取所需地研读全书。

本书可以作为有关力学和结构工程、机械工程专业研究生教材，也可作为从事力学理论研究及在结构工程、机械工程中进行振动试验、计算和设计的研究人员与工程人员参考。

前 言

结构力学中的定性理论涉及多方面内容, 本书主要论述其中两类重要问题: 一是弹性结构线性振动的定性性质, 其中主要是模态 (含固有频率和振型) 的定性性质; 二是线性弹性力学和线性结构理论的静力解、模态解和动力响应解的存在性, 结构理论模型的合理性, 以及应用 Ritz 近似法求解的收敛性等基础理论.

弹性结构的线性振动理论是力学与声学的重要组成部分, 它不仅在工程上有广泛应用, 而且是物理与数学研究课题的一个源泉.

结构振动理论包含定量理论和定性理论两个方面. 在工程界、力学界, 人们对于结构线性振动的定量理论比较熟悉, 例如固有频率和振型的数值计算、实验与实测等; 而对结构线性振动的定性理论, 如固有频率和振型的规律性的性质、模态解和动力响应解的存在性却了解较少. 这一方面是因为定量理论的应用比定性理论广泛; 另一方面是因为后者更抽象和更具基础性, 它的严谨的证明又涉及繁难的数学.

结构振动中模态的定性性质是关于模态的全局性、规律性的性质, 通晓这些性质有助于提高计算和实验的定量分析的效率与保证结构动力设计的合理性. 结构理论中解的存在性、结构理论模型的合理性等问题是结构理论中的基础性理论, 了解这些基础性理论, 不仅有助于进行定量分析, 也是研究者应具有的理论修养的一部分.

关于结构振动模态的定性性质的研究, 最早可以追溯到 19 世纪 30 年代, Rayleigh 在其专著^[1]中就曾指出, Sturm 和 Liouville 在当时已用微分方程研究杆的振型的节点分布规律. 20 世纪 50 年代, Courant 和 Hilbert 在其专著^[2]中, 用变分法的极值原理导出了一般振动系统的固有频率与系统的质量、刚度、约束和边界的定性关系, 并对振型的节的性质作了一些精彩的重要论述.

20 世纪中叶, Гантмахер 和 Крейн 开辟了一个新领域, 建立了他们称之为振荡矩阵和振荡核的理论, 揭示了一维结构 (包括弦、杆、梁) 的离散系统和连续系统的固有频率和振型的系统性的定性性质, 并于 1941 年在苏联出版了专

著^[3], 1950 年出版了第二版, 1961 年该版本英译本出版, 2008 年中译本出版.

20 世纪 80 年代, Gladwell 系统地研究了由固有频率和振型构造结构参数的振动反问题, 并出版了专著^[4], 1991 年中译本出版, 2004 年第二版问世. Gladwell 在其专著及许多论文中, 如参考文献 [5~9], 扩展了振动的定性性质的成果.

从 20 世纪 80 年代后期至今, 本书三位作者以结构振动的定性性质为专题进行了比较系统的研究^[10~42], 进一步扩展了结构振动的定性性质的成果. 本书的第一作者于 20 世纪 90 年代, 在北京大学力学与工程科学系开设的研究生课程“结构动力学”中, 曾多次将弹性结构振动的定性性质作为课程的部分内容进行了讲授.

关于结构理论中解的存在性的研究也有一个长期的发展历程. 早期, 一些数学家用经典的微分方程方法研究较简单的数学方程, 如 Sturm-Liouville 方程的解的存在性. 20 世纪以来, Hilbert 函数空间理论的发展使数学物理方程解的存在性问题获得了强有力的工具, 从而得到了系统性的成果. 如 Соболев 于 1950 年出版的专著^[43], Михлин 于 1952 年出版的专著^[44], Fichera 于 1972 年出版的专著^[45] 等中, 用 Hilbert 空间、Sobolev 空间理论解决了弹性力学中静力平衡解、模态解和动力响应解的存在性问题. Kupradze^[46] 发展了另一方法——多维奇异位势和奇异积分方程, 证明了弹性力学解的存在性问题. 随后, 许多力学家、数学家研究并解决了各种壳体理论的平衡解的存在性问题. 王大钧与胡海昌于 1982~1985 年间发表的一组论文^[47~50], 用力学和泛函分析结合的方法, 统一地解决了广泛的结构理论的静力平衡解和模态解的存在性问题, 并深入论证了结构理论模型的合理性问题.

时至今日, 我们感到将弹性结构的定性理论作为一个专题撰写成书, 对学术研究、教学和工程应用都是有积极意义的. 有鉴于此, 我们尝试着写作此书. 在书中, 吸收了前面提及的多部专著的精华, 以及本书作者的有关论文的内容.

也许本书的内容还不完善, 但这样明确地开辟一个学术园地, 将有利于同行关注、参与, 并扩大、深化这个领域的研究和应用.

本书所涉及的定性性质都极富规律性和科学美感, 并对定量分析和工程应用有一定指导性, 相关专业的研究者、工程人员和学生在学习和研究它们时, 定会引起盎然兴趣并能从中受益. 但有些定性性质的证明涉及比较繁难的数学, 有些极简明的定性性质, 却要经过大量的数学演绎才能得到, 对此, 并非所有读者都需细读. 有些读者只需关注部分性质的证明, 有些读者可能只要准确地知道

一些定性性质及其应用而不需细究其证明就够了。有鉴于此,特辟第一章,在此章中汇集全书的主要定性性质并评述主要理论及其论证方法,而关于它们的详细论述则从第二至第九章及附录逐章展开,这样即可避免精彩而实用的定性性质被掩蔽在繁难的证明中,读者可以根据自己的需要和兴趣各取所需地研读。例如,工程技术人员可以不必细读附录,但研究定性理论的同行,则是需要细读的。

全书内容包含以下几部分。第一章为结构力学中的定性理论概论。第二至第六章,分别论述弦、杆、梁(本书所论及的梁,如不加注,皆指 Euler 梁)和膜等基本结构振动的定性性质。第七章论述重复性结构,包含镜面对称、旋转周期、线周期、链式和轴对称结构的连续系统,和前四种结构的离散系统的振动的定性性质,以及求强迫振动和静力平衡解的简化方法。第八章论述一般结构的模态的三项定性性质:固有频率与结构的质量、刚度、约束和边界的定性关系,振型的节的一些基本性质,以及固有频率和振型,尤其是密集频率区的固有频率和振型对结构参数变化的敏感性等。第九章论述弹性力学和广泛的结构理论的静力平衡、模态解的存在性、唯一性,动力响应解的振型叠加法的收敛性,静力平衡和模态解中 Ritz 法的收敛性,以及结构理论模型的合理性等。附录是一维结构的振动定性性质的理论基础——振荡矩阵和振荡核理论——的简述。

本书由三位作者共同策划,王大钧执笔第一、七、八、九章,王其申执笔第二、三、四、五、六章和附录,何北昌执笔本书的英文文稿。

本书可以作为有关力学及结构工程专业的研究生教材,也可作为从事力学理论研究和在结构工程、机械工程中进行振动试验、计算和设计的众多同行的参考书。

在本书撰写过程中,张恭庆、胡海岩、刘人怀院士,曲广吉、应怀樵、邱吉宝、刘中生研究员,武际可、王敏中、郭懋正、苏先樾、陈璞、王泉、唐少强教授,博士研究生郑子君等都给作者提出了许多宝贵意见,作者在此对他们表示衷心的感谢。书中所引用的本书作者的许多研究工作曾得到国家自然科学基金的资助和支持,在此一并表示感谢。

作者热忱欢迎同行和读者对本书批评指正。

王大钧 王其申 何北昌

2014 年 9 月 10 日

目 录

第一章 结构力学中的定性理论概论	1
1.1 什么是结构力学中的定性理论	2
1.2 为什么要研究结构力学中的定性理论	3
1.3 结构振动的物理和数学模型	5
1.4 主要理论结果及其论证方法	13
1.5 杆的连续系统振动的定性性质要览	17
1.6 杆的离散系统振动的定性性质要览	20
1.7 梁的连续系统振动的定性性质要览	22
1.8 梁的离散系统振动的定性性质要览	25
1.9 膜振动的定性性质要览	28
1.10 重复性结构振动的定性性质要览	29
1.11 一般结构模态的三项定性性质要览	32
1.12 弹性力学和结构理论解的存在性等基础理论要览	33
1.13 振荡矩阵和振荡核及其特征对的性质要览	39
第二章 弦、杆的离散系统振动的定性性质	45
2.1 弦和杆的离散系统	45
2.2 弹簧-质点系统振动的基本定性性质	50
2.3 弹簧-质点系统位移振型的充分必要条件	53
2.4 强迫振动与固有频率的相间性	61
2.5 杆的差分离散系统模态的定性性质	64
2.6 杆的有限元离散系统模态的定性性质	66
2.7 无质量弹性杆-质点系统模态的定性性质	71
2.8 具有弹性基础的弦和杆的离散系统模态的定性性质	73

第三章 梁的离散系统振动的定性性质	75
3.1 梁的差分离散模型和相应的物理模型	75
3.2 静定、超静定梁的差分离散模型模态的定性性质	81
3.3 具有刚体运动形态的梁的差分离散系统模态的定性性质	84
3.4 任意支承梁的位移、转角、弯矩和剪力振型的变号数	87
3.5 单个振型满足的充分必要条件	95
3.6 位移振型的形状特征及其他性质	100
3.7 不同支承梁的固有频率的相间性	107
3.8 梁的其他离散系统模态的定性性质	115
3.9 任意支承多跨梁振动模态的定性性质	117
3.10 外伸梁离散系统模态的定性性质	127
第四章 Sturm-Liouville 系统振动的定性性质	137
4.1 Sturm-Liouville 系统的固有振动	137
4.2 Sturm-Liouville 系统的 Green 函数	140
4.3 Sturm-Liouville 系统振动的振荡性质	147
4.4 固有频率的进一步性质	152
4.5 杆振型的进一步性质	154
4.6 不同边界支承的杆固有频率的相间性	164
4.7 Sturm-Liouville 系统自由振动和强迫振动的定性性质	166
4.8 杆的高阶固有频率渐近公式	168
4.9 截面参数具有间断性时杆振动的定性性质	172
4.10 离散系统与连续系统的比较	174
第五章 梁的连续系统振动的定性性质	175
5.1 梁的运动微分方程	175
5.2 梁的 Green 函数	178
5.3 梁振动的振荡性质	184
5.4 梁的转角、弯矩和剪力振型的定性性质	194
5.5 给定模态数据确定梁	203

5.6	固定-自由梁和两端铰支梁振型的若干重要不等式	208
5.7	梁的固有频率的进一步性质	210
5.8	梁的自由振动和强迫振动的定性性质	216
5.9	梁的高阶固有频率和振型的渐近公式	217
5.10	外伸梁连续系统模态的定性性质	221
第六章	膜振动的定性性质	235
6.1	矩形膜模态的定性性质	237
6.2	圆膜模态的定性性质	242
6.3	膜模态的其他性质	247
第七章	重复性结构振动的定性性质	249
7.1	对称结构模态的定性性质	250
7.2	旋转周期结构模态的定性性质	260
7.3	线周期结构模态的定性性质	275
7.4	链式结构模态的定性性质	279
7.5	轴对称结构模态的定性性质	285
7.6	重复性结构强迫振动与静力平衡	290
7.7	重复性结构振动控制和形状控制的降维方法	291
第八章	一般结构模态的三项定性性质	303
8.1	结构参数改变对固有频率的影响	303
8.2	振型的节的一个共同性质	307
8.3	模态对结构参数改变的敏感性	308
第九章	弹性力学和结构理论解的存在性等基础理论	323
9.1	引言	323
9.2	结构理论中三类问题的变分解法	325
9.3	泛函极值解的存在性	333
9.4	弹性力学中静力平衡解和模态解的存在性	343
9.5	结构理论中静力平衡解和模态解的存在性	346

9.6 结构理论模型的合理性	354
9.7 Ritz 法在结构理论求解中的收敛性	371
附录 振荡矩阵和振荡核及其特征对的性质	379
A.1 若干符号和定义	379
A.2 有关子式的一些关系式	380
A.3 Jacobi 矩阵	382
A.4 振荡矩阵	389
A.5 Perron 定理和复合矩阵	395
A.6 振荡矩阵的特征值和特征矢量	397
A.7 具有对称核的积分方程, 振荡核	406
A.8 积分方程的 Perron 定理和复合核	408
A.9 具有对称振荡核的积分方程的特征值和特征函数	411
A.10 从振荡矩阵到振荡核	417
参考文献	419
索引	427

第一章 结构力学中的定性理论概论

结构力学含多类结构理论 (如 Euler 梁、Timoshenko 梁、薄板、中厚板、无矩壳、有矩壳、复合材料结构和组合结构等) 的多种力学问题 (如静力平衡、模态分析和动力响应等). 用解析、数值计算和实验方法得到这些问题的解的定量结果, 属于定量理论; 用解析、推理方法导出解的定性性质, 属于定性理论.

本书论述两类问题: 第一类是弹性结构线性振动的定性性质, 以模态 (含固有频率和振型) 的定性性质为主, 也涉及自由振动和强迫振动的定性性质; 第二类是弹性结构线性理论中静力平衡解、模态解、动力响应解的存在性, 结构理论模型的合理性, 以及 Ritz 法的收敛性等基础理论问题.

模态在振动理论与工程应用中扮演极为重要的角色, 起着基础性的作用. 主要表现在: (1) 当外力含有与结构的固有频率相同频率时引起结构共振, 此时结构振动的形状与振型相同或近似, 振动的强弱依赖于模态力的幅值, 即外力与振型的正交程度. 因此, 不论是避免和应用共振, 首先都要知道结构的固有频率和振型. (2) 结构在外力和初位移、初速度作用下的响应可以表达为振型的线性叠加, 用振型作广义坐标 (称为模态坐标), 将离散系统或连续系统解耦为有限或无限个单自由度系统. 于是复杂的响应问题迎刃而解. (3) 在许多工程问题中, 如结构的振动控制问题中, 传感器、致动器的设置都要以模态信息为依据. (4) 在结构动力设计中, 有时将结构具有某些频率和振型作为基本要求.

有两类关于模态的理论. 一类是定量分析的理论, 主要用解析、数值分析和实验的方法确定模态的量, 目前这类理论已经发展得相当完善, 但仍在不断精益求精; 另一类是定性理论, 主要是用数学演绎出模态的规律性、整体性的性质. 本书专注于研究弹性结构振动的模态以及响应的定性性质.

关于结构的静力平衡及模态求解问题, 对于稍为复杂的结构已难求得解析解, 只能求近似解. 于是解的存在性及其属性是什么, 应该是求解的前提. 结构理论模型应遵从哪些原则才是合理的, 才能保证解存在; Ritz 法在什么条件下才能保证近似解收敛. 这些基础性问题都属于本书关注的定性理论的范畴. 因不同类的结构理论的解的存在性的性质不同, 故本书采用“结构理论的解的存在

性”而不用“结构力学的解的存在性”作为命题。

由于部分读者对结构振动的定性理论比较生疏, 所以本章中 1.1 和 1.2 节特别论述什么是, 以及为什么要研究振动的定性性质和解的存在性等基础理论。

1.1 什么是结构力学中的定性理论

关于什么是结构力学的定性理论, 请看下面诸问题。

问题 1: 具有任意边条件的 Euler 梁, 在平面内运动, 其固有频率是否具有重频率?

答: 除两端自由的梁有两阶值为零的重固有频率外, 其他的梁的固有频率皆是单的, 没有重固有频率。

问题 2: 具有任意边条件的 Euler 梁, 其第 $i(i = 1, 2, \dots)$ 阶振型有几个节点? 相邻阶的振型的节点有何关系?

答: 第 i 阶振型有 $i - 1$ 个节点; 相邻阶振型的节点互相交错。

问题 3: 杆的连续系统有无穷阶模态 (固有频率及对应的振型), 其中有几阶“独立的”模态? 即有几阶模态给定后就可确定此系统, 其余模态皆由此衍生。

答: 杆的连续系统的“独立的”模态为两阶。

问题 4: 对于旋转周期结构的强迫振动问题, 能否将其分解为一些单个子结构的相应问题?

答: 可以分解为一些单个和两个子结构的相应问题。应用此性质可以大为减少计算或实验的工作量。

问题 5: 在一个周边固定的等厚度的圆板中央, 垂直连接一等截面直杆。若板采用薄板理论, 杆采用一维杆理论, 问这个结构的静力平衡解、模态解是否存在?

答: 广义解存在。这个组合结构是合理的。

问题 6: 如果问题 5 中的板采用 Mindlin 板理论, 此结构的静力解和模态解是否存在?

答: 不存在。这个组合结构是不合理的。

问题 7: 遵从无矩理论的壳上附着集中质量, 更简单地, 膜上附着集中质量, 或设置集中刚性或弹性支承, 这样的理论模型是合理的吗? 能求出振型吗?

答: 这样的结构理论模型是不合理的, 模态解不存在。

总之, 有关结构振动尤其是模态的全局性、规律性的性质, 静力平衡, 模态和动力响应解的存在性, 以及结构理论模型的合理性等皆属于定性理论。

1.2 为什么要研究结构力学中的定性理论

1.2.1 结构振动的定性性质的意义

结构振动的定性性质在振动理论和工程应用中都具有重要的意义。例如:

(1) 应用固有频率和振型的定性性质, 可辅助判断用计算或实验方法所得固有频率和振型的定量结果的正确性。如果定量结果不符合定性性质, 则肯定该结果是错误的。如符合定性性质, 则可能是正确的。例如, 数值计算出一个两端自由的梁的第四阶振型, 如图 1.1(a), 它有两个节点, 则可以判断它是错误的。因为根据定性性质, 第四阶振型应有 3 个节点。如果由实验测出此梁的第三阶振型形状如图 1.1(a), 则它在定性上是正确的, 当然还不能判断它在定量上的误差大小。又如, 由计算得到此梁的第三、四阶振型形状如图 1.1(b), 虽然这两个振型的节点数都正确, 但可以认定至少有一个振型误差过大, 以致违反了另一定性性质: 相邻阶的振型的节点交错。再如, 图 1.1(c) 所示的振型是错误的, 它在 r_1 和 r_2 处的形态不符合定性性质。因 r_1 处是振型函数的极点, 故位移 u 的值和曲率 u'' 的值应反号而不应同号; r_2 处是自由边界, 位移 u 的值与斜率 u' 的值应同号而不应反号。

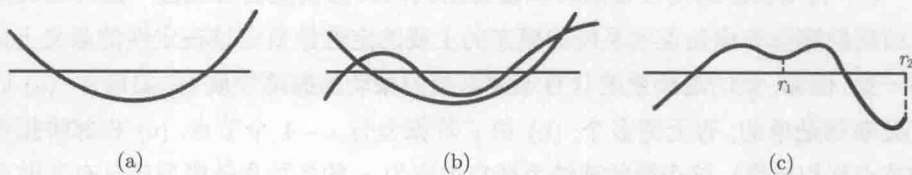


图 1.1 梁的振型检验图

(2) 对于对称结构和周期性结构, 模态的定性性质可用来简化模态的定量分析的计算和实验方案, 从而大大减少工作量。例如, 对于一个对称结构, 由于它的振型分为对称和反对称两组, 所以计算它的固有频率和振型时, 只要计算以对称面为边界的一半结构两次。至于其对称面上的边条件, 一次是使结构左右对称时的状态, 另一次是使结构左右反对称时的状态。再如, 如果对称结构的自由