

高等学校教学参考书

导电与导磁物质中的电磁场

简柏教 编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

导电与导磁物质中的电磁场

简柏敦 编

1979.10.1

人民教育出版社

高等学校教学参考书

导电与导磁物质中的电磁场

简柏敦 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京外文印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.625 字数 183,000

1981年11月第1版 1983年5月第1次印刷

印数 00,001 - 10,000

书号 15012·0377 定价 0.83 元

前 言

本书主要介绍有关导电和导磁物质中电磁场方面目前我国教科书和参考书中涉及较少的某些问题,供强电专业学生、研究生和工程技术人员参考。由于编者水平所限,选材不一定恰当,而且难免有错误,希读者批评指正。

本书初稿承浙江大学电工基础教研组副主任方正瑚副教授精心阅读,提出了很多宝贵意见。青年教师吕品同志在画图方面大力协助,在此谨致谢意。

简柏敦

一九八〇年八月于杭州

符 号 表*

a_1, a_2, a_3	曲面坐标单位矢量
b_m	分子磁场磁感应强度时间平均值
B_l	局部磁场磁感应强度
B_m	分子磁场磁感应强度
g	回磁比或轨道回转比率
g_i	光谱分裂因数
h	普朗克常数
$\hbar$	$\frac{h}{2\pi}$
h_1, h_2, h_3	标度因子
i^0, j^0, k^0	直角坐标沿 x, y, z 轴单位矢量
J	总角动量量子数
J	电流密度
k	波兹曼常数, 传播系数或波数
K	弹性系数, 单位体积内原子数, 电磁渗透系数
$\mathcal{L}$	电子轨道运动角动量
$\mathcal{L}_B$	沿外磁场方向的轨道角动量分量
$\mathcal{L}_J$	总角动量
$\mathcal{L}_s$	电子自旋角动量
$\mathcal{L}_{sB}$	沿外磁场方向的自旋角动量分量
m	电子轨道运动磁矩
m_l	轨道磁量子数
m_e	电子质量

m_0	玻尔磁子
m_s	自旋量子数
m_{sP}	自旋磁矩
M	磁化强度
M_m	原子总磁矩
n	主量子数
N	单位体积内电子数
N_s	单位体积内超导电子数
P_J	$-J, -(J-1), \dots, 0, \dots, (J-1), J$ 数列中某一数
q	电子所带的电量
T_0	铁磁居里温度
u	电子轨道运动速度
v_m	分子所占的体积
v_p	相速
v_s	能流速
w	能量密度
α	衰减系数
β	相位系数
γ	韦斯常数·阻尼系数
θ	顺磁居里温度
A	伦敦常数
Π	赫兹矢量
ρ	电荷密度
ρ_m	质量密度
ρ_s	面电阻系数
σ	电导系数

χ_m

磁化率

ω

电子轨道运动角速度

* 常见符号未列入

目 录

第一章 物质的磁化	1
§ 1-1 电子在原子结构中的运动和所产生的磁矩	1
§ 1-2 物质的反磁性	5
§ 1-3 物质的顺磁性	8
§ 1-4 铁磁物质的磁化	12
§ 1-5 反铁磁物质的磁化	17
§ 1-6 铁氧体的磁化	23
§ 1-7 超导体的磁性能	26
§ 1-8 物质内部的磁场	28
第二章 有铁磁媒质为界面的恒定磁场	35
§ 2-1 场函数在界面上的连续性	35
§ 2-2 直角坐标系中的矢量磁位泊松方程——傅利叶积分变换的 应用	38
§ 2-3 大型水轮发电机转子磁轭漏磁计算	44
§ 2-4 重傅氏级数法	48
§ 2-5 矩形槽内导体的漏感	52
§ 2-6 曲面坐标系中的矢量拉氏方程	53
§ 2-7 圆柱坐标系中的矢量拉氏方程和泊松方程	58
§ 2-8 被屏蔽的薄螺管线圈的磁场	64
§ 2-9 球面坐标系中的矢量拉氏方程	69
§ 2-10 环形电路磁场中的铁磁球体	71
§ 2-11 超导薄膜对球体内部的屏蔽作用	75
§ 2-12 变分法概述	81
§ 2-13 伽里金法则	85
§ 2-14 变分法的应用——有限元法简介	89
第三章 电磁渗透	97
§ 3-1 电磁渗透方程	97

§ 3-2	半无限导体在正弦变化磁场作用下的渗透现象	101
§ 3-3	电机槽内导体的涡流损耗和参数	106
§ 3-4	空心导体的涡流效应	115
§ 3-5	有限厚度的平面磁性导体内磁场的消失和建立过程	119
§ 3-6	直角坐标系中的两维场	121
§ 3-7	叠片铁芯的涡流损耗	124
§ 3-8	圆柱坐标系中的渗透方程	129
§ 3-9	磁场在棒形导体中的消失过程	131
§ 3-10	管状导体内的稳态场	133
§ 3-11	铁磁球体内部电磁场的消失过程	138
第四章	线性媒质中的电磁波	144
§ 4-1	平面电磁波	144
§ 4-2	平面电磁波的极化	148
§ 4-3	色散和色散媒质	149
§ 4-4	高频电磁波的透入深度	156
§ 4-5	赫兹矢量	160
§ 4-6	曲面坐标系中的赫兹矢量波动方程	164
§ 4-7	圆柱坐标系中的赫兹矢量波动方程	166
§ 4-8	球面坐标系中的赫兹矢量波动方程	169
§ 4-9	非磁性金属薄管的屏蔽作用	173
§ 4-10	理想导体的散射	181
§ 4-11	电磁波在各向异性媒质中的传播	187
第五章	电磁场的非线性问题	192
§ 5-1	电磁场的非线性问题	192
§ 5-2	阶跃函数法	192
§ 5-3	铁磁圆柱的涡流损耗与有效电阻	196
§ 5-4	磁化曲线的指数函数式	199
§ 5-5	磁滞效应	203
§ 5-6	差分法	205
§ 5-7	有限元法在求解非线性磁场问题中的应用	212
§ 5-8	半无限导体在电磁场中的温度分布	216

§5-9 温度对电磁渗透的影响.....	221
§5-10 温度效应对导体薄管的电磁渗透影响	224
附录	228
(I) 矢量运算公式.....	228
(II) 误差函数公式.....	230
(III) 贝塞尔函数公式.....	231
(IV) 勒让德多项式公式.....	233

第一章 物质的磁化

§ 1-1 电子在原子结构中的运动和所产生的磁矩

一切物质的磁化现象都是由于原子结构中的带电质点的运动所造成的。由于原子核的质子质量很大,它虽有磁矩,但和电子运动所产生的磁矩相比是可忽略的,这是因为磁矩和带电质点的质量成反比的缘故(见(1-4)式)。所以在研究物质的磁化时,主要是研究原子内由电子运动而产生的磁效应。电子运动形式有两种,一是电子围绕原子核的轨道运动,一是电子的自旋。以下将介绍这两种运动和这两种运动所产生的磁矩。

在电子轨道运动中,带有电量为 q 的电子,以速度 u 围绕原子核运动。先假定轨道是半径为 r 的圆,这样,运动的电子就形成电流

$$i = q \frac{u}{2\pi r}$$

以后称它为分子电流。它的磁矩为

$$\mathbf{m} = -i\pi r^2 \mathbf{n} = -\frac{q}{2} r^2 \boldsymbol{\omega} \quad (1-1)$$

$\mathbf{n}$ 为轨道平面的单位法线矢量,它和 $\mathbf{u}$ 的方向服从右手螺旋定则。 $\boldsymbol{\omega}$ 为电子轨道运动的角速度。由于电子运动的方向是和惯用的电流的正方向相反,所以(1-1)式中出现负号。设 m_e 为电子质量,其角动量 $\mathcal{L}$ 将为

$$\mathcal{L} = \mathbf{r} \times m_e \mathbf{u} = m_e r^2 \boldsymbol{\omega} \quad (1-2)$$

从(1-1)式和(1-2)式可以看出电子的磁矩和它的角动量之间有一定的比值,这一比值称为回磁比或轨道回转比率,以 g 表示

$$g = \frac{m}{\mathcal{L}} = -\frac{q}{2m_e} \quad (1-3)$$

量子力学证明，电子的角动量只能是 $\frac{h}{2\pi} = \hbar$ 的整数倍数， h 称为普朗克常数，于是 $\mathcal{L}$ 可表为

$$\mathcal{L} = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

n 称为玻尔轨道数。对于第一玻尔轨道上的电子即 $n=1$ ，从(1-3)式得

$$\mathbf{m} = -\frac{q}{2m_e} \hbar \mathbf{n} \quad (1-4)$$

(1-4)式所表达的磁矩是一个电子在第一玻尔轨道上运动所产生的，它被用作磁矩的自然单位，称为玻尔磁子或简称磁子，其值为 9.27×10^{-24} 安-平方米，本书中将用符号 $\mathbf{m}_0$ 表示

$$\mathbf{m}_0 = -\frac{q}{2m_e} \hbar \mathbf{n} \quad (1-4a)$$

但是电子运动轨道并不是圆形而是椭圆，情况就复杂多了。此时不仅电子与原子核间的相对角位置在改变，而且它们间的距离也在改变，角动量就需要两个量子数来表示。我们已有一个玻尔轨道数 n ，通常又称为主量子数，它表示电子在轨道上的能量状态，只和椭圆的长轴有关，其值可为 1、2、3 等正整数，与其相对应的主电子层为 K 、 L 、 M 等。此外再用一个量子数 l 表示电子的轨道角动量，它只和椭圆的短轴有关，通常称为角量子数。它将主电子层再分成 l 个能量稍有差异的次电子层 s 、 p 、 d 、 f 等等，分别对应于 l 等于 0、1、2、3 等数值。如果将 l 看成一个矢量 $\mathbf{l}$ ，它的方向按照右手螺旋法则垂直于轨道所包围的平面，根据量子力学的论证，角量子数 l 与轨道角动量有如下的关系：

$$\mathcal{L} = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad (1-5)$$

在有外磁场作用的情况下，沿着外磁场方向的角动量的分量允许值 $\mathcal{L}_B$ 与轨道磁量子数 m_l 有下列关系存在：

$$\mathcal{L}_B = m_l \hbar \quad (1-6)$$

m_l 可以等于 $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ ，共有 $(2l+1)$ 个可能的数值，这表明矢径 $\sqrt{l(l+1)}$ 在外磁场 B 方向的投影是一个整数，如图 1-1 所示，图中 l 的值为 2。

(1-3) 式的关系虽然是用经典理论推出的，但同样与量子力学的论证结果相符。因此轨道磁矩沿着外磁场方向的分量允许值，可写成为

$$-m_l \frac{q}{2m_q} \hbar$$

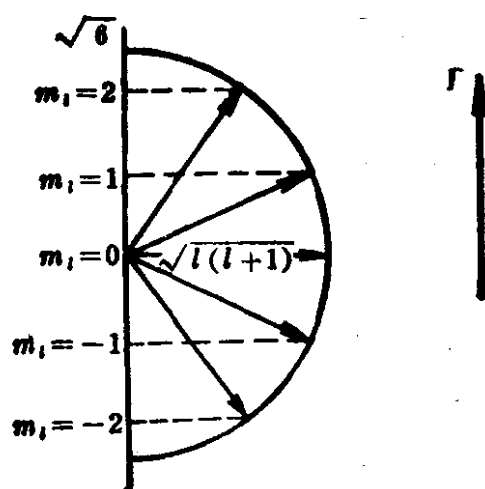


图 1-1

电子除轨道运动以外，还有自旋，在外磁场作用下，自旋的电子将受到力的作用，使自旋角动量与外磁场平行，方向可以和外磁场一致，也可以相反。沿着外磁场方向的自旋角动量 $\mathcal{L}_B$ 的允许值为 $\pm \frac{\hbar}{2}$ ，它与自旋量子数 m_s 的关系为

$$\mathcal{L}_B = m_s \hbar$$

故有

$$m_s = \pm \frac{1}{2} \quad (1-7)$$

(1-3) 式所表达的轨道角动量与磁矩的关系不适用于自旋运动。在自旋运动中自旋磁矩 m_{sP} 与自旋角动量之比为

$$-2.0023 \frac{q}{2m_q}$$

因此自旋磁矩

$$m_{sP} = -2.0023 \frac{q}{2m_q} \left(\pm \frac{1}{2} \hbar \right) \approx \mp \frac{q}{2m_q} \hbar \quad (1-8)$$

可知电子自旋磁矩在外磁场作用下近似地为一个玻尔磁子，其方向可以与外磁场 $\mathbf{B}$ 同向，也可以与它反向。

一个原子是由很多电子所构成，原子的轨道角动量将是诸电子轨道角动量之和，即

$$\sum \mathcal{L}_B = \sum m_l \hbar = L\hbar$$

同样地，原子自旋角动量将为

$$\sum \mathcal{L}_{sB} = \sum m_s \hbar = S\hbar$$

设

$$J = \sum |m_l + m_s|$$

一个原子的总角动量 $\mathcal{L}_J$ 对应于(1-5)式可写成

$$\mathcal{L}_J = \sqrt{J(J+1)} \hbar \quad (1-9)$$

总角动量的方向是与外磁场成一定的角度的。从图 1-1 可以看出沿外磁场方向的总角动量应为 $\hbar$ 乘以下列数值

$$-J, -(J-1), \dots, 0, \dots, (J-1), J$$

中之一，此值以 P_J 表示。如果将一个原子的轨道磁矩和自旋磁矩相加即得原子的总磁矩

$$\mathbf{M}_m = -g_J \frac{q}{2m_q} \mathcal{L}_J = -g_J \sqrt{J(J+1)} m_q \quad (1-10)$$

g_J 称为光谱分裂因数⁽¹⁾，它与 J 、 L 、 S 的关系如下⁽²⁾：

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (1-11)$$

即一个原子具有 $g_J \sqrt{J(J+1)}$ 玻尔磁子的磁矩。沿外磁场方向的磁矩分量为

$$m_B = -g_J P_J m_q \quad (1-12)$$

可以看出若轨道角动量可以忽略(如铁磁物质)，则 $L=0$ ， $J=S$ ，

$\frac{1}{2}$, $g_J = 2$ 。若自旋角动量相互抵消 (如反磁物质), 则 $S = 0$, $J = L$, $g_J = 1$ 。一般原子的光谱分裂因数在 1 与 2 之间。

对于晶体结构的物质来说, 电子自旋磁矩是主要的。铁磁物质就是一例。电子轨道运动的磁矩可以认为是零, 这是由于晶体的对称性所致。原子在晶体内受到晶格的限制, 一个原子内的电子受到其它原子的电场所束缚, 电子沿轨道的转动受到很大的限制, 所以在外磁场作用下, 较强的晶格限制作用, 阻碍了轨道的转向, 而自旋轴的转动就容易得多, 在量子力学中称这种现象为轨道磁矩猝灭。

原子是原子核和很多的电子所组成。一个原子的磁矩将是各电子磁矩之和。这里可能出现两种情况: 一种是各个电子的自旋磁矩相互抵消, 总磁矩为零; 另一种情况是自旋磁矩不完全抵消, 有实存磁矩。正是这两种情况决定了物质是反磁性物质还是顺磁性物质 (也包括铁磁性、反铁磁性和铁氧体磁性)。

§ 1-2 物质的反磁性

如前所述, 反磁性物质在没有外磁场作用下, 原子的自旋总磁矩为零, 但在恒定的外磁场 $\mathbf{B}$ 作用下, 自旋总磁矩将为略小于零的负值。

可以设想一个电子在半径为 r 的圆形轨道上作匀速运动, 其速度为 $\mathbf{u}$, 方向是顺钟向。 $\mathbf{B}$ 为外部恒定磁场, 与轨道平面垂直, 指向观察者。由于外磁场 $\mathbf{B}$ 的存在, 电子除受原子核的吸力 $\left(-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{r}^0\right)$ 和离心力 $\frac{m_e u^2}{r}\mathbf{r}^0$ 以外, 还有径向洛伦兹力 $q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$, 根据力的平衡条件得

$$-\frac{m_e u^2}{r}\mathbf{r}^0 + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{r}^0 + q\mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0 \quad (1-13)$$

由于 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{B}$ 垂直并考虑到 $u = \omega r$, 上式可写成标量形式

$$-\frac{u^2}{r} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_q r^2} = -q \frac{u B}{m_q}$$

或
$$\left(1 - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \omega^2 m_q r^2}\right) \omega = \frac{q}{m_q} B \quad (1-14)$$

ω 和 B 的方向是一致的。设 ω_0 和 r_0 分别为外磁场为零时的角速度和半径, 则

$$\omega_0^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_q r_0^2} \quad (1-15)$$

由于电子轨道半径为 10^{-10} 米的数量级, m_q 为 9.0155×10^{-31} 公斤, $q = 1.602 \times 10^{-19}$ 库仑, $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ 法/米。可得

$$\omega_0 \approx 10^{16} \text{ 弧度/秒}$$

假定(1-14)式右方的 B 为 10^6 高斯, 则

$$\frac{q}{m_q} B \approx \frac{1.6 \times 10^{-19}}{9 \times 10^{-31}} \times 100 \approx 10^{13}$$

所以(1-14)式的右方比 ω_0 小 1000 倍, 而 ω_0 本身又是一个很大的数, 因此满足(1-14)式的 ω 比 ω_0 大出很少, 设

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega$$

$$r \approx r_0$$

利用(1-15)式关系, (1-14)式可写成

$$\begin{aligned} \frac{q}{m_q} B &= \left[1 - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2 m_q (\omega_0 + \Delta\omega)^2} \right] (\omega_0 + \Delta\omega) \\ &= \left[1 - \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^{-2} \right] (\omega_0 + \Delta\omega) \end{aligned}$$

略去 $\Delta\omega$ 的高次方得

$$\frac{q}{m_q} B = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} (\omega_0 + \Delta\omega) \approx 2\Delta\omega$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{q}{2m_q} B$$

式中 $\frac{q}{2m_q}B$ 称为拉摩角频，它表示外磁场 B 所引起的电子角速度的增量，方向与 B 的方向相同，而与电子转向无关。从(1-2)式可得角动量的增量

$$\Delta \mathcal{L} = \mathbf{r} \times m_q (\Delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m_q r^2 \Delta \boldsymbol{\omega}$$

从(1-1)式得磁矩增量

$$\Delta \mathbf{m} = -\frac{q}{2} r^2 \Delta \boldsymbol{\omega} = -\frac{q^2 r^2}{4m_q} \mathbf{B} \quad (1-16)$$

以上的讨论是基于电子轨道平面与外磁场垂直这样一个假定，但一般说来电子轨道平面与 $\mathbf{B}$ 成一角度 θ ，如图 1-2 所示。则 (1-13) 式中的 r 将是轨道半径 R 在垂直于外磁场平面上的投影， r^2 应为轨道平面与 $\mathbf{B}$ 成一切可能的角度时的 r^2 的平均值，即

$$\begin{aligned} r^2 &= [(R \sin \theta)^2]_{av} = R^2 \frac{1}{A} \int_0^\pi \sin^2 \theta dA \\ &= R^2 \frac{1}{4\pi R^2} \int_0^\pi \sin^2 \theta (2\pi R \sin \theta) R d\theta \\ &= \frac{2}{3} R^2 \end{aligned}$$

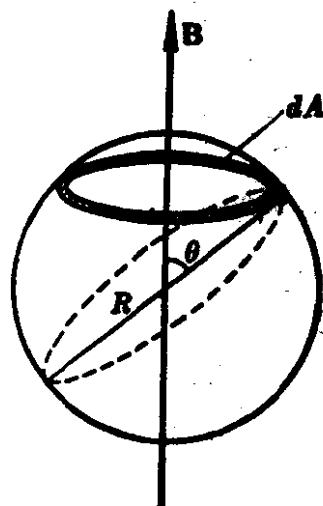


图 1-2

A 为球面面积， dA 为环形元面积，代入(1-16)式得

$$\Delta \mathbf{m} = -\frac{R^2}{6} q^2 \frac{\mathbf{B}}{m_q}$$

设 N 为原子中的电子数， R_n 为第 n 个轨道的半径，则

$$\Delta \mathbf{m} = -\frac{q^2}{6m_q} \mathbf{B} \sum_N R_n^2$$

如果单位体积内有 K 个原子，则磁化强度

$$\mathbf{M} = -\frac{Kq^2}{6m_q} \mathbf{B} \sum_N R_n^2 = -NK \frac{q^2}{6m_q} \mathbf{B} (R^2)_{av} \quad (1-17)$$