



海洋工程非线性动力学 理论与方法

唐友刚 刘利琴 张素侠 著



科学出版社

第 1 章 绪 论

1.1 研究海洋工程结构非线性动力学的工程意义

振动是自然界广泛存在的自然现象。航行或定位于海洋中的船舶与海洋工程结构物遭受风、浪、流等复杂载荷的作用，时刻处于运动之中。振动可以分为线性振动与非线性振动两大类。线性振动是指该振动系统中的惯性力、阻尼力、恢复力是位移、速度和加速度的线性函数，而且干扰力是简谐的。线性振动可以表述为^[1]

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (1-1)$$

其中， m 为振动质量； c 为阻尼系数； k 为刚度系数； x 为振动位移； \dot{x} 为振动速度； \ddot{x} 为振动加速度； $f(t)$ 为周期干扰力。由于式(1-1)中的阻尼力、弹性恢复力都是线性函数，所以式(1-1)为二阶非齐次线性微分方程，这样的系统称为线性振动系统^[1]。船舶在规则横浪作用下的小幅摇摆运动，可以由式(1-1)表示。如果阻尼力和弹性力二者之一或者二者都是位移和速度的非线性函数，则该系统是非线性的，该系统的振动方程为非线性微分方程，非线性微分方程表示的系统为非线性振动系统^[2]。

$$m\ddot{x} + f(\dot{x}) + f(x) = f(t) \quad (1-2)$$

其中，非线性阻尼力 $f(\dot{x})$ 是速度的非线性函数；非线性恢复力 $f(x)$ 是位移的非线性函数；干扰力 $f(t)$ 是随时间周期变化的函数。这类系统的非线性振动是由结构系统自身的非线性因素引起的。

在海洋工程结构振动时，小尺度构件的波浪干扰力按照莫里森(Morison)公式计算^[3-5]，干扰力 $f(t)$ 包括两部分：拖曳力和惯性力。拖曳力是速度的平方函数，因此，对于海洋工程结构，即使结构系统本身是线性的，由于遭受非线性干扰力的作用，其振动也属于非线性振动。这类系统的非线性振动是由外载荷的非线性因素引起的。

海洋工程结构存在非线性振动，导致海洋结构出现复杂的非线性动力学行为，研究海洋工程结构非线性动力学行为的分析方法及动力学行为特征构成了海洋工程非线性动力学的主要任务和内容。研究内容主要包括：海洋工程结构发生周期振动的规律(振幅、频率、相位的变化规律)，周期解的稳定条件，揭示复杂非线性动力学响应出现的参数域，由此预测和确定海洋结构发生大幅振动的外在和内在因素，确定海洋工程结构非线性有害振动发生的机理和条件，发现极端海况下

结构振动响应的特点,并为减小有害振动、实施振动参数优化提供依据。通过海洋工程非线性动力学行为的研究,掌握其复杂振动的特点和影响因素,修改和调整这些因素或者条件,使结构大幅运动得到减小或者控制,为确保结构系统的安全提供理论技术支持。

1.2 海洋工程结构中的非线性振动问题

1.2.1 含刚度非线性的非线性振动系统

1. 船舶在规则波浪中横摇

船舶在规则横浪中发生横摇运动。横摇运动方程为^[6]

$$I_{\phi} \ddot{\phi} + R(\dot{\phi}, t) + K(\phi, t) = M(\Omega, t) \quad (1-3)$$

在小角度横摇(横摇角不大于 10°)情况下,横摇运动方程是线性的,即有

$$R(\dot{\phi}, t) = c\dot{\phi}$$

$$K(\phi, t) = k\phi$$

其中, I_{ϕ} 、 c 、 k 分别为横摇转动惯量、阻尼力矩系数和恢复刚度系数, $k = \overline{GM}\Delta$, \overline{GM} 为横摇初稳性高, Δ 为排水量; $\ddot{\phi}$ 、 $\dot{\phi}$ 、 ϕ 分别为横摇角加速度、横摇角速度和横摇角; $M(\Omega, t)$ 为横摇干扰力矩。

在横摇角大于 10° 时,船舶横摇进入大角横摇。船舶阻尼力是横摇角速度 $\dot{\phi}$ 的非线性函数,同时,横摇恢复力矩也是横摇角的非线性函数。非线性阻尼力矩表示为

$$R(\dot{\phi}, t) = B_1\dot{\phi} + B_3\dot{\phi}^3 \quad (1-4)$$

恢复力矩根据如图 1-1 所示的静稳性曲线拟合得到^[7],图 1-1 乘以排水量即为恢复力矩。

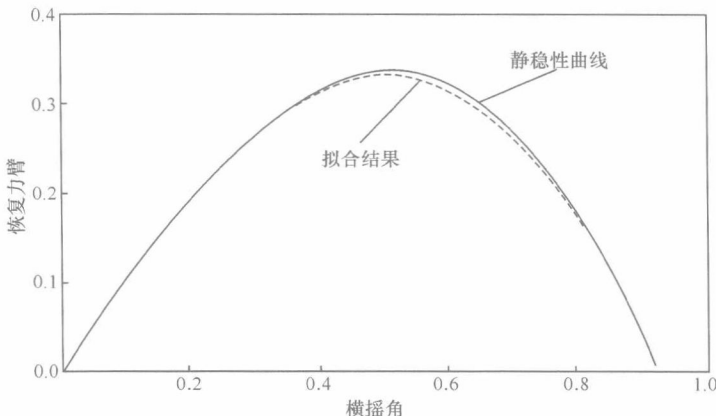


图 1-1 静稳性曲线及拟合结果

将图 1-1 所示曲线乘以排水量进行拟合, 得到恢复力矩的表达式为

$$K(\phi, t) = k_1\phi + k_3\phi^3 + k_5\phi^5 + \dots \quad (1-5)$$

考虑规则波, 则波浪干扰力矩可以写为简谐形式, 即

$$M(\Omega, t) = M_0 \cos \Omega t \quad (1-6)$$

其中, M_0 为波浪干扰力矩的幅值; Ω 为波浪力矩的圆频率(rad/s)。将式(1-4)~式(1-6)代入式(1-3), 得到船舶的如下非线性横摇运动方程^[6]:

$$I_\phi \ddot{\phi} + B_1 \dot{\phi} + B_3 \dot{\phi}^3 + k_1\phi + k_3\phi^3 + k_5\phi^5 = M_0 \cos \Omega t \quad (1-7)$$

式(1-7)为研究船舶和浮体在横浪上大幅运动和倾覆机理的非线性模型, 其包括了阻尼非线性和恢复力非线性。

2. 多点系泊系统

为了有效限制浮体在海上的 6 个自由度运动, 采用多条缆绳将浮体的不同位置与海底连接, 形成多点系泊系统, 如图 1-2 所示。

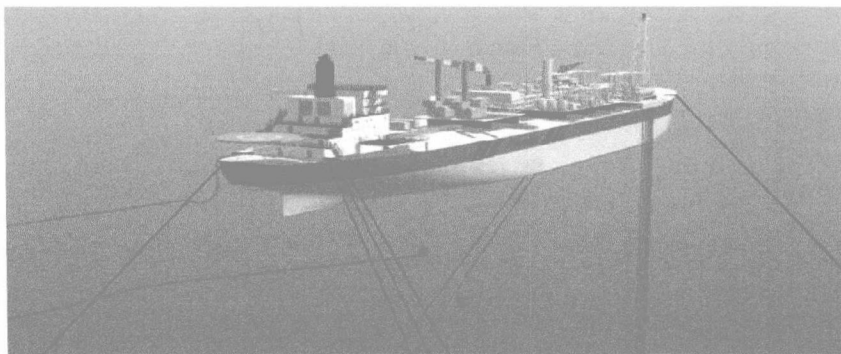
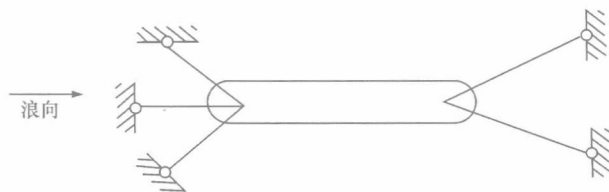


图 1-2 多点系泊船

该系泊方式可以减小船舶的摇摆运动。在迎浪或顺浪状态下, 主要表现为纵荡运动。将多点系泊船简化为图 1-3 所示的分析模型^[3]。



(a) 多点系泊模型

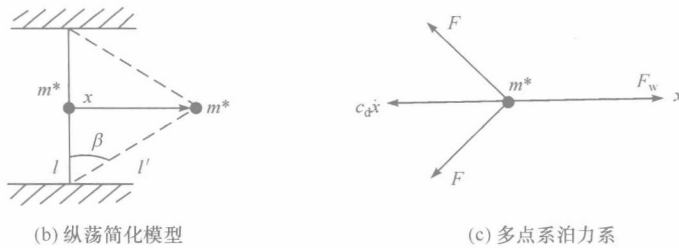


图 1-3 多点系泊船分析模型

假定波浪方向与船体长度方向一致，则简化模型纵荡运动力的平衡方程为

$$m\ddot{x} + c_d\dot{x} + 2F_H(x, t) = F_w(t) \quad (1-8)$$

其中， x 及其导数 \dot{x} 、 \ddot{x} 分别为船舶纵向运动的位移、速度和加速度； m 为包括附连水在内的船舶质量； c_d 为流体阻尼系数； $F_H(x, t)$ 为单根系泊缆索张力在水平方向的分力； F_w 为波浪力沿纵向的分量。若缆索断面面积为 A ，材料的弹性模量为 E ，初张力为 R_0 ，则有

$$F_H = F \sin \beta = \frac{x}{l'} \left(R_0 + AE \frac{l' - l}{l} \right)$$

单根缆索伸长后的长度 $l' = l\sqrt{1 + (x/l)^2}$ ，于是有

$$F_H = R_0 \left(\frac{x}{l} \right) + \frac{AE}{2l^3} x^3 \quad (1-9)$$

考虑两根缆索同时起作用，将式(1-9)代入式(1-8)，则可得到多点系泊系统的纵向运动方程为

$$m\ddot{x} + c_d\dot{x} + \frac{2R_0}{l}x + \frac{AE}{l^3}x^3 = F_w(t) \quad (1-10)$$

式(1-10)包含 x^3 ，所以方程是非线性的，其为系泊船非线性纵荡运动方程。具有三次非线性的方程称为达芬(Duffing)方程，一般形式为^[2,8]

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_1x + k_3x^3 = F_w(t) \quad (1-11)$$

k_1 为线性恢复力刚度项系数； k_3 为非线性恢复力刚度项系数。式(1-11)为一类重要的非线性方程的形式。

1.2.2 含分段线性非线性恢复力的振动系统

分段线性非线性恢复力是指振动位移在不同阶段，恢复刚度和恢复力的大小具有不同的表达式，即将一个运动周期按照恢复力表达式的不同分为几个线性区段，这种系统称为分段线性非线性振动系统^[2]。

在海洋油气资源开发生产系统中,采用单点系泊实施储油轮的定位,如图 1-4 所示。

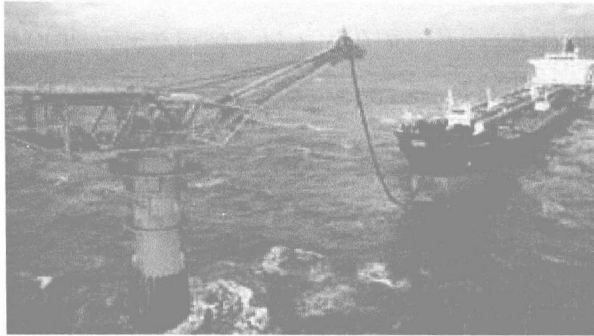


图 1-4 铰接塔-油轮系统(单点系泊)

图 1-4 中,铰接塔通过万向接头与海底连接,油轮通过缆绳连接铰接塔的刚臂。铰接塔和油轮在风浪作用下耦合运动。当油轮纵荡时,塔柱沿油轮纵荡方向做摇摆运动^[9]。

塔柱结构包括水面附近的浮力舱和调整重心的压载舱。①当塔柱向船体运动时,系泊索松弛,恢复力只有水面附近浮力舱提供的浮力矩;②当塔柱离开油轮运动时,缆绳拉紧,恢复力包括浮力影响和缆绳张紧力。在塔柱运动的一个周期内,恢复力的表达式是分为几个线性区段的。考虑到油轮的质量远大于塔柱和大缆的质量,可以假定油轮不动,研究塔柱的摇摆规律和大缆张力。动力自由度为铰接塔的摆角 θ ,用弹簧表示系缆产生的恢复刚度,得到的分析模型如图 1-5 和图 1-6^[10,11]所示。

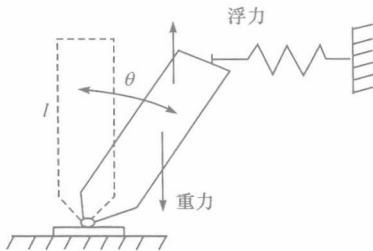


图 1-5 铰接塔-油轮简化模型图

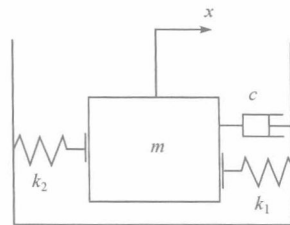


图 1-6 铰接塔-油轮等效动力学模型

考虑系泊塔柱朝两个不同的方向运动时,恢复刚度不同,铰接塔体系在运动过程中,对应两个不同的恢复刚度表达式,即恢复刚度为分段线性非光滑的。考虑系统的结构阻尼和流体平方阻尼,阻尼特性由线性阻尼加平方阻尼项表示。铰

接塔-油轮体系的等效动力学模型如图 1-5 所示。图 1-6 所示动力学模型的运动控制方程为^[11]

$$I_{\theta}\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + d(\dot{\theta}) + g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{F}_n \cos n\Omega\tau + \hat{G}_n \sin n\Omega\tau) \quad (1-12)$$

其中

$$d(\dot{\theta}) = \begin{cases} D\dot{\theta}^2, & \dot{\theta} < 0 \\ -D\dot{\theta}^2, & \dot{\theta} > 0 \end{cases} \quad (1-13)$$

$$g(\theta) = \begin{cases} k_1\theta, & \theta < 0 \\ k_2\theta, & \theta > 0 \end{cases} \quad (1-14)$$

式(1-12)~式(1-14)中, θ 为铰接塔角位移; $\dot{\theta}$ 和 $\ddot{\theta}$ 分别为 θ 对时间的一阶和二阶导数; I_{θ} 为铰接塔的转动惯量; C 为阻尼线性项系数; $d(\dot{\theta})$ 为非线性阻尼表达式; $\sum_{n=0}^{\infty} (\hat{F}_n \cos n\Omega\tau + \hat{G}_n \sin n\Omega\tau)$ 为载荷激励; $g(\theta)$ 为分段线性恢复刚度函数。当塔柱离开平衡位置向左摆动时, 恢复刚度系数为 k_1 , 向右摆动时, 恢复刚度系数为 k_2 。

1.2.3 参数激励振动系统

一般振动方程中的阻尼系数和恢复力系数是常数, 与时间无关, 即为常系数振动微分方程。但是在工程实际中, 某些振动微分方程的恢复力系数与振动时间有关, 这在数学上称为时变系数微分方程, 方程中出现与时间有关的系数, 等于施加了附加激励, 这称为参数激励。由此引起的振动, 称为参数激励振动。对于参数激励系统而言, 当外激励为系统固有频率的 2 倍时, 会激起振幅很大的动力响应, 这称为主参数共振^[1,2]。

1. 船舶参数激励横摇

1998 年, 一条巴拿马型 C11 集装箱 APL CHINA 号在北太平洋海域顶浪航行时, 出现了剧烈的横摇运动, 横摇角一度达到 40° , 船上集装箱损坏、丢失严重, 如图 1-7 所示。这是参数激励引起的船舶大幅横摇^[12]。

研究船舶参数横摇运动是目前船舶与海洋工程领域的重要课题。船舶在纵浪中航行时, 排水量和横稳心的位置是时变的, 这导致横摇恢复力矩是横摇、波面升高及时间的函数^[9]:

$$K(\phi, t) = \Delta \cdot \overline{GZ}(\phi, \eta, t) \quad (1-15)$$

其中, η 为波面升高; Δ 为排水量; $\overline{GZ}(\phi, \eta, t)$ 为船舶横摇恢复力臂。

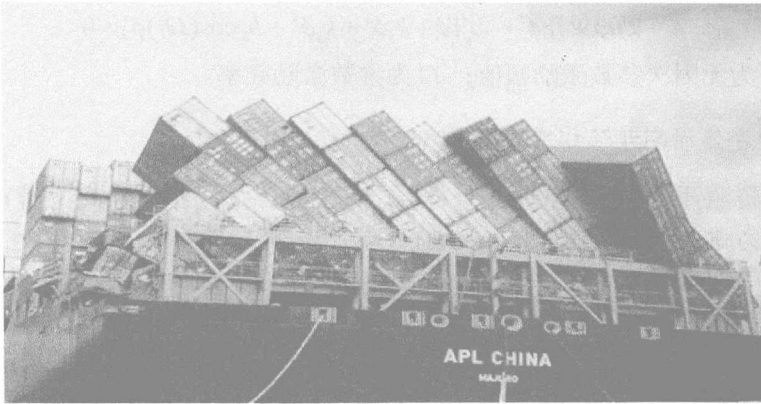


图 1-7 参数激励横摇引起集装箱倾倒

研究表明,在纵浪中航行时,波浪使船体的初稳性高随时间波动,对高次恢复力矩系数影响较小。恢复力臂可用以下形式表示^[9]:

$$\overline{GZ} = [\overline{GM} + gm(t)]\phi + K_3\phi^3 + K_5\phi^5 \quad (1-16)$$

其中, $gm(t)$ 表示波浪对初稳性高的影响,是时变的初稳性高的波动项,为微分方程的时变系数,即参数激励项; \overline{GM} 是静水中船体的初稳性高; K_3 和 K_5 分别为三次和五次非线性恢复力矩系数,它们可由静稳性曲线拟合得到。这个模型反映纵浪中的初稳性高是由静水中的初稳性高和波浪引起的初稳性高波动项组成的。

将式(1-16)代入式(1-15),然后代入横摇运动方程(1-3),得到^[9]

$$I_\phi \ddot{\phi} + B_1 \dot{\phi} + B_3 \phi^3 + \Delta \left\{ [\overline{GM} + gm(t)]\phi + K_3\phi^3 + K_5\phi^5 \right\} = 0 \quad (1-17)$$

令

$$2\hat{\mu} = \frac{B_1}{I_\phi + \delta I_\phi}, \quad \hat{\mu}_3 = \frac{B_3}{I_\phi + \delta I_\phi}, \quad \omega_\phi = \sqrt{\frac{\Delta \cdot \overline{GM}}{I_\phi + \delta I_\phi}}$$

$$k_3 = \frac{\Delta \cdot K_3}{(I_\phi + \delta I_\phi)\omega_\phi^2}, \quad k_5 = \frac{\Delta \cdot K_5}{(I_\phi + \delta I_\phi)\omega_\phi^2}, \quad h(t) = \frac{\Delta \cdot gm(t)}{(I_\phi + \delta I_\phi)\omega_\phi^2}$$

ω_ϕ 为船舶横摇固有频率,则式(1-17)写为

$$\ddot{\phi} + 2\hat{\mu}\dot{\phi} + \hat{\mu}_3\phi^3 + \omega_\phi^2[\phi + k_3\phi^3 + k_5\phi^5 + h(t)\phi] = 0$$

在规则纵浪中,参数激励项按简谐规律变化,即

$$h(t) = h_0 \cos \Omega t$$

则规则纵浪中的船舶参数激励非线性横摇方程为^[7,9]

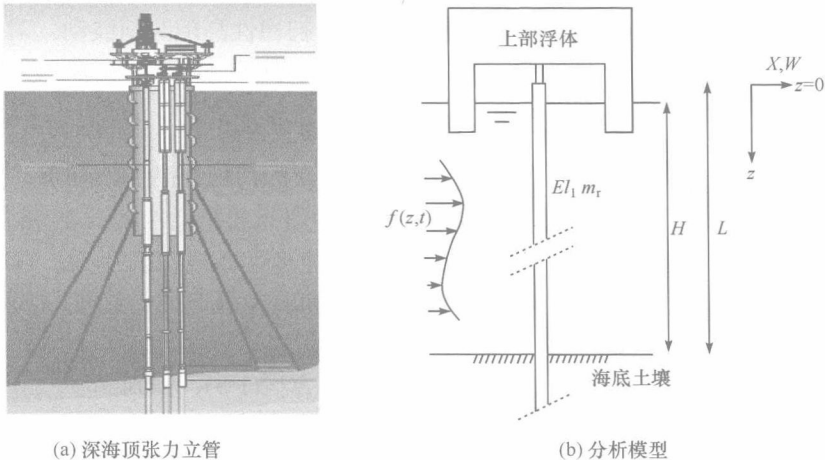
$$\ddot{\phi} + 2\hat{\mu}\dot{\phi} + \hat{\mu}_3\phi^3 + \omega_\phi^2[\phi + k_3\phi^3 + k_5\phi^5 + h_0 \cos(\Omega t)\phi] = 0 \quad (1-18)$$

其中, h_0 为无因次参数激励幅值; Ω 为参数激励频率。

2. 受浮体周期升沉作用的深海立管

海洋资源开发中采用大量细长杆件, 如立管(钻井立管和生产立管), 张力腿平台的张力腿、系泊缆索等均属于细长杆件。这类杆件的顶端与浮体连接, 当浮体在波浪中做升沉运动时, 杆件的顶端受到浮体的升沉影响, 一般将升沉运动简化为作用于杆件顶端的周期力, 该周期力引起杆件的横向振动, 此即为海洋细长杆件的参数激励振动^[13]。

深海顶张力立管(top tension riser, TTR)是连接采油甲板井口与海底的通道, 其作用是将油气输送到甲板。深海顶张力立管如图 1-8(a)所示, 图 1-8(b)为分析模型^[13]。



(a) 深海顶张力立管

(b) 分析模型

图 1-8 深海顶张力立管及其分析模型

深海顶张力立管的参数激励振动方程为^[13]

$$EI \frac{\partial^4 w(z,t)}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left[T(z,t) \frac{\partial w(z,t)}{\partial z} \right] + (m_r + m_f + m_a) \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2} = 0 \quad (1-19)$$

其中, EI 为立管的抗弯刚度($\text{N} \cdot \text{m}^2$); $T(z,t)$ 为立管的有效张力(N); $m_r = \frac{1}{4} \rho_s \pi (D_o^2 - D_i^2)$ 为单位长度立管质量(kg/m), ρ_s 为立管材料密度(kg/m^3), D_o 为立管的外径(m), D_i 为立管的内径(m); $m_f = \frac{1}{4} \rho_f \pi D_i^2$ 为单位长度内部流体质量(kg/m), ρ_f 为立管内部流体密度(kg/m^3); $m_a = \frac{1}{4} C_a \rho_w \pi D_o^2$ 为单位长度附加质量

(kg/m), C_a 为附加质量系数, ρ_w 为海水密度(kg/m³)。

考虑立管顶端浮体的升沉运动, 立管的有效轴力 $T(z, t)$ 是时间和水深的函数^[13]:

$$T(z, t) = A_s g (\rho_s - \rho_w) (f_{\text{top}} L - z) + ka \cos \Omega t \quad (1-20)$$

其中, A_s 是立管截面面积; f_{top} 立管顶张力系数(实际工程一般取为 1.3); k 是张紧器等效弹簧刚度 $k = LW_a / a_c$, L 是立管的长度, W_a 是立管单位长度的湿重, a_c 是与立管张紧系统效率有关的常数, 工程中 $a_c = 10\text{m}$, 由此得到 $k = 144.4\text{kN/m}$; a 和 Ω 是浮体的升沉幅值(m)和升沉频率(rad/s); $ka \cos \Omega t$ 为杆件顶端浮体运动引起的施加在杆端的载荷, 称为参数激励项。将式(1-20)代入式(1-19), 即为 TTR 的参数激励振动方程。

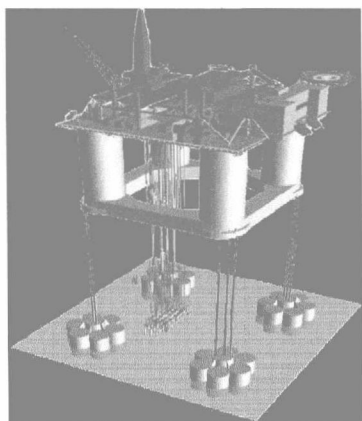
考虑立管单位长度受横向流体动力 $f(z, t)$ 的强迫激励, 根据式(1-19), 则立管的振动为参数-强迫激励振动, 简称参-强激励振动^[13]。

$$EI \frac{\partial^4 w(z, t)}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left[T(z, t) \frac{\partial w(z, t)}{\partial z} \right] + (m_r + m_t + m_a) \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} = f(z, t) \quad (1-21)$$

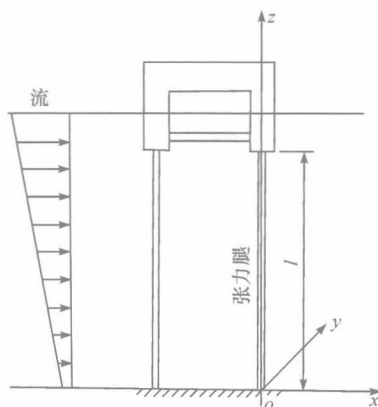
式(1-21)即为柔性杆件参-强激励振动方程。

3. 张力腿平台张力腿的参激振动

张力腿平台如图 1-9(a)所示, 张力腿连接浮体结构与海底基础见图 1-9(a), 浮体提供的浮力大于结构重量, 剩余浮力由张力腿承受, 所以张力腿具有很大的垂向刚度。平台浮体垂荡运动过程中, 张力腿顶部受到拉压作用, 该拉压载荷即为参数激励。图 1-9(b)为张力腿分析模型^[14]。



(a) 张力腿平台



(b) 分析模型

图 1-9 张力腿及其分析模型

参数激励作用下张力腿的振动方程为^[14]

$$m \frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} + c_1' \frac{\partial y(z,t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 y(z,t)}{\partial z^4} - (T_0 + T \cos \Omega t) \cdot \frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2} = f_y(z,t) \quad (1-22)$$

其中, EI 为弯曲刚度; T_0 为预张力; $T \cos \Omega t$ 为顶端动张力, 也即参数激励项; $f_y(z,t)$ 为流体作用力。式(1-22)是参数激励和外激励共同作用的振动系统, 称为参-强激励振动系统。

4. 系泊缆索参数激励振动

长度为 l 、单位长度均匀有效质量为 \bar{m} 的单个锚缆, 固定一端, 而另一端与浮体连接。浮体水平运动时, 系缆上端受到横向谐波激励^[3,5]。图 1-10(a)所示的接近垂直的锚缆以及图 1-10(b)所示的浮筒系缆都是可能在规则波浪的情况下发生水平运动激励的例子^[3,5]。

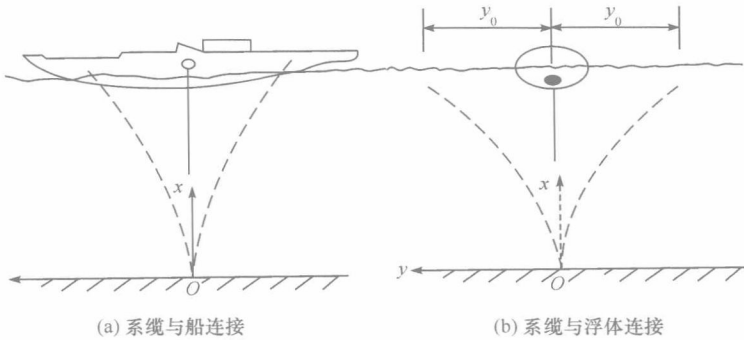


图 1-10 水中缆受到的水平向激励

在任何情况下, 系缆的平均拉力是 P_0 , 海底条件和连接浮体顶部条件为

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = y_0 \cos \Omega t \quad (1-23)$$

在图 1-10(a)中, 当被系泊的船舶或浮体在波浪中做升沉运动时, 垂直系泊的锚索或锚缆也可能发生参数激励振动。这种情况下, 锚缆的平均张力是 P_0 。谐波脉动力的振幅是 $P_1 < P_0$, 而且激励频率是 Ω , 垂直载荷为

$$P = P_0 + P_1 \cos \Omega t \quad (1-24)$$

缆索的基本弯曲自由振动微分方程为^[5]

$$P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \bar{m} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1-25)$$

由式(1-24)得到锚缆的水平横向运动方程为

$$\bar{m} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - (P_0 + P_1 \cos \Omega t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (1-26)$$

式(1-26)即为缆索参数激励振动方程, $P_1 \cos \Omega t$ 项称为参数激励项, 反映了升沉运动引起的载荷对于锚缆水平横向振动的影响。

5. 深海 Spar 平台垂荡-纵摇耦合运动

深海 Spar 平台有 6 个自由度的运动, 但由于结构的对称性, 独立的运动仅有垂荡、纵摇和纵荡。大量的 Spar 平台统计表明, 其垂荡固有频率接近纵摇固有频率的 2 倍, 极易产生耦合的不稳定运动。Spar 平台垂荡和纵摇耦合运动过程中, 主体排水量与浮心位置不断变化, 导致主体纵摇恢复力矩出现时变, 引起主体纵摇运动的附加干扰, 属于参数激励运动的范畴。尤其当波激频率接近垂荡固有频率时, 纵摇稳性高度 \overline{GM} 会受到时变的垂荡运动的影响, 出现参数激励纵摇运动, 此外, 平台还将受到波浪激励力矩的强迫激励作用, 因此平台的纵摇运动受到了参-强联合激励作用^[15-17]。

考虑垂荡为简谐运动, 且不受纵摇影响, Spar 平台参数激励纵摇运动方程为^[16]

$$(I_{55} + I) \ddot{\xi}_5 + B_5 \dot{\xi}_5 + \rho g \Delta \left[\overline{GM} + \frac{1}{4} \xi_3^2 H_g + \frac{1}{2} (\eta - \xi_3) \right] \xi_5 = 0 \quad (1-27a)$$

若考虑波浪力矩的作用, 式(1-27a)为参数激励和波浪激励运动微分方程, 此时为参-强激励振动系统^[15]:

$$(I_{55} + I) \ddot{\xi}_5 + B_5 \dot{\xi}_5 + \rho g \Delta \left[\overline{GM} + \frac{1}{4} \xi_3^2 H_g + \frac{1}{2} (\eta - \xi_3) \right] \xi_5 = F_{w5} \cos(\Omega t + \theta_5) \quad (1-27b)$$

其中, I 为平台纵摇转动惯量; I_{55} 为纵摇附加转动惯量; B_5 为纵摇辐射阻尼系数; ρ 为海水密度; Δ 为平台静排水量; \overline{GM} 为纵摇初稳性高; H_g 为平台重心距静水面的高度; ξ_3 为垂荡位移; ξ_5 为纵摇角; F_{w5} 为线性化的纵摇波浪力矩幅值; Ω 为波浪频率; θ_5 是纵摇波浪力矩与垂荡运动间的相位角。

1.2.4 多自由度的非线性振动系统

海洋工程结构物在大幅非线性运动过程中, 多个自由度之间是相互耦合的。例如, 船舶在小角度运动情况下, 可以认为横摇、升沉及纵摇是独立的, 但是在大幅非线性运动过程中, 横摇、升沉及纵摇则是相互影响的。根据非线性动力学理论, 在非线性的运动状态下, 各个模态之间的能量不再守恒, 而是相互传递的, 因而导致各个模态运动幅值和相位出现调整。

1. 船舶横摇-纵摇耦合非线性运动

采用两个坐标系描述船舶运动， $\bar{O} \bar{x} \bar{y} \bar{z}$ 为空间固定坐标系， $Oxyz$ 为固定在船上的运动坐标系，如图 1-11 所示。船体质心位移由矢量 R 描述，旋转角用欧拉角描述。定义：绕 x 轴的角度为横摇角 ϕ ，绕 y 轴的角度为纵摇角 θ ，绕 z 轴的角度为首摇角 ψ [18]。

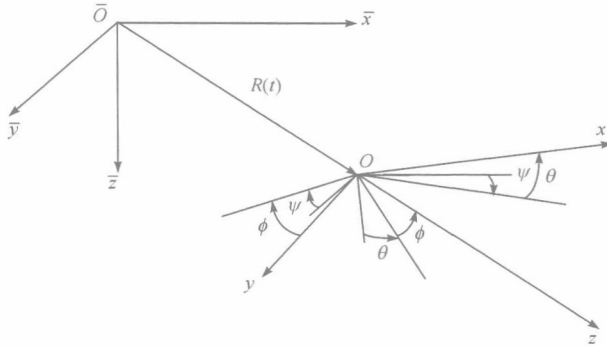


图 1-11 船舶耦合运动坐标系

考虑建立横摇与纵摇两个自由度的耦合运动，假设如下。

- (1) 重心位置固定不动，即 $u = v = w = \dot{u} = \dot{v} = \dot{w} = 0$ 。
- (2) 横摇与纵摇为绕过重心轴的运动。
- (3) 首摇角及角速度为零，即 $\psi = \dot{\psi} = 0$ 。

考虑规则波力矩的作用，得到船舶横摇和纵摇耦合的非线性运动方程为 [18]

$$\begin{cases} I_{xx} \ddot{\phi} - I_{xz} \dot{\phi} \dot{\theta} = K_1 + K_\phi \phi + K_{\dot{\phi}} \dot{\phi} + K_{\ddot{\phi}} \ddot{\phi} + K_{\phi\theta} \phi \theta + K_{\theta\ddot{\phi}} \theta \ddot{\phi} + K_{\phi\ddot{\theta}} \phi \ddot{\theta} + K_{\dot{\phi}\dot{\theta}} \dot{\phi} \dot{\theta} + M_{\phi 0} \cos \Omega t \\ I_{yy} \ddot{\theta} - I_{yz} \dot{\phi}^2 = M_1 + M_\theta \theta + M_{\dot{\theta}} \dot{\theta} + M_{\ddot{\theta}} \ddot{\theta} + M_{\phi\phi} \phi^2 + M_{\phi\dot{\phi}} \phi \dot{\phi} + M_{\theta\theta} \theta^2 + M_{\theta\dot{\theta}} \theta \dot{\theta} + M_{\dot{\phi}\dot{\theta}} \dot{\phi}^2 \\ \quad + M_{\theta\dot{\theta}} \dot{\theta}^2 + M_{\theta 0} \cos \Omega t \end{cases} \quad (1-28)$$

其中， I_{xx} 、 I_{yy} 分别为 x 轴、对 y 轴的转动惯量； I_{xz} 为对 x 和 z 轴的惯性积。

令 $\phi = \phi_s + u$ ， $\theta = \theta_s + v$ ，其中， ϕ_s 和 θ_s 分别为船舶静力 K_1 和 M_1 作用下的静倾角。仅考虑动倾角，在式(1-28)中以 u 代替 ϕ ， v 代替 θ ，得 [16]

$$\begin{cases} \ddot{u} + \omega_1^2 u = \varepsilon (-2\mu_1 \dot{u} + \delta_1 uv + \delta_2 u \dot{v} + \delta_3 v \ddot{u} + \delta_4 \dot{u} \dot{v} + \delta_5 v + \delta_6 u + \delta_7 \ddot{v} \\ \quad + \delta_8 \ddot{u} + F_1 \cos \Omega t) \\ \ddot{v} + \omega_2^2 v = \varepsilon [-2\mu_2 \dot{v} + \alpha_1 u^2 + \alpha_2 u \ddot{u} + \alpha_3 v^2 + \alpha_4 v \dot{v} + \alpha_5 \dot{u}^2 + \alpha_6 \dot{v}^2 + \alpha_7 u \\ \quad + \alpha_8 \ddot{u} + \alpha_9 v + \alpha_{10} \ddot{v} + F_2 \cos(\Omega t + \tau)] \end{cases} \quad (1-29)$$

其中, ε 为无因次小参数, 表示弱非线性; ω_1 、 ω_2 为线性情形下横摇和纵摇的固有频率; $F_1 \cos \Omega t$ 和 $F_2 \cos(\Omega t + \tau)$ 分别为横摇干扰力矩和纵摇干扰力矩。式(1-29)即为横摇-纵摇耦合的非线性微分方程, 该方程既是参激的, 也是强迫激励的。

2. Spar 平台垂荡-纵摇耦合非线性运动

Spar 平台的垂荡运动与纵摇运动是强耦合运动。典型的 Spar 平台垂荡固有周期约为 30s, 横摇固有周期为 50~70s, 垂荡与纵摇固有频率比接近 2:1。在大多数海况下, 由于固有频率远离波浪频率范围, 垂荡与纵摇运动间的耦合作用并不明显。然而, 在某些海洋环境下(如西非), 一年中的长期涌浪工况占据了很大的比例, 这些涌浪的峰值周期可以达到 30s。在长周期涌浪的条件下, 将产生一个线性激励垂荡共振运动, 从而使得一阶波浪力比二阶差频波浪力更为重要。在共振的情况下, 垂荡响应会急剧增大, 并会产生不稳定的纵摇运动。因此需要建立垂荡-纵摇耦合的非线性运动方程, 研究多自由度非线性系统的动力响应。垂荡-纵摇耦合的非线性运动方程为

$$\begin{cases} (m + m_{33})\ddot{\xi}_3 + B_3\dot{\xi}_3 + \rho g A_w \left[\xi_3 - \frac{\xi_5^2}{2} H_g - \eta(x, t) \right] = F_3 \\ (I + I_{33})\ddot{\xi}_5 + B_5\dot{\xi}_5 + \nabla \left[\overline{GM} - \frac{1}{2}\xi_3 + \frac{\xi_5^2}{4} H_g + \frac{1}{2}\eta(x, t) \right] \xi_5 = M_3 \end{cases} \quad (1-30)$$

其中, m 为平台质量; m_{33} 为垂荡附加质量; I 为平台纵摇转动惯量; I_{33} 为纵摇附加转动惯量; B_3 和 B_5 分别为垂荡和纵摇线性辐射阻尼系数; A_w 为平台横截面面积; H_g 为平台重心距静水面的高度; \overline{GM} 为纵摇初稳性高; F_3 和 M_3 分别为垂荡-纵摇一阶波浪激励力矩和波浪力矩。

1.3 海洋工程结构典型的非线性振动方程

海洋工程领域结构形式众多, 不可能将其全部列举出来。但是以上海洋工程结构的实例, 代表了大多数海洋工程结构非线性振动的特点和规律。基于以上工程实例, 凝练出海洋工程结构非线性振动方程的一般形式。

1.3.1 自治系统与非自治系统

自治系统是指不显含时间 t 的微分方程, 也称为自由振动系统。如下微分方程代表的系统为自治系统^[2,8]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \dot{x}) \quad (1-31)$$

其中, \dot{x} 为对时间的一阶导数。如果非线性方程中的非线性部分是小的, 则有

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad (1-32)$$

其中, ε 为小参数。

非自治系统是指显含时间 t 的微分方程, 也称为强迫振动系统。一般的微分方程形式为^[8]

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \dot{x}, t) \quad (1-33)$$

如果非线性方程中的非线性部分是小的, 则有非自治系统的微分方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon f(x, \dot{x}, t) \quad (1-34)$$

1.3.2 保守系统与非保守系统

保守系统是指振动过程中没有能量损失也没有外加能量补充的系统。该系统微分方程中没有阻尼项和干扰力项。

保守系统微分方程的一般形式为^[8]

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0 \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon f(x) = 0 \end{cases} \quad (1-35)$$

非保守系统中具有能量耗散, 微分方程中包括阻尼力项, 即

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + f(\dot{x}) + kx = 0 \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon f(\dot{x}) + kx = 0 \end{cases} \quad (1-36)$$

其中, $\varepsilon f(\dot{x})$ 为弱非线性阻尼力项。

1.3.3 海洋工程中典型的非线性振动方程

1) 非线性方程的一般形式

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + f(x, \dot{x}) = f(t) \quad (1-37)$$

其中, \ddot{x} 表示对时间的二阶导数; $f(x, \dot{x})$ 表示非线性项。

2) 达芬方程和刚度非线性

船舶横浪中横摇和多点系泊浮体的纵荡运动, 可以归结为达芬方程。

无阻尼自由振动的达芬方程^[2,8]为

$$m\ddot{x} + k_1x + k_3x^3 = 0 \quad (1-38)$$

恢复刚度硬特性的有阻尼达芬方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_1x + k_3x^3 = 0 \quad (1-39)$$

其中, $k_3 > 0$ 。

恢复刚度软特性的有阻尼达芬方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + k_3x^3 = 0 \quad (1-40)$$

其中, $k_3 < 0$ 。

带有强迫项的达芬方程^[2,8]为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_1x + k_3x^3 = f_0 \cos \Omega t \quad (1-41)$$

3) 阻尼和刚度非线性的微分方程

$$m\ddot{x} + c_1\dot{x} + c_3\dot{x}^3 + k_1x + k_3x^3 = f_0 \cos \Omega t \quad (1-42)$$

4) 对称分段线性的非线性系统

分段刚度非线性恢复力按照下式变化^[2]:

$$m\ddot{x} + c_1\dot{x} + f(x) = 0 \quad (1-43a)$$

其中

$$f(x) = \begin{cases} kx, & -e \leq x \leq e \\ kx + \Delta k(x - e), & e \leq x \\ kx + \Delta k(x + e), & -e \geq x \end{cases} \quad (1-43b)$$

这里, e 为振动的范围。

5) 线性参数激励振动系统

Hill 方程:

$$\ddot{x} + [-A + Kf(t)]x = 0 \quad (1-44a)$$

Mathieu 方程:

$$\ddot{x} + \lambda^2 |1 + \cos \Omega t| x = 0 \quad (1-44b)$$

6) 非线性参数激励振动系统^[8]

$$\ddot{x} + k(t)x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = 0 \quad (1-45)$$

其中, $k(t)$ 为参数激励项; $f(x, \dot{x})$ 为非线性项。

7) 多自由度非线性系统^[3]

$$M\ddot{X} + KX + Q(X, \dot{X}) = F(t) \quad (1-46)$$

8) 载荷非线性单自由度系统

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(\dot{x}, u) \quad (1-47)$$

其中, u 为流速。

9) 载荷非线性多自由度系统

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F(\dot{X}, U) \quad (1-48)$$

1.4 非线性振动的特点

1.4.1 非线性振动与线性振动的主要区别

任何结构物进入损伤或者破坏的过程,都必须经过非线性过程,例如,船舶正常运动至大幅横摇发展到倾覆,是非线性过程;系泊海洋浮体大幅运动直至系泊缆索崩断是非线性过程。只有研究非线性动力学的过程,才可以揭示结构损伤和破坏的机理。非线性振动过程中,结构的响应特性与线性结构具有本质的区别。早期的研究受理论方法计算及技术手段的限制,往往忽略非线性项,这样得到的分析结果不仅在数量上有误差,在工程上也可能导致严重的后果。

研究表明,非线性振动系统与线性振动系统的主要区别如下^[2,8]。

(1) 线性系统中的叠加原理对于非线性系统是不适用的,如作用在非线性系统上的可以展成傅里叶级数的周期干扰力,其受迫振动的解不等于每个谐波单独作用时解的叠加。

(2) 在非线性系统中,对应于平衡状态和周期振动的定常解一般有数个,必须研究解的稳定性问题,才能决定哪一个解在工程实际中能实现。

(3) 在线性系统中,由于阻尼存在,自由振动总是被衰减掉,只有在干扰力作用下,才有定常周期解。而在非线性系统中,如自激振动系统,在有阻尼而无干扰力时,也有定常的周期振动。

(4) 在线性系统中,受迫振动的频率和干扰的频率相同,而对于非线性系统,在单频干扰力作用下,其定常受迫振动的解中,除存在和干扰力同频成分外,还有与干扰频率呈倍数关系和分数关系的频率成分存在。

(5) 在线性系统中,固有频率和起始条件、振幅无关,而在非线性系统中,固有频率则和振幅有关,同时,非线性系统中的振动三要素也和起始条件有关。

(6) 在非线性系统中,当系统参数发生微小改变(参数摄动)时,解的周期将发生倍化分岔,分岔的继续可能导致混沌等复杂的动力学行为。