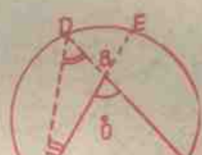
建筑职工紅專学校教材

平面几何

哈尔濱建筑工程学院 編



建筑工程出版社

建筑职工紅專学校教材

平　面　几　何

哈尔濱建筑工程学院 編

建筑工程出版社出版

·1959·

前　言

在党的鼓足干勁，力爭上游，多快好省地建設社会主义的总路綫光輝照耀下，全国人民掀起了一个波瀾壮闊的建設高潮。偉大的祖国正在以“一天等于二十年”的速度飞跃前进。在跃进声中，我国劳动人民为了夺取知識堡壘，攀登技术高峰，正以豪迈的步伐、冲天的干勁，向科学文化大进軍，各地各行业紅專学校、职工业余学校雨后春笋般地出現。这些学校都迫切需要解决教材問題。

我院应屆毕业生工民建專业54—3班的同学們，在党的“教育为无产阶級政治服务”、“教育与生产劳动相結合”方針的指导下，为了滿足各方面的需要，着手編写了这套紅專建筑工程学校教材。

同学們在党的領导和支持下，破除迷信、解放思想，遵循革命热情和科学精神相結合的原則，經过半年的課余劳动，終于編写出这套長达一百万字（十余門課程）的教材。

这套教材是針对高小毕业的文化程度編写的，同时，內容的簡、繁、深、淺也尽量照顧建筑业职工工作需要的特点，力求文字通俗，講解透徹，习題实驗等注意了采取建筑工程当中的事物，以达理論联系实际的目的。

在編写过程中，同学們拜訪了工人同志，并且虛心听取了他們的意見。由于条件的限制，这項工作还做得十分不够。編写工作还得到了学院老师們热心的指导和帮助。因此，这套教材是集体劳动的成果，是羣众智慧的汇集。

編写这样一套教材，是一件不容易的事情，由于同学們的思想水平和知識水平不高，特別是缺乏生产实踐經驗，錯誤和不妥当的地方一定很多，我們殷切地希望同志們不吝指教。

哈尔濱建筑工程学院

1959年5月1日

目　录

第一章 緒　論

§1 基本概念

1. 几何学：**研究物体的形状、大小和相互位置的科学叫做几何学。**“几何”一詞是由希腊文翻譯过来的，这个名詞的原意是“測量土地的技术”。上古时代，人們需要决定各种东西的大小和土地的面积，就产生了最初的几何学的概念。可見几何学是从生产实际需要中产生的，是为生产服务的。

現在这門科学虽然还保持着它原来的名称，但是早已不再是关于土地測量的科学，而是研究物体的空間性質（形状、大小和相互位置）的科学。

几何学是数学中的基本学科，是我們以后学习各門專业課程的基础，同时也是解决許多生产上实际問題的工具。譬如：划綫、放样、度量、估重、制图等都离不开几何学的知識。所以，我們应該学好这門功課。

2. 几何图形：当我們只研究一个物体的形状和大小而不研究它的其他性質的时候，我們就把这个物体叫做**几何体**，或簡称为**体**。

例如，一个皮球和一个同样大小的鉛球，虽然它們的颜色、重量、制造材料等都不相同，但是从几何学的观点来看，它們却是完全相等的几何体。

任何物体都是由**面**組成的。不过几何学里所講的面，在我們想象中，它只有長短和寬窄而沒有厚薄。

两个面相交就得到了**綫**。例如桌面的棱，就是由桌子的两个面相交而成的。几何学里的綫，在我們的想象中只有長短而沒有寬窄和厚薄。

当綫和綫相交的时候就得到了**点**。例如桌子两个棱相交的地

方就是点。几何学里的点，在我們的想象中，沒有長短、寬窄、厚薄，只有位置。

在学习几何学的过程中，往往用鉛笔或鋼笔在紙上点上一些点子，这样的点子，事实上已經有長和寬度了。但是在研究問題时，我們認为它只占有位置，而沒有面积。

根据上述的概念，我們可以得这样的結論：**点运动成綫，綫运动成面，面运动成体。**

体、面、綫、点或其中任意几种的集合，叫做**几何图形**，簡称**图形**。若把一个几何图形放到另外一个几何图形上面，它們的各个部分能够完全重合，这两个几何图形就叫做**全等形**。

3.直綫：直綫是最簡單的綫。如从墙上的小孔洞射进来的光綫，給我們以直綫的概念。我們可以把直綫想象成是向两方无限伸長着的。

直綫有下面的性質：**过任意两点，可以引一条直綫，并且只能引一条直綫。**

在生产和生活当中，經常要应用到直綫的这种性質。例如，在进行測量时，要在平地上測定一条直綫，我們先把一根标杆插到地上，然后在另一个地方插上第二根标杆，这两根标杆就确定了一段直綫。为了延長这段直綫，我們利用直綫这个性質在第二根标杆外的另一个地方再插上第三根标杆，使得它恰好把前面的两根标杆遮住。这时第三根标杆的位置一定在前两根标杆位置的延長綫上。

根据这个性質，可以得出結論：**两条直綫不能有一个以上的交点。**

4.射綫：在直綫上某一点一旁的部分也是一个几何图形，这样的几何图形叫**射綫**。直綫上的这一点叫做**射綫的端点**。

5.平面、平面几何学：窗上的玻璃和池塘里平靜的水，我們都感到它們的表面是很平滑的，我們就把这种面叫做**平面**。但更精确地說，平面須有下面的性質：**如果用一条直綫連接平面內的任意两点，那末这条直綫上所有的点都在这个平面內。**例如，我

們想檢查一块木板是否鉋得平滑，就可以把一根經过精确校正过的尺放到木板面上，如果这块木板已經鉋得十分平滑，那末无論把这个尺放在什么地方，尺上所有的点都应当紧紧地貼在木板面上。如果图形上所有的点都在一个平面內，这个图形就叫做**平面几何图形**。研究平面几何图形性質的几何学叫做**平面几何学**。

§2 綫　段

1.綫段：直綫上任意两点間的部分叫**綫段**，这两个点叫做**綫段的端点**。綫段通常用两个端点的大写字母来表示，例如："綫段DE（或者ED）"（图1）。或者用一个小写字母表示，例如："綫段b"（图2）。

图 1

图 2

已知一条綫段的两个端点，我們可以用直尺靠紧这两个端点画出这条綫段。連接两点的綫段的長叫做这**两点間的距离**。綫段的長可用刻度尺来度量。

2.延長綫：我們可以利用直尺把一条綫段向两个方向延長到任意長度。例如，我們可以过B点把綫段AB延長（图3），也可以过A点把它延長（图4）。在前一种情况，我們說是延長AB；在后一种情况我們說是延長BA，或者說是反向延長AB。延長的部分叫做原綫段的**延長綫**（如图3中的BC和图4中的AD）。

图 3

图 4

3.綫段的加减：如果在綫段AB上任取一点C（图5），就得到两条新的綫段AC和CB。这时，綫段AB叫做綫段AC与綫段CB的和。綫段AC（或CB）叫做綫段AB与綫段CB（或AC）的差，就是：$AB=AC+CB$；$AC=AB-CB$；$CB=AB-AC$。

弦。

通过圓心的弦（图10中的綫段AD）叫做圓的**直徑**。一条直徑等于两条半徑之和。所以：

同圓（或等圓）的直徑相等。

圓上任意两点間的部分叫做**弧**（图10中的EF）。这两点叫做弧的端点。弧可以用符号“⌒”来表示。以E和F为端点的弧可以記作$\overset{\frown}{EF}$。圓上任意两点把圓分成两条弧，这两条弧組成一个圓。为了区别两条弧起見，我們可以在两个大写字母之間添上一个小写字母。例如，$\overset{\frown}{EmF}$，$\overset{\frown}{EnF}$。

連接一条弧的两个端点的綫段，叫做这条**弧所对的弦**。而这条弧就叫做这条**弦所对的弧**。

一条弧和过該弧端点的两条半徑所組成的图形（图10中的$\overset{\frown}{BC}$和半徑OB、OC所組成的图形）叫做**扇形**。

一条弧和該弧所对的弦組成的图形（图10中$\overset{\frown}{EmF}$和弦EF所組成的图形）叫做**弓形**。

2.弧的相等和加減：把同圓（或等圓）中的一条弧放到另一条弧上，如果它們的两个端点能够分别重合，这两条弧就叫做**等弧**。例如，把⊙O中的$\overset{\frown}{AmB}$放到$\overset{\frown}{CnD}$上(图11)使A和C重合，并且使$\overset{\frown}{AmB}$順着$\overset{\frown}{CnD}$落下，如果B和D也重合，那么这两条弧上所有的点也就完全重合(因为它們到圓心的距离都相等)，这时，$\overset{\frown}{AmB}=\overset{\frown}{CnD}$。只有同圓（或等圓）中的弧才能相等。

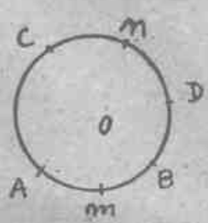


图 11

从圓上一点，向任何一方可以截取一条弧，使它等于同圓（或等圓）中的一条已知弧。例如，要在⊙O（图11）上从C点截取和$\overset{\frown}{AmB}$相等的弧，我們可以利用圓規，使圓規的两个点端間的距离等于A和B間的距离，然后保持这个距离，把圓規的一个尖端放在C点上，另一个尖端落在⊙O上的一点D。这时，C和D把⊙O分成两条弧，其中的一条$\overset{\frown}{CnD}$即与$\overset{\frown}{AmB}$相等。因为，如果把弓形$\overset{\frown}{AmB}$放到弓形$\overset{\frown}{CnD}$上，使A和C重合，AB順着CD落

下，由于綫段 AB 等于綫段 CD，所以 B 必和 D 重合，也就是把 $\overset{\frown}{AmB}$ 放到 $\overset{\frown}{CnD}$ 上，它們的两个端点分别重合，所以：$\overset{\frown}{AmB}=\overset{\frown}{CnD}$。

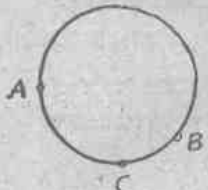


图 12

弧的加減和綫段的加減相同，如果在 $\overset{\frown}{AB}$ 上任取一点 C（图12），就得到两条新的弧 $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{CB}$。这时，$\overset{\frown}{AB}$ 叫做 $\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{CB}$ 之和，$\overset{\frown}{AC}$（或 $\overset{\frown}{CB}$）叫做 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CB}$（或 $\overset{\frown}{AC}$）的差，就是：

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CB},\quad \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CB},\quad \overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AC}。$$

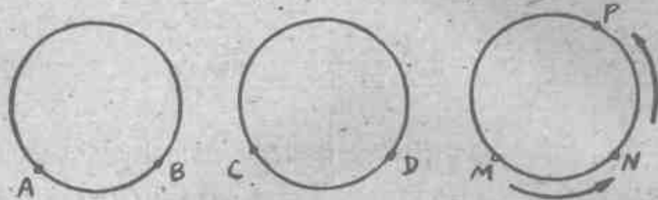


图 13

要把半徑相等的两条弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 相加（图13），我們可以用相同的半徑作一圓，从圓上任一点 M 截取 $\overset{\frown}{MN}$ 等于 $\overset{\frown}{AB}$，然后从 N 起向同一方向（如图中箭头所示）截取 $\overset{\frown}{NP}$ 等于 $\overset{\frown}{CD}$，这时：

$$\overset{\frown}{MP}=\overset{\frown}{MN}+\overset{\frown}{NP}=\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}。$$

同样，我們可以把同圓或等圓的两条弧相減。

小于半圓的弧叫做**劣弧**，大于半圓的弧叫做**优弧**。通常單說弧时总是指劣弧，如果是指优弧，就要加以特别說明。

习 題 一

1. 已知綫段 a 和 b（$a>b$），求作一条綫段使它等于：

　(1) $a+b$；　　(2) $a-b$；　　(3) $3a$；

　(4) $3a+2b$；　　(5) $3a-2b$。

2. 用刻度尺量一条已知綫段的長，并求出这条綫段的中点。

3. 按1:200的比例尺，在紙上画出表示下列实际長度的綫段：

　(1) 6 公尺；　　(2) 4.8公尺。

4. 在比例尺是1:500的图紙上，量得 AB 長是 2 公分，BC 長是 3 公分，求出 AC 的实际長度。

（第4題）

5. 从直綫上一点M起截取綫段$MN=5$公分，从M再向相反的方向截取綫段$MP=7$公分。求出这两条綫段的中点間的距离。

6. 画两个圓：（1）它的半徑是2公分；（2）它的直徑是4.5公分。

7. 已知A是⊙O上的一点，（1）过A作一条割綫；（2）过A作一条切綫；（3）过A作一条直徑；（4）过A作一条等于半徑的弦。

8. 試用刻量尺量一个圓环（或杯口），量得圓周$C=?$ 直徑$d=?$ $c\div d=?$

§4 角的概念

1. 角：从同一点引出的两条射綫（图14中的OA和OB）所組成的图形叫做角。組成角的两条射綫（OA和OB）称为**角的边**。端点O称为**角的頂点**。

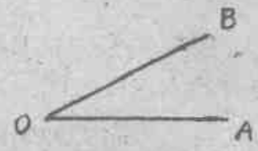


图 14

角可以用符号"∠"表示，一个角通常用三个大写字母表示，中間的一个字母表示角的頂点，两旁两个字母分别表示角边上任一点。例如图14中的角可写为$\angle AOB$或$\angle BOA$。也可以用角頂大写字母表示，如图14也可記为$\angle O$。但是这种表示方法，不可能表示两个以上相邻的角。若要表示两个以上相邻的角，可以用在角的内部靠近頂点的一个数字或者一个希腊字母来表示，如$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle \alpha$等（图15）。角的大小与边的長短无关（图16）。

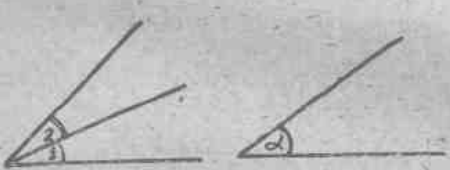


图 15

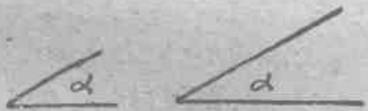


图 16

2. 角的相等或不等：把一个角放到另一个角上，如果它們的各相当部分（角的頂点、两边）都重合，那末这两个角相等。例

的和，$\angle AOC$（或$\angle COB$）叫$\angle AOB$与$\angle COB$（或$\angle AOC$）的差，即：$\angle AOB=\angle AOC+\angle COB$；$\angle AOC=\angle AOB-\angle COB$；$\angle COB=\angle AOB-\angle AOC$。

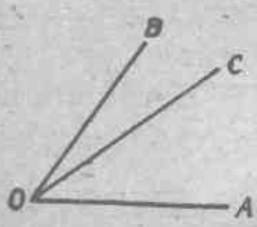


图 20

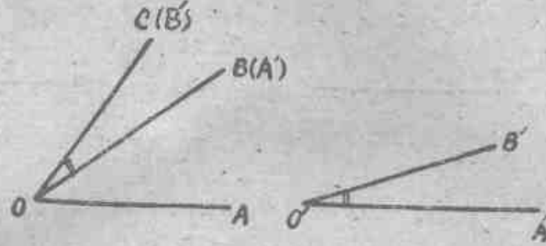


图 21

要把$\angle AOB$与$\angle A'O'B'$加起来（图21），我們可以移动$\angle A'O'B'$，使它的頂点O'与O重合，边$O'A'$与OB重合。这样，$O'B'$落在OC的位置，得到：

$$\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC=\angle AOB+\angle A'O'B'。$$

用同样的方法可以把三个或三个以上的角加起来。

要从一个較大的角，如$\angle AOB$，減去一个較小的角，如$\angle A'O'B'$（图22），我們可以移动$\angle A'O'B'$，使它的頂点O'和O重合，边$O'A'$与OA重合，另一个边$O'B'$落在$\angle AOB$內OC的位置上，得到：

$$\angle COB=\angle AOB-\angle AOC=\angle AOB-\angle A'O'B'。$$

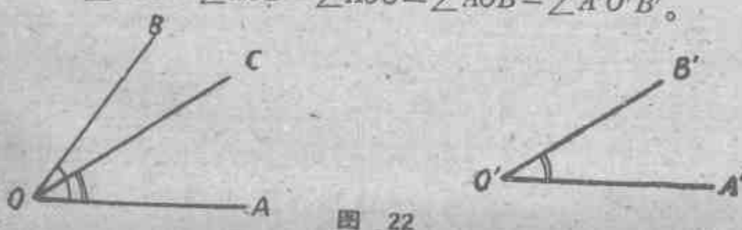


图 22

§5 角的度量

1.圓心角：对于一个圓来說，頂点在圓心的角（图23 $\angle AOB$）叫做**圓心角**，圓心角两边所夹的弧叫**圓心角所对的弧**。而此角就叫**这弧所对的圓心角**。如图23中$\overset{\frown}{AB}$是圓心角$\angle AOB$所对的弧，而

$\angle AOB$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角。

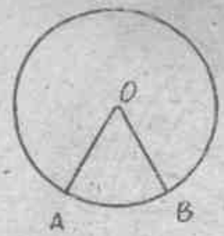


图 23

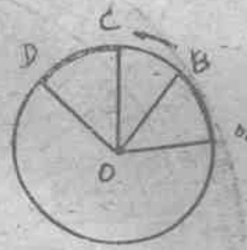


图 24

在同圆或等圆中，如 $\angle AOB = \angle COD$，把扇形 OCD 和扇形 OAB 重合在一起，就很容易知道 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$。因此，**在同圆或等圆中**，圆心角与它所对弧之間有下列关系：

（1）**如果圆心角相等，那末所对的弧也相等。**

（2）**如果弧相等，那末它們所对的圆心角也相等。**

弧和角的度数是这样划分的，把一个圆分成360等份，过每一份点作半徑就得到繞着圆心的360个圆心角。因为这些圆心角所对的弧都相等、所以它們也都相等。象这样在圆上所得的每一条弧叫做**一度的弧**；而环繞着圆心的每一个角叫做**一度的角**。換句話說，一度的弧就是圆的三百六十分之一，而一度的角就是一度的弧所对的圆心角。弧和它所对的圆心角的度数是相等的。

把一度分成60等份，每一等份叫做**一分**；把一分再分成60等份，每一等份叫做**一秒**。我們通常把度用符号“°”来表示；分用“′”表示，秒用“″”表示。如一个角是40度 8 分20秒，可以写成$40°8'20''$。

2.量角器的用法：角的大小是用量角器来量的（图25）。量角器的形状呈半圆形，半圆被分为180等份，每一等份等于一度。如果我們要量 $\angle DCE$，只要把量角器放到角上，使半圆的圆心和角頂重合，角边与量角器始边重合，再看一下角的另一边所在的位置，即可以讀出此角度数。如图22中知道 $\angle DCE$ 为50度。用量角器也可以画出已知度数的角。

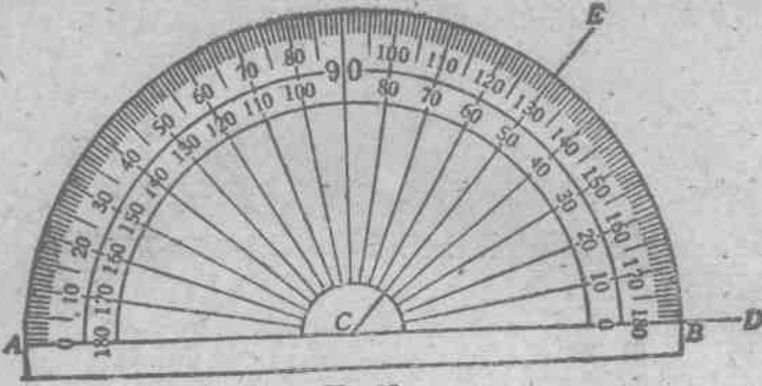


图 25

§6 角的概念的扩充

1.直角、平角、周角：90°的角叫做**直角**，直角的两边是互相垂直的（图26a）。180°的角叫做**平角**，平角两边成一直綫，一个平角等于两个直角（图26b）。360°的角叫做**周角**，角的两边重合。一个周角等于二个平角或四个直角(图26c)。所有的直角都相等。直角可以用字母 d 来代替。比如两个直角可以写成$2d$。

銳角和鈍角：小于直角的角叫做**銳角**（如图26d）。大于直角并且小于平角的角叫做**鈍角**（如图26e）。

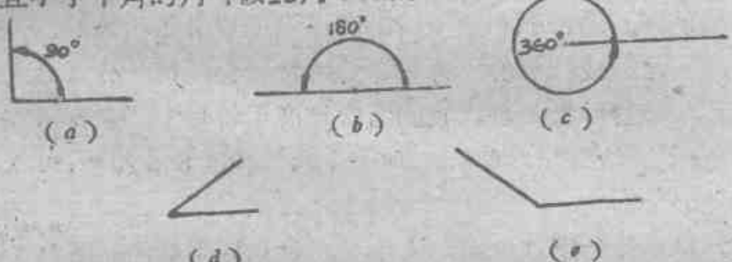


图 26

2.余角、补角和邻角：若两个角的和等于一直角（90°），称这两个角互为**余角**。例如30°的角与60°的角互为余角，换句話說，30°的角是60°的角的余角，而60°的角同样是30°的角的余角。若两个角的和是一平角（180°），称这两个角互为**补角**。例

如135°的角与45°的角互为补角。換句話說，135°的角是45°的角的补角，而45°的角同样是135°的角的补角。若两个角（图27 $\angle AOB$与$\angle BOC$）有公共的頂点和一条公共边，并且它們的另一条边都在公共边的两旁，称这两个角互为**邻角**。

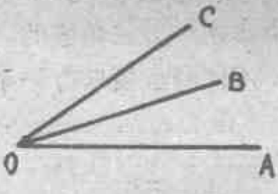


图 27

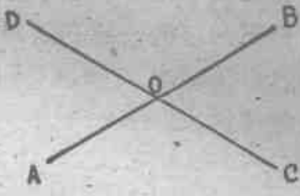


图 23

3.对頂角：若一个角的两边是另外一个角的两边的反向延長綫，这两个角就叫做**对頂角**。例如，二直綫AB、CD（图28）交于O点組成四个角，其中$\angle AOD$与$\angle COB$，$\angle AOC$与$\angle DOB$都是对頂角。

如图28 $\because$ AOB为一直綫，

$\therefore$ $\angle AOD+\angle DOB=180°$；

又 COD为一直綫，

$\therefore$ $\angle COB+\angle DOB=180°$，

$\therefore$ $\angle AOD+\angle DOB=\angle COB+\angle DOB$，

$\therefore$ $\angle AOD=\angle COB$。

由此得到对頂角一个重要的性質：**对頂角相等**。

§7 垂 綫

前面我們講过，角是两条射綫构成的几何图形。当两条射綫所构成的图形成直角时，我們就称这两条射綫互相垂直。

如果一直綫与另一直綫相交成直角，这直綫就叫另一直綫的**垂綫**，而它們的交点称为**垂足**。

垂直可以用符号"⊥"表示。如图29中CD垂直于AB，可以写

作 $CD \perp AB$。图中点 D 叫垂足。CD 的長，叫 C 点至 AB 的距离。

下面研究两个互相垂直的直綫的性質。

1.过已知直綫上的一已知点可以作这条直綫的一条垂綫，并且只能作一条垂綫。

如图30过 C 点作 AB 綫的垂綫时，可沿已知直綫 AB 放一直尺，然后将三角板的一直角边沿直尺边移动，当三角板的直角頂点和已知点 C 接触时，画綫 CE 即得。这样的垂綫只有一条。下面我們来証明这点。

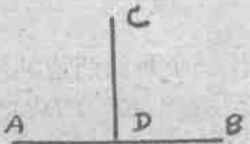


图 29

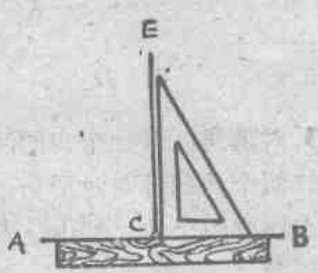


图 30

如图31。假定过 C 点有 CE、CD 两条直綫都和 AB 綫垂直，那末 $\angle ACE=\angle ACD=90°$。若是这样，这相等的二直角的一边（$AC$）重合，角頂点 C 也重合，二直角的另一边 CD 和 CE 也必然重合。所以，过直綫上的已知点只能作一条垂直綫与已知直綫垂直。

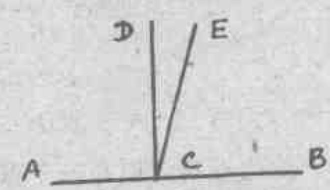


图 31

2.过直綫外一点可以作一条直綫与該直綫垂直，并且只能作一条垂綫。

垂直綫的作法同前，下面来証明这种性質。

如图32。过綫外一点 M 作直綫 AB 的垂綫 MC，延長 MC 至 N，使 $MC=NC$。MCN 为一直綫。所以 $\angle MCB=\angle NCB=90°$。現假定过点 M 还有一条直綫 MD 也垂直于直綫 AB。連接 ND。将图形以直綫 AB 为軸折叠起来，因为 M 与 N 点重合，所以直綫 MD

与直綫 ND 完全重合（过两点只能連一条直綫）。所以，可以得出：$\angle MDC=\angle NDC$。但过点 M 及 N 只能連一条直綫 MN（DN 不是 DM 的反向延長綫），所以 MDN 不是一条直綫。因此，$\angle MDC$ 和 $\angle NDC$ 都不是直角，也就是說 MD 不垂直于 AB。

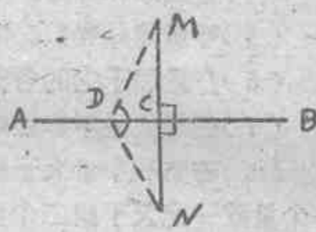


图 32

如果 $MD\perp AB$，也必是 MD 和 MC 重合。所以，过綫外一点只能作一条直綫与該直綫垂直。

在图33中，M 是直綫 AB 外的一点，MC 是 AB 的垂綫，C 点是垂足；MD 是 AB 的斜綫。我們不难看到，$MD>MC$，所以得出結論：

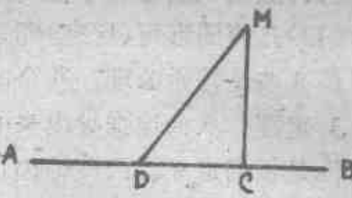


图 33

从直綫外的一点到这条直綫所引的垂綫的長，小于这点到这条直綫任意一条斜綫的長（証明从略）。也就是說：**点到直綫上各点連綫的長以垂綫为最短。**

§8 定义、公理、定理、推論

1.定义：定义是說明一个名詞或术語的意义，使它跟别的名詞不致相混的一种命題（所謂命題就是带有肯定語气或否定語气的一句完整的話）。象前面我們学过的关于規定圓心角、对頂角、垂直等的意义的說明都是定义。

2.公理：不加証明而采用的眞理叫**公理**。适用于数学一切部門的公理叫普通公理。專用于几何学上的公理叫**几何公理**。現將常用的一些公理叙述如下：

（1）等于同量的量相等，等于等量的量相等。

（2）等量加上等量，它們的和相等。

（3）等量减去等量，它們的差相等。