高等学校教学用书

矿区控制测量

下 册

阜新矿业学院 中国矿业学院
焦作矿业学院 合编

煤炭工业出版社

高等学校教学用书

矿区控制测量

下册

阜新矿业学院　中国矿业学院
焦作矿业学院　合编

煤炭工业出版社

高等学校教学用书

矿 区 控 制 测 量

下 册

阜新矿业学院 中国矿业学院 焦作矿业学院 合编

*

煤炭工业出版社 出版

(北京安定门外和平北路16号)

煤炭工业出版社印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行

*

开本787×1092 1/16 印张25 1/4 插页2

字数604千字 印数1—4,800

1981年5月第1版 1981年5月第1次印刷

书号15035·2392 定价3.15元

前　　言

《矿区控制测量》教材是根据煤炭工业部1978年高等教育座谈会制定的矿山测量专业教学计划和教学大纲的要求编写的。总结了1973年阜新矿业学院、四川矿业学院、焦作矿业学院、西安矿业学院等四院校合编《矿区控制测量》教材的经验，加强了基础理论，增加了电磁波测距和应用电子计算机平差三角网等新技术，加强了矿区控制网平差计算和设计等有关内容。

本教材分上、下两册，上册共七章，包括：总论、矿区控制点点位的设置、精密长度测量、精密光学经纬仪及其检验、精密角度测量、高程测量、椭球与高斯投影平面直角坐标、三角测量概算。下册共五章，包括：三角网按条件观测平差、三角网按间接观测平差、应用电子计算机平差三角网、矿区控制网精度估算、矿区控制网设计。本教材供煤炭系统高等院校矿山测量专业试用，也可供煤炭系统矿山测量专业技术人员参考。

本教材由阜新矿业学院负责主编，参加编写的有：阜新矿业学院刘光宗（第七、八、九章）、杨志强（第六、十一章）、袁维山（第五章），中国矿业学院叶玉田〔总论、第一、二、十（部分）、十二章〕，焦作矿业学院季振邦〔第三、四、十（部分）章〕等同志。

承武汉测绘学院、同济大学、中国人民解放军测绘学院等院校的测量教研室，云南大学数学教研室，北京矿务局、长江流域规划办公室、河南省煤田地质局物测队、湖北勘察院等单位为本教材提供了资料和提出了宝贵意见，谨向这些单位和同志们表示衷心的感谢。

由于我们理论水平不高，实践经验不足，本教材肯定存在不少缺点甚至错误，恳请读者予以批评指正。

编　　者

一九七八年十二月

目　　录

第八章　三角网按条件观测平差

第一节　条 件 平 差 原 理

一、概述

三角测量的主要目的是通过在地面上所进行的观测（长度测量、水平角观测）结果来推算三角形各边的边长和坐标方位角，从而求出三角点的坐标。如图 8-1 所示三角形中，已知三角点A、B要确定待定点C，只需观测任意两个角度即可确定其坐标，也就是说，在三角网中每确定一个待定点，只需测定两个角度。这种为确定待定点所必需测定的角度数目，称为三角网中的必需观测量。但在三角测量中，为了提高三角点坐标的测定精度，检验观测和计算中可能出现的错误以及对观测结果的精度作出鉴定，在观测时常作多余观测。如对图 8-1 中的三个角度都进行了观测，因此就有一个多余观测。显然，三内角的最或是值之和应满足180°的几何关系。但是每个观测结果都不可避免地含有误差，必然使各观测值之间产生矛盾，从而使三角形中三内角之和不等于180°的理论值，根据三角网的不同结构，观测值之间还可产生各种不同性质的矛盾。这个问题将在以后各节中讨论。为了消除多余观测而产生的几何矛盾，求出三角网各待定元素的最或是值（又称平差值），并鉴定观测值及平差元素的精度，应根据最小二乘法原理进行平差计算。

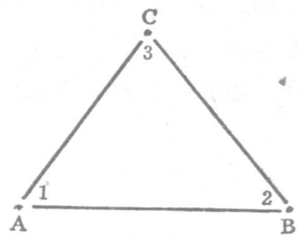

图 8-1

设图 8-1 中三个角度的观测值为l_1、l_2、l_3，各相应角的改正数为 v_1、v_2、v_3，则各观测值的最或是值（即平差值）为

$$\left.\begin{aligned}\bar{l}_1 &= l_1 + v_1\\ \bar{l}_2 &= l_2 + v_2\\ \bar{l}_3 &= l_3 + v_3\end{aligned}\right\} \tag{8-1}$$

显然，三个角度的最或是值之和应满足180°的几何条件，即

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 = 180^\circ \tag{8-2}$$

上式称为条件方程式。将式（8-1）代入式（8-2）得

$$(l_1 + v_1) + (l_2 + v_2) + (l_3 + v_3) - 180^\circ = 0$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + (l_1 + l_2 + l_3 - 180^\circ) = 0$$

或

$$\left.\begin{aligned}v_1 + v_2 + v_3 + w &= 0\\ w &= l_1 + l_2 + l_3 - 180^\circ\end{aligned}\right\} \tag{8-3}$$

式（8-3）称为改正数条件方程式（简称为条件方程式），w称为条件方程式的自由项（又称为闭合差）。

式（8-3）的解是不定的，它有多组改正数，那么应根据什么原则来确定一组最为合理的改正数，并根据这一组改正数来求观测量的最或是值呢？条件平差法确定这些改正数

v 的原则是：所有v_i值既要满足条件方程式又要使〔pvv〕= 最小。按照这个原则确定最或是值的平差方法称为条件观测平差。

三角网按条件观测平差时，如果条件方程式中改正数是角度改正数，称为按角度平差；如果改正数是方向改正数，则称按方向平差。三、四等三角测量主要采用方向观测法，此时各方向值是直接观测值，所以按方向平差是严密的；如果按角度平差，则各角度均由各相邻方向值计算，此时是将角度看作是直接观测值，所以说按角度平差是不严密的。但实践证明，对于三、四等三角测量来说，两种平差方法在数值上和精度上的差异是很小的，而按角度平差要省事些，特别是对于条件平差，要省事得多。所以，在实际作业中，三角网按条件平差时多采用角度平差。故在本章内主要讲角度平差。

三角网根据起算数据多少，分为自由网（独立网）和非自由网（非独立网或附合网）两种。当三角网只有一组必须起算数据（即一条起始边、一个起始方位角和一个点的纵、横坐标）时，称这类网为自由网，如图8-2a、图8-2b所示。当三角网中除必须起算数据外，还有多余起算数据时，则称这类网为非自由网，如图8-2c所示。

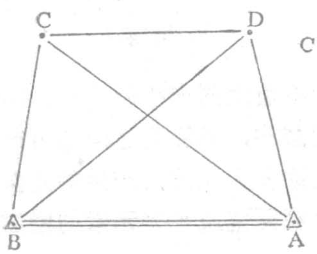

图 8-2a

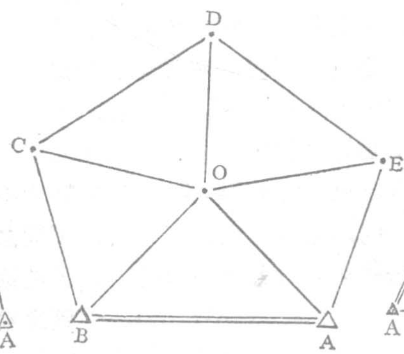

图 8-2b

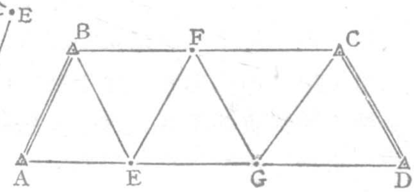

图 8-2c

二、条件平差原理

设有 n 个观测值为　　l_1、l_2、……l_n

相应观测值的权为　　p_1、p_2、……p_n

相应观测值改正数为　　v_1、v_2、……v_n

观测值的平差值为　　$\bar{l}_1$、$\bar{l}_2$、……$\bar{l}_n$

平差值应满足r个条件方程式（r<n），即

$$\left.\begin{array}{l} a_1\bar{l}_1 + a_2\bar{l}_2 + \cdots\cdots + a_n\bar{l}_n + a_0 = 0 \\ b_1\bar{l}_1 + b_2\bar{l}_2 + \cdots\cdots + b_n\bar{l}_n + b_0 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_1\bar{l}_1 + r_2\bar{l}_2 + \cdots\cdots + r_n\bar{l}_n + r_0 = 0 \end{array}\right\} \tag{8-4}$$

式中　a_i、b_i、……r_i——条件方程式的系数；

　　a_0、b_0、……r_0——条件方程式的常数项；

将式$\bar{l}_i = l_i + v_i$代入式（8-4）中，得

$$\left.\begin{aligned}a_1v_1+a_2v_2+\cdots\cdots+a_nv_n+w_1=0\\b_1v_1+b_2v_2+\cdots\cdots+b_nv_n+w_2=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\r_1v_1+r_2v_2+\cdots\cdots+r_nv_n+w_r=0\end{aligned}\right\}\tag{8-5}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}w_1=a_1l_1+a_2l_2+\cdots\cdots+a_nl_n+a_0\\w_2=b_1l_1+b_2l_2+\cdots\cdots+b_nl_n+b_0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\w_r=r_1l_1+r_2l_2+\cdots\cdots+r_nl_n+r_0\end{aligned}\right\}\tag{8-6}$$

式（8-5）为条件方程式的最后形式，称为改正数条件方程组，简称为条件方程组。式(8-6）为条件方程的自由项（闭合差）。

若记

$$\underset{r\cdot n}{A}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\cdots\cdots a_n\\b_1 & b_2\cdots\cdots b_n\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\\r_1 & r_2\cdots\cdots r_n\end{pmatrix}\quad \underset{n\cdot 1}{V}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\ \vdots\\v_n\end{pmatrix}\quad \underset{r\cdot 1}{W}=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\ \vdots\\w_r\end{pmatrix}\quad \underset{r\cdot 1}{A_0}=\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\ \vdots\\r_0\end{pmatrix}\quad \underset{n\cdot 1}{L}=\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\ \vdots\\l_n\end{pmatrix}$$

则条件方程组的矩阵表达式为

$$\underset{r\cdot n}{A}\ \underset{n\cdot 1}{V}+\underset{r\cdot 1}{W}=0\tag{8-7}$$

$$\underset{r\cdot 1}{W}=\underset{r\cdot n}{A}\ \underset{n\cdot 1}{L}+\underset{r\cdot 1}{A_0}\tag{8-8}$$

方程组中n>r，这时方程组可有多组解，它的解是不定的。如果确定下述原则，使所求的一组改正数v，既要满足条件方程组又要使这组改正数之平方乘以相应权的和为最小，即〔pvv〕=最小，这时条件方程组的解就变成唯一的解了。这组唯一的解就是我们所要求的最或是改正数。

为了求得既满足所有条件方程，而又能使〔pvv〕=最小的一组v值，可按照数学中求条件极值的方法，来解决测量中条件观测问题。为此引用r个在数学上称为拉格朗日乘数的k_1、k_2、……k_r，以矩阵表示为

$$K=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\ \vdots\\k_r\end{pmatrix}$$

在测量平差中称k_1、k_2、……k_r为联系数，p_1、p_2、……p_n为各观测值的权，观测值的权矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}p_1 & 0 & \cdots\cdots & 0\\0 & p_2 & \cdots\cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots\cdots & p_n\end{pmatrix}$$

组成新函数式为

$$\Phi=V^TPV-2K^T(AV+W)$$

为使新函数Φ为最小，使它的一阶导数等于零，即

$$\frac{d\Phi}{dV}=\frac{d}{dV}\{V^TPV-2K^T(AV+W)\}=0$$

得

$$2V^TP-2K^TA=0$$

或

$$V^TP-K^TA=0$$

上式转置后得

$$PV-A^TK=0$$

由此得

$$V=P^{-1}A^TK \tag{8-9}$$

上式就是改正数方程组的矩阵表达式。式中

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \frac{1}{p_n} \end{pmatrix}$$

即观测值的权倒数矩阵。

将式（8-9）展开得

$$V=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{p_1}(a_1k_1+b_1k_2+\cdots\cdots+r_1k_r) \\ \frac{1}{p_2}(a_2k_1+b_2k_2+\cdots\cdots+r_2k_r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{p_n}(a_nk_1+b_nk_2+\cdots\cdots+r_nk_r) \end{pmatrix}$$

将式（8-9）代入式（8-7）中，得

$$AP^{-1}A^TK+W=0 \tag{8-10}$$

令

$$N=AP^{-1}A^T$$

则上式可写成

$$NK+W=0 \tag{8-11}$$

上式即法方程的矩阵表达式。法方程系数矩阵N是 r 阶对称方阵，因为

$$N^T=(AP^{-1}A^T)^T=(A^T)^T\cdot(P^{-1})^T\cdot A^T=AP^{-1}A^T=N$$

将式（8-11）展开得

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{aa}{p}\right]k_1+\left[\frac{ab}{p}\right]k_2+\cdots+\left[\frac{ar}{p}\right]k_r+w_1=0 \\ &\left[\frac{ab}{p}\right]k_1+\left[\frac{bb}{p}\right]k_2+\cdots+\left[\frac{br}{p}\right]k_r+w_2=0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\left[\frac{ar}{p}\right]k_1+\left[\frac{br}{p}\right]k_2+\cdots+\left[\frac{rr}{p}\right]k_r+w_r=0 \end{aligned}\right\} \tag{8-11)a$$

解法方程式可以求得联系数 k，但也可用求逆的方法解K。为此，将式（8-11）两边左乘以N^{-1}，得

$$N^{-1}\cdot N\cdot K+N^{-1}\cdot W=N^{-1}\cdot 0$$

即

$$K=-N^{-1}W$$

令
$$Q = N^{-1}$$
则上式为
$$K = -QW \tag{8-12}$$

按逆矩阵的定义，有
$$\underset{r\cdot r}{N}\ \underset{r\cdot r}{Q} = \underset{r\cdot r}{E} \tag{8-13}$$
即
$$\begin{pmatrix} \left[\frac{aa}{p}\right]\left[\frac{ab}{p}\right]\cdots\left[\frac{ar}{p}\right] \\ \left[\frac{ab}{p}\right]\left[\frac{bb}{p}\right]\cdots\left[\frac{br}{p}\right] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left[\frac{ar}{p}\right]\left[\frac{br}{p}\right]\cdots\left[\frac{rr}{p}\right] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{21}\cdots Q_{r1} \\ Q_{12} & Q_{21}\cdots Q_{r2} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ Q_{1r} & Q_{2r}\cdots Q_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\cdots 0 \\ 0 & 1\cdots 0 \\ \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0\cdots 1 \end{pmatrix}$$
将上式展开得
$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{aa}{p}\right]Q_{11} + \left[\frac{ab}{p}\right]Q_{12} + \cdots + \left[\frac{ar}{p}\right]Q_{1r} = 1 \\ &\left[\frac{ab}{p}\right]Q_{11} + \left[\frac{bb}{p}\right]Q_{12} + \cdots + \left[\frac{br}{p}\right]Q_{1r} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\left[\frac{ar}{p}\right]Q_{11} + \left[\frac{br}{p}\right]Q_{12} + \cdots + \left[\frac{rr}{p}\right]Q_{1r} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8-13)a}$$
$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{aa}{p}\right]Q_{21} + \left[\frac{ab}{p}\right]Q_{22} + \cdots + \left[\frac{ar}{p}\right]Q_{2r} = 0 \\ &\left[\frac{ab}{p}\right]Q_{21} + \left[\frac{bb}{p}\right]Q_{22} + \cdots + \left[\frac{br}{p}\right]Q_{2r} = 1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\left[\frac{ar}{p}\right]Q_{21} + \left[\frac{br}{p}\right]Q_{22} + \cdots + \left[\frac{rr}{p}\right]Q_{2r} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8-13)b}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{aa}{p}\right]Q_{r1} + \left[\frac{ab}{p}\right]Q_{r2} + \cdots + \left[\frac{ar}{p}\right]Q_{rr} = 0 \\ &\left[\frac{ab}{p}\right]Q_{r1} + \left[\frac{bb}{p}\right]Q_{r2} + \cdots + \left[\frac{rr}{p}\right]Q_{rr} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\left[\frac{ar}{p}\right]Q_{r1} + \left[\frac{br}{p}\right]Q_{r2} + \cdots + \left[\frac{rr}{p}\right]Q_{rr} = 1 \end{aligned}\right\} \tag{8-13)c}$$
可见矩阵Q中的元素是展开系数，故Q称为展开系数矩阵。亦即法方程系数矩阵N的逆矩阵就是平差中的展开系数矩阵。

将式(8-12)展开得
$$\left.\begin{aligned} k_1 &= -(Q_{11}w_1 + Q_{12}w_2 + \cdots + Q_{1r}w_r) \\ k_2 &= -(Q_{21}w_1 + Q_{22}w_2 + \cdots + Q_{2r}w_r) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_r &= -(Q_{r1}w_1 + Q_{r2}w_2 + \cdots + Q_{rr}w_r) \end{aligned}\right\} \tag{8-12)a}$$
条件平差的主要计算步骤为：

1. 按三角网结构形式确定条件方程式的数目并列出条件方程式；
2. 组成法方程式，法方程式的个数等于条件方程式的个数；

3. 解法方程式求出联系数K；

4. 将联系数k代入改正数方程式中，求出改正数v；

5. 按$\bar{l}_i = l_i + v_i$求出各观测值的最或是值；

6. 精度评定。

实际计算方法将在本章以后各节分别论述。

第二节　自由网条件方程式的种类和组成

在三角网中，实际上只有三种基本图形，即三角形，中点多边形和大地四边形。在这些基本图形中的条件方程式包括图形条件、水平条件和极条件三种。

一、图形条件

在闭合多边形中，如果对所有顶角都进行了观测，这就要求各观测角最或是值之和应等于$(n-2)\times 180°$，n为多边形的边数。对平面三角形，则要求三个内角的最或是值之和等于180°，这种条件称为图形条件。

设　a_i、b_i、c_i为角度观测值；

v_{ai}、v_{bi}、v_{ci}为角度改正数；

$\bar{a}_i$、$\bar{b}_i$、$\bar{c}_i$为角度平差值（即最或是值）。

它们之间的关系为

$$\left.\begin{aligned}\bar{a}_i &= a_i + v_{ai}\\ \bar{b}_i &= b_i + v_{bi}\\ \bar{c}_i &= c_i + v_{ci}\end{aligned}\right\}\tag{8-14}$$

式中　$i = 1、2、\cdots\cdots n$。

图 8-3 为五个三角形所组成的中点多边形，要求各三角形内各观测角的平差值应满足

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - 180° = 0$$

将式（8-14）代入上式得

$$v_a + v_b + v_c + a + b + c - 180° = 0$$

即

$$v_a + v_b + v_c + w = 0 \tag{8-15}$$

式中

$$w = a + b + c - 180°$$

对图8-3可列出五个图形条件方程式，为

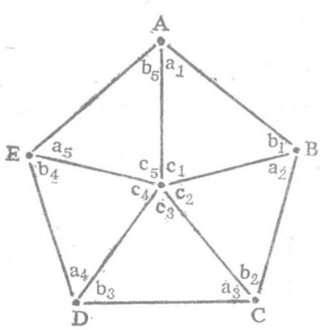

图 8-3

$$\left.\begin{aligned}v_{a_1} + v_{b_1} + v_{c_1} + w_1 = 0\\ v_{a_2} + v_{b_2} + v_{c_2} + w_2 = 0\\ v_{a_3} + v_{b_3} + v_{c_3} + w_3 = 0\\ v_{a_4} + v_{b_4} + v_{c_4} + w_4 = 0\\ v_{a_5} + v_{b_5} + v_{c_5} + w_5 = 0\end{aligned}\right\}\tag{8-16}$$

式中

$$\begin{aligned}w_1 &= a_1 + b_1 + c_1 - 180°\\ w_2 &= a_2 + b_2 + c_2 - 180°\\ w_3 &= a_3 + b_3 + c_3 - 180°\\ w_4 &= a_4 + b_4 + c_4 - 180°\\ w_5 &= a_5 + b_5 + c_5 - 180°\end{aligned}$$

在大地四边形（图8-4）中，可由任意三个三角形列出三个图形条件方程式

$$\left.\begin{aligned} &v_{a_1}+v_{b_1}+v_{a_2}+v_{b_2}+w_1=0 \quad (1)\\ &v_{a_2}+v_{b_2}+v_{a_3}+v_{b_3}+w_2=0 \quad (2)\\ &v_{a_3}+v_{b_3}+v_{a_4}+v_{b_4}+w_3=0 \quad (3)\end{aligned}\right\} \quad (8-17)$$

式中 $w_1=a_1+b_1+a_2+b_2-180°$

$w_2=a_2+b_2+a_3+b_3-180°$

$w_3=a_3+b_3+a_4+b_4-180°$

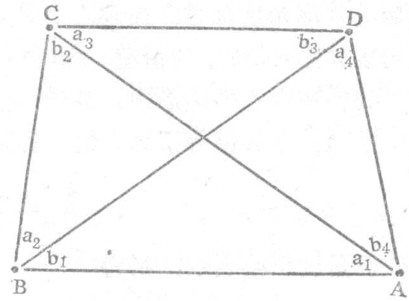

图 8-4

在第四个三角形中还可以列出一个条件方程式

$$v_{a_1}+v_{b_1}+v_{a_4}+v_{b_4}+w_4=0 \quad (4)$$

式中 $w_4=a_1+b_1+a_4+b_4-180°$

但是，这一条件方程式可以由前面三个条件方程式推导出来，即(4)＝(1)－(2)＋(3)，所以式(4)是不独立的。我们在大地四边形中只能采用三个图形条件，这一点必须注意。

二、水平条件

当三角网中有中点多边形，并在中点上观测了所有环绕该点的各角，这时就要产生圆周闭合条件，即在中点上所有邻角观测值的最或是值之和应等于360°，称这种条件为水平条件。

在中点多边形（图8-3）中的O点上各角观测值的平差值要满足

$$\bar{c}_1+\bar{c}_2+\bar{c}_3+\bar{c}_4+\bar{c}_5-360°=0$$

将式（8-1）代入上式得

$$v_{c_1}+v_{c_2}+v_{c_3}+v_{c_4}+v_{c_5}+w=0 \quad (8-18)$$

式中 $w=c_1+c_2+c_3+c_4+c_5-360°$

平差时若只考虑图形条件，不考虑水平条件，平差后各三角形的几何条件虽说得到满足，但中心点O的各邻角之和不能满足360°的几何条件，这一中点多边形的图形将不闭合而产生如图8-5所示的裂口。因而，在平差计算时必须考虑水平条件。

三、极条件

在三角网的三种基本图形中，除三角形外，在中点多边形和大地四边形中均有极条件，现分别介绍这两种基本图形的极条件方程式的组成方法。

（一）中点多边形中的极条件方程式

在中点多边形(图8-3)中，假若各观测角毫无误差，由任一边OA起算，依次经过三角形AOB、BOC、COD、DOE及EOA，又可算出OA的边长，在理论上它应与原有值相等。但

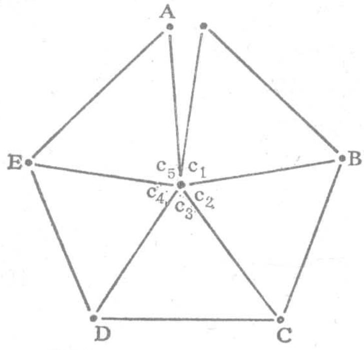

图 8-5

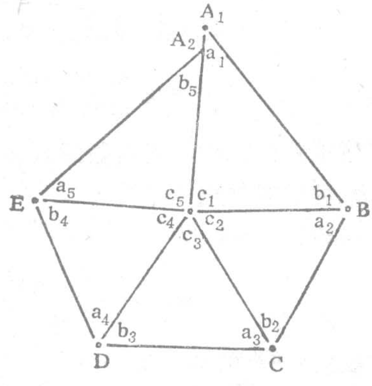

图 8-6

实际上观测角度都带有误差，如果只考虑图形条件和水平条件，这时极条件仍不能闭合，而出现如图8-6所示的情况，即$OA_1 \neq OA_2$。

我们在中点多边形中，从任一边出发，通过具有公共顶点的各三角形，推算到原出发边，必须使推算值等于原有值，称这种条件为极条件。用数学式子表达为

$$\frac{OB}{OA}\cdot\frac{OC}{OB}\cdot\frac{OD}{OC}\frac{OE}{OD}\cdot\frac{OA}{OE}=1$$

上式以角度正弦表示，则为

$$\frac{\sin\bar{a}_1}{\sin\bar{b}_1}\cdot\frac{\sin\bar{a}_2}{\sin\bar{b}_2}\cdot\frac{\sin\bar{a}_3}{\sin\bar{b}_3}\cdot\frac{\sin\bar{a}_4}{\sin\bar{b}_4}\cdot\frac{\sin\bar{a}_5}{\sin\bar{b}_5}=1 \tag{8-19}$$

上式为极条件方程式的原始形式，它是一个非线性函数。从《最小二乘法》中我们知道，参加平差的条件方程式必须是线性的，即只能是改正数v_i的一次函数式。为此，应将式（8-19）化为线性的，即以改正数表示的形式。

为化算方便，首先将式（8-19）两端取对数，得

$$\begin{aligned}&\lg\sin\bar{a}_1+\lg\sin\bar{a}_2+\lg\sin\bar{a}_3+\lg\sin\bar{a}_4+\lg\sin\bar{a}_5\\&-\lg\sin\bar{b}_1-\lg\sin\bar{b}_2-\lg\sin\bar{b}_3-\lg\sin\bar{b}_4-\lg\sin\bar{b}_5=0\end{aligned} \tag{8-20}$$

我们以$\lg\sin\bar{a}_i$为例，来研究式（8-20）的化算。

因为 $$\bar{a}_i=a_i+v_{a_i}$$

所以有 $$\lg\sin\bar{a}_i=\lg\sin(a_i+v_{a_i})$$

按台劳级数展开得

$$\lg\sin\bar{a}_i=\lg\sin(a_i+v_{a_i})=\lg\sin a_i+\frac{d\lg\sin a_i}{da_i}\ \frac{v''_{a_i}}{\rho''}+(\text{二阶以上各项})$$

因为v_{a_i}值是微小量，所以可将二阶及二阶以上各项略去。则有

$$\lg\sin\bar{a}_i=\lg\sin a_i+\frac{d\lg\sin a_i}{da_i}\ \frac{v''_{a_i}}{\rho''}$$

设 $$\frac{d\lg\sin a_i}{da_i}\cdot\frac{1}{\rho''}=\delta_{a_i} \tag{8-21}$$

则 $$\lg\sin\bar{a}_i=\lg\sin a_i+\delta_{a_i}\cdot v''_{a_i} \tag{8-22}$$

将上式代入式（8-20）中，经整理后得

$$\begin{aligned}&\delta_{a_1}v_{a_1}+\delta_{a_2}v_{a_2}+\delta_{a_3}v_{a_3}+\delta_{a_4}v_{a_4}+\delta_{a_5}v_{a_5}-\delta_{b_1}v_{b_1}-\\&-\delta_{b_2}v_{b_2}-\delta_{b_3}v_{b_3}-\delta_{b_4}v_{b_4}-\delta_{b_5}v_{b_5}+w=0\end{aligned} \tag{8-23}$$

式中 $$w=\lg\frac{\sin a_1\ \sin a_2\ \sin a_3\ \sin a_4\ \sin a_5}{\sin b_1\ \sin b_2\ \sin b_3\ \sin b_4\ \sin b_5}$$

式（8-23）即在平差计算中，用对数形式表达的极条件方程式。

下面讨论δ_{a_i}的计算方法

按式（8-21）求导数，得：

$$\delta_{a_i}=\frac{d\lg\sin a_i}{da_i}\cdot\frac{1}{\rho''}=\frac{\mu\,\mathrm{ctg}\,a_i}{\rho''} \tag{8-24}$$

式中，μ为对数模，$\mu=0.43429$。

严格来说，δ值应按式（8-24）计算，但对上式的导数还可以近似地写为

$$\frac{\mathrm{dlgsin}a_i}{\mathrm{d}a_i}\cdot\frac{1}{\rho''}=\frac{\Delta \mathrm{lgsin}a_i}{\rho''\Delta a_i(\text{弧度})}=\frac{\mathrm{lgsin}(a_i+\Delta a_i)-\mathrm{lgsin}a_i}{\Delta a_i''(\text{秒})}$$

上式中的分母为自变量的增量，分子为相应函数的增量。又 Δa_i 以秒表示，所以整个分式就是角度变化一秒时，其正弦对数的变化，即对数表中角度a_i的正弦对数的“每秒表差”。因此，δ_{a_i}可以在查$\mathrm{lgsin}a_i$值时一并查得。

由于秒差δ是极条件方程式系数，为了使这一系数不致过大或过小，δ值通常是取对数第六位为单位。因此在计算极条件自由项 $w_{极}$ 时，也应取对数第六位为单位，以保证条件方程式不变。因为δ是以对数第六位为单位，所以式（8-21）应改写为

$$\delta_{a_i}=\frac{\mu\cdot \mathrm{ctg}a_i}{\rho''}\cdot 10^6 \qquad (8\text{-}25)$$

当角度小于90°时δ值为正值；当角度大于 90° 和 小 于 180°时角度正弦对数随角值的增大而减小，此时δ值本身应为负值。

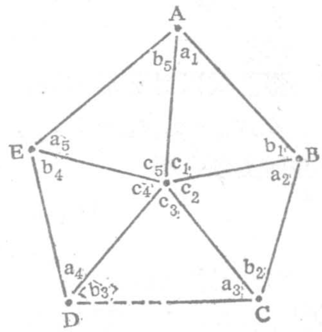

图 8-7

如果在极条件方程式中包含有未观测的 角 度 时，如 图 8-7 中 $\langle b_3\rangle$ 角 没有观 测，在这种情况下，中点多边形极条件仍然存在，原则上是按前述的方法组成极条件方程式。但必须将未观测的角度加以变化，才能正确地组成极条件方程式。因为 $\langle b_3\rangle$ 角未观测，按照平差理论，它就不能设改正数，须借助几何关系，以其它观测角度的改正数来代替，从图中可看出：

$$\langle b_3\rangle = 180^\circ - a_3 - c_3$$

微分上式并以改正数代替微分，得

$$v_{\langle b_3\rangle} = -v_{a_3} - v_{c_3}$$

这时极条件方程式应为：

$$\delta_{a_1}v_{a_1}+\delta_{a_2}v_{a_2}+\delta_{a_3}v_{a_3}+\delta_{a_4}v_{a_4}+\delta_{a_5}v_{a_5}-\delta_{b_1}v_{b_1}-$$
$$-\delta_{b_2}v_{b_2}-\delta_{\langle b_3\rangle}(-v_{a_3}-v_{c_3})-\delta_{b_4}v_{b_4}-\delta_{b_5}v_{b_5}+w=0$$

按相同改正数 v 集项，得

$$\delta_{a_1}v_{a_1}-\delta_{b_1}v_{b_1}+\delta_{a_2}v_{a_2}-\delta_{b_2}v_{b_2}+(\delta_{a_3}+\delta_{\langle b_3\rangle})v_{a_3}+$$
$$+\delta_{\langle b_3\rangle}v_{c_3}+\delta_{a_4}v_{a_4}-\delta_{b_4}v_{b_4}+\delta_{a_5}v_{a_5}-\delta_{b_5}v_{b_5}+w=0 \qquad (8\text{-}26)$$

式中 $$w=\lg\frac{\sin a_1\cdot\sin a_2\cdot\sin a_3\cdot\sin a_4\cdot\sin a_5}{\sin b_1\cdot\sin b_2\cdot\sin\langle b_3\rangle\cdot\sin b_4\cdot\sin b_5}$$

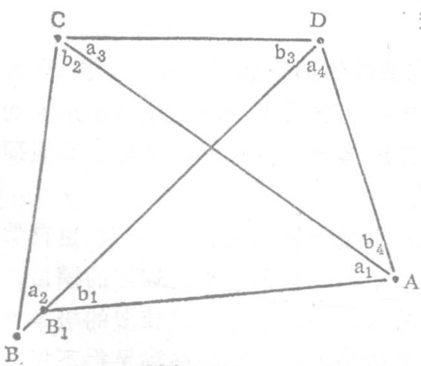

图 8-8

（二）大地四边形中极条件方程式

在大地四边形中（图8-8），如果各观测角度毫无误差，则由任一边 DB 起算，依次经过三角形 BDC、DAC、DAB推算得之DB 应与原有值相等。但是由于观测角度都带有误差，虽然图形条件得到满足，实际上推算出来的DB_1与原有值 DB 仍然不能相等（图 8-8），为了使推算值与原有 值 相 等，在平差时必须组成一个极条件。

在中点多边形中只能以中点O为极组成一个极条件。但在大地四边形中组成极条件方

程式时，除以对角线交点为极组成一个极条件外，四个顶点还可以作为极点组成不同的四个极条件。在这些极条件中只要能满足其中一个极条件，其它的条件都能满足，因此，在大地四边形中只有一个独立的极条件。

在图8-4中，如选择D点为极，则从DB边起算，用平差值依次经过三角形DBC、DAC、DAB推算至DB边，则推算值应等于原有值。用数学式表达为

$$\frac{DC}{DB}\cdot\frac{DA}{DC}\cdot\frac{DB}{DA}=1$$

上式以角度正弦表示则为

$$\frac{\sin\bar{a}_2}{\sin(\bar{b}_2+\bar{a}_3)}\cdot\frac{\sin\bar{a}_3}{\sin\bar{b}_4}\cdot\frac{\sin(\bar{a}_1+\bar{b}_4)}{\sin\bar{b}_1}=1$$

将上式以对数形式表示，并以台劳级数展开，整理得

$$\delta_{a_2}v_{a_2}+\delta_{a_3}v_{a_3}+\delta_{(a_1+b_4)}(v_{a_1}+v_{b_4})-\delta_{(b_2+a_3)}(v_{b_2}+v_{a_3})-\delta_{b_4}v_{b_4}-\delta_{b_1}v_{b_1}+w=0$$

合并同类项，得

$$\begin{aligned}&\delta_{(a_1+b_4)}v_{a_1}+\delta_{a_2}v_{a_2}+(\delta_{a_3}-\delta_{(b_2+a_3)})v_{a_3}-\\&-\delta_{b_1}v_{b_1}-\delta_{(b_2+a_3)}v_{b_2}-(\delta_{b_4}-\delta_{(a_1+b_4)})v_{b_4}+w=0\end{aligned}\qquad(8\text{-}27)$$

式中
$$w=\lg\frac{\sin a_2\cdot\sin a_3\cdot\sin(a_1+b_4)}{\sin(b_2+a_3)\cdot\sin b_4\cdot\sin b_1}$$

$\delta(a_i+b_j)$表示角度(a_i+b_j)的正弦对数秒差。

式（8-27）就是图8-4所示大地四边形以D点为极的极条件方程式。因为依次解算的三角形共同顶点是D，所以D就是极点。对于图8-4所示大地四边形也可以A、C、B任意一点为极点组成极条件方程式。如果以对角线交点为极（交点不是三角点，不应用文字表示，这里为了说明方便才以文字表示），则可同样列出极条件为：

$$\delta_{a_1}v_{a_1}-\delta_{b_1}v_{b_1}+\delta_{a_2}v_{a_2}-\delta_{b_2}v_{b_2}+\delta_{a_3}v_{a_3}-\delta_{b_3}v_{b_3}+\delta_{a_4}v_{a_4}-\delta_{b_4}v_{b_4}+w=0\qquad(8\text{-}28)$$

式中
$$w=\lg\frac{\sin a_1\cdot\sin a_2\cdot\sin a_3\cdot\sin a_4}{\sin b_1\cdot\sin b_2\cdot\sin b_3\cdot\sin b_4}$$

在这里指出三点：

1. 在平差计算中，对于大地四边形极条件方程式的组成，通常是以对角线交点为极点。这样在条件方程式中包含大地四边形中的所有角度，而且都是单角，组成的规律也很明显。

2. 如果选择顶点为极时，最好选择距对角线交点最近的那个点（也就是面积最大的三角形相对的顶点为极）。这样所组成的极条件方程式中，包含较多的小角度（小角度的正弦对数秒差比较大），即具有较大系数，这样平差后能使图形闭合的较好，而对以其他顶点为极的极条件都能得到很好的满足。现简单说明如下：

从理论上讲，在大地四边形中满足了图形条件和一个极条件，其它极条件也自然满足。但是由于计算中凑整误差的影响，往往只能使参加平差的极条件得到较好的满足，对于未参加平差的极条件，则有两种情况：对于大角度较多，也就是小系数较多的极条件一般能较好地满足；对于小角度较多，也就是大系数较多的极条件，则往往满足得不好。因此应将小角度较多，也就是大系数较多的极条件参加平差，它得到满足后，对其它系数较

小的极条件也能得到较好的满足。

3。在大地四边形中有未设测站的点时，如图8-9中之D点未设测站，即角度x和y未进行观测，此时，大地四边形的极条件仍然存在。列出这一条件时最好是选择未设测站的点（即D点）为极，这样可以避免未观测的角度x及y在极条件方程式中出现。极条件方程式为：

$$\delta_{(a_1+b_3)}v_{a_1}+\delta_{a_2}v_{a_2}+(\delta_{a_3}-\delta_{(b_2+a_3)})v_{a_3}-\delta_{b_1}v_{b_1}-\delta_{(b_2+a_3)}v_{b_2}-(\delta_{b_3}-\delta_{(a_1+b_3)})v_{b_3}+w=0$$

式中 $$w=\lg\frac{\sin a_2\cdot\sin a_3\cdot\sin(a_1+b_3)}{\sin(b_2+a_3)\cdot\sin b_3\cdot\sin b_1}$$

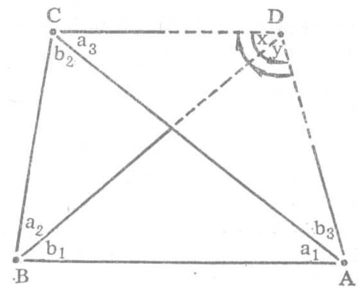

图 8-9

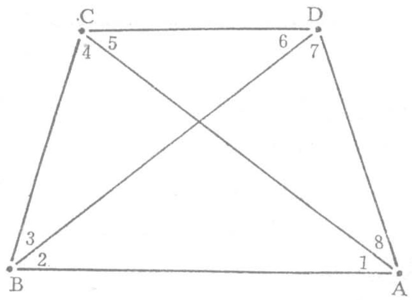

图 8-10

〔例题8-1〕大地四边形(图8-10)中，各观测角值列于表 8-1 中，试列出条件方程式。

表 8-1 观 测 值 表

角 号	观	测	值	角 号	观	测	值
1	51°	37′	51″.9	5	38°	08′	09″.7
2	38	14	31.1	6	51	44	08.6
3	29	51	19.6	7	60	21	56.9
4	60	16	19.2	8	29	45	43.5

〔**解**〕根据前面所述，在此图形中共有三个图形条件和一个极条件，现分别列出如下：

1。图形条件

对三角形ABC $\qquad v_1+v_2+v_3+v_4+w_a=0$

对三角形BCD $\qquad v_3+v_4+v_5+v_6+w_b=0$

对三角形ACD $\qquad v_5+v_6+v_7+v_8+w_c=0$

式中 $w_a=1+2+3+4-180°=+1''.8$

$w_b=3+4+5+6-180°=-2''.9$

$w_c=5+6+7+8-180°=-1''.3$

2。极条件

以对角线交点为极，则极条件方程式为

$$\delta_1v_1-\delta_2v_2+\delta_3v_3-\delta_4v_4+\delta_5v_5-\delta_6v_6+\delta_7v_7-\delta_8v_8+w_d=0$$