普通高等教育"十五"国家级规划教材

21世纪数学规划教材

数学基础课系列

2nd Edition

微分几何（第二版）

Differential Geometry

陈维桓 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

博雅

21世纪数学规划教材

数学基础课系列

2nd Edition

微分几何（第二版）

Differential Geometry

陈维桓 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

微分几何 / 陈维桓编著 . — 2 版 . —北京 : 北京大学出版社 , 2017. 8
ISBN 978-7-301-28654-8

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①微分几何—高等学校—教材 Ⅳ. ① O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 194737 号

书　　名	微分几何(第 2 版)
	WEIFEN JIHE
著作责任者	陈维桓　编著
责任编辑	尹照原　邱淑清
标准书号	ISBN 978-7-301-28654-8
出版发行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址	http://www.pup.cn　新浪微博：@ 北京大学出版社
电子信箱	zpup@pup.cn
电　　话	邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
印 刷 者	北京大学印刷厂
经 销 者	新华书店
	890 毫米 × 1240 毫米　A5　14.125 印张　407 千字
	2006 年 6 月第 1 版
	2017 年 8 月第 2 版　2017 年 8 月第 1 次印刷
定　　价	38.00 元

第 2 版前言

这次第 2 版对本书做了一次全面的修正, 并且添加了第六章的 §6.6, §6.7 和 §6.8, 把原来的 §6.6 改成 §6.9. 所添加的三节主要是引进大范围的抽象曲面 (二维黎曼流形) 的概念, 并且在抽象曲面上系统地展开它的几何学, 也就是独立地、以内在的方式讲述内蕴微分几何.

作为本科生的"微分几何"课, 可以把 §6.6, §6.7 和 §6.8, 以及第七章作为选讲内容, 也可以供学生自学用. 这部分内容对于学生进一步了解内蕴微分几何有很大的帮助, 也为学生今后学习后续的微分几何课程有帮助.

陈维桓

2017 年 5 月于北京大学

前　言

本书是基础数学专业本科课程"微分几何"的教科书，它的前身是我在 1990 年编写出版的《微分几何初步》. 自从《微分几何初步》问世以来，北京大学数学学院一直以该书作为"微分几何"课程的教材，我亲自讲授该书也有十多年了. 经过长期的教学实践，我们感到该书条理性强，简明扼要，节奏明快，重点突出，取材和体例都很适用于教学的需要. 同时，该书也受到许多兄弟院校同行的好评，并且被采用为"微分几何"课程的教材或教学参考书. 因此，该书在 1995 年获得教育部优秀教材一等奖. 但是，该书出版 15 年以来，微分几何课的教学改革已经取得很多进展，在教学实践中也积累了更多的经验，因此有必要在此基础上编写新的教科书. 有幸的是，我们关于编写新的微分几何教科书的打算被列入教育部"十五"教材规划. 本书就是在这种背景下完成的.

由于《微分几何初步》的取材和体例是成功的，因此这本《微分几何》仍然采用同样的取材原则和体例，但是在文字上是全部重新写过的，并且在内容方面吸收了教学改革和教学实践的新鲜经验. 大体上说，新的教科书与《微分几何初步》相比较有以下几点改变:

1. 加强了曲线的切触阶的叙述，增添了密切球面的计算 (§2.6).

2. 增设了新的一节论述存在对应关系的曲线偶，特别是详细解说了关于 Bertrand 曲线的理论 (§2.7).

3. 增添了正则曲面上在不同的参数表示重叠的部分参数变换的计算 (§3.1)，这为今后要学习的微分流形理论提供了具体的模型.

4. 对曲面在一点的切空间重新作了解释，特别是说明自变量的微分 $\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$ 作为切空间上的线性函数的意义 (§3.2).

5. 重新叙述了保角对应的充分必要条件的证明，增加了等温参数系存在性的证明 (§3.5).

6. 增加了包络的概念, 具体地计算了单参数平面族的包络面, 并说明了它与可展曲面的关系 (§3.6).

7. 通过直接导出法曲率表达式的方式来引进主曲率和主方向的概念, 使得概念的引入更加自然 (§4.2).

8. 引进了指数映射和法坐标系的概念, 并且改进了关于测地极坐标系的叙述 (§6.3).

9. 增添了洛伦兹空间中的伪球面理论和负常曲率曲面模型 (§6.4).

10. 增加了大范围的 Gauss-Bonnet 定理的证明 (§6.6).

11. 全面改写了第七章, 特别是关于外形式、外微分式、外微分的叙述, 使得这些内容更便于初学者接受. 在第七章中还增加了大范围 Gauss-Bonnet 定理用外微分法的证明 (§7.5), 增加了在微分几何中外微分法的应用举例 (§7.6).

12. 全面改写了附录. 在附录中删除了关于张量概念的叙述, 重新给出一阶偏微分方程组的可积条件的证明, 增加了系数为复解析函数的一次微分式的积分因子存在性的证明, 增加了自共轭线性变换的特征值和特征向量的有关结论, 并且编写了数学软件包 MATHEMATICA 的使用入门和用 MATHEMATICA 做微分几何课的几个课件.

13. 我们还增添了一些习题, 并在书末增加了习题解答和提示.

由此可见, 我们对于第四章和第五章改动比较少. 实际上, 我们认为在《微分几何初步》中关于曲面论基本定理的证明是十分清晰的, 读者也很容易理解证明的步骤和方法, 关键是一阶偏微分方程组的可积条件, 在曲面的情形该条件就成为 Gauss-Codazzi 方程. 原书的这两章的叙述是简明扼要的, 是明白易懂的, 因此在新的书中没有做大的变动. 但是, 在教学实践中, 我们感到关于一阶偏微分方程组的可积条件的证明可以用读者更加容易接受的方式来叙述, 因此采用另一种更加直接的证明. 以上所有的变动都来自教学实践, 目的是使新的教科书更加贴近读者, 便于读者的理解和使用.

“微分几何” 课的主要内容是三维欧氏空间中曲线和曲面的理论, 基本上是在 Gauss 的年代已经完成的, 距今已经有 150 年的历史. 因此, 关于该课程如何进行教学改革, 一直有不同的意见. 大家所关心的

问题往往是: 开设该课程是否是必要的? 它能否包括在别的课程里? 它的内容如何现代化? 等等. 目前在我国虽然大多数综合大学和师范大学数学系把 "微分几何" 课列入了教学计划, 但是有的把它作为选修课, 而不是必修课, 结果是许多数学系本科毕业生没有学过 "微分几何" 课. 我们认为, 尽管 "微分几何" 课的内容是经典的, 但是它所传授的数学思想和观念仍然是重要的, 应该作为数学系学生的必修课. 事实上, "微分几何" 课大体上安排在 "解析几何" "高等代数" 和 "数学分析" 之后, 是本科学生在结束基础课学习后首次遇到的一门综合性比较强的课程. 首先, 在这门课里要系统地运用解析几何的知识, 要运用微积分的工具, 特别是要用线性代数知识去处理问题, 因此 "微分几何" 课是运用这三大基础课知识的理想场所. 一般来说, 会用学过的知识去解决问题能够使学生的成就感油然而生, 从而激发起更大的学习兴趣. 另外, "微分几何" 课作为几何课, 是以培养学生的空间想象能力和直觉能力为课程的主要任务, 而空间想象能力和直觉能力是创造的源泉之一, 特别是通过 "微分几何" 课的学习, 学生对于空间观念的了解和理解将会提高到一个新的水平. 再有, 目前计算机在各种领域中的应用越来越普及, 几何造型和几何变换的知识需要被更多的人所掌握, 这也是 "微分几何" 课的任务之一. 因此, 我们认为在大学数学系 "微分几何" 课不仅不能削弱, 并且需要进一步加强, 经典内容的价值决不能被忽略.

"微分几何" 课不仅是要介绍描述曲线和曲面的形状的方法、各种曲率的概念, 更重要的是要让学生知道什么是决定曲线和曲面形状的完全不变量系统, 也就是说曲线论和曲面论的基本定理应该是 "微分几何" 课的重点. Gauss-Codazzi 方程尽管是 "微分几何" 课中比较繁杂的内容, 但是它是课程的重要组成部分, 是理论性比较强的部分, 不能回避它.

曲线和曲面的整体性定理是微分几何中漂亮的结果, 但是它们的证明方法相对来说比较专门一点, 因此不应该成为本科生的 "微分几何" 课的内容. 我们选择 "活动标架和外微分法" 作为本书的最后一章. 原因很简单, 因为活动标架和外微分法是 20 世纪由大几何学家 Elie

Cartan 发展起来的方法, 后来由几何大师陈省身发扬光大, 炉火纯青地、成功地用于微分几何的研究. 现在, 外微分式和外微分已经成为现代数学的很有用的工具, 在 “微分几何” 课中介绍和普及这方面知识是适宜的. 在**周学时为 4** 的情况下, 我们经常把第一章到第七章全部内容作为课程的内容, 对于有经验的教员来说完成这样的教学计划并不很困难. 因为在第七章, 除了引进新的方法以外, 并没有新的几何概念, 所以学生在学习的时候一方面是 “温故知新” , 一方面在用新的方法观察已知的问题, 会激发起更大的学习兴趣. 当然, 如果**周学时是 3**, 则只能把第一章到第六章作为课程的内容, 而第七章供学生自己进一步学习使用. 根据我自己的教学实践证明, 低年级学生是能够接受 “活动标架和外微分法” 的, 而本书所做的改进应该使学生学起来感到更加容易.

本书附录介绍微分方程的几个定理的想法是为了加强本书的自足性. 大学基础数学本科的 “微分方程” 课差不多和 “微分几何” 课是同时开设的. 另外, 在 “微分方程” 课中, 关于一次微分式的积分因子往往侧重于在特殊情形下寻求它的方法, 而不是它的存在性; 关于一阶偏微分方程的可积条件的证明却常常是被忽略的. 但是这两件事在微分几何中是非常重要的, 所以我们给出了完整的证明. 在教学时间有限的情况下, 教员不必讲授这些内容, 但是需要讲清楚它们的意义, 然后留给学生自学. 关于系数为复解析函数的一次微分式的积分因子存在性是证明曲面上存在等温坐标系的关键, 考虑到现有文献很难找到它的初等证明, 因此本书的附录是这方面文献的必要补充. 自共轭线性变换是线性代数中的重要理论, 它在微分几何课程中的应用是引人注目的, 为了方便读者起见, 在附录中简单地介绍了我们要用到的有关自共轭线性变换的主要概念和结果.

本书另一个附录是关于用 MATHEMATICA 做微分几何课件. MATHEMATICA 是功能十分强大的数学软件包. 我们在 “微分几何” 课的教学改革中, 曾经用 MATHEMATICA 显示曲面的图形, 特别是展示从悬链面到正螺旋面的等距变形, 收到很好的效果. 由于 MATHEMATICA 兼有数值计算、符号演算和图形显示的功能, 对于像 “微

积分" 和 "微分几何" 这样综合性比较强的课程, 它是十分有用的辅助工具. 我曾经在文科学生的 "高等数学" 课中用一小时讲解 MATHEMATICA 的基本使用方法, 然后安排一定的上机时间, 结合课程让学生在计算机上学习微积分, 收到良好的效果. 现在, 我们在附录中介绍用 MATHEMATICA 做微分几何课件, 目的也是供学生自学, 通过学生自己动手学习更多的数学知识和几何知识. 如果学生有条件使用 MATHEMATICA 软件包, 则在 "微分几何" 课中可以做很多课件. 曾经有一位本科学生在 "微分几何" 课后用 MATLAB 编写了一个程序来判断两个给定的二次微分形式是否满足 Gauss-Codazzi 方程, 他在递给我看的时候表露出来的兴奋心情至今令人难忘. MATHEMATICA 不仅是学习数学的辅助工具, 也是研究数学的辅助工具. 我们的附录应该被看成是学习该软件的初等入门.

我们在本书的最后附加了部分习题的解答和提示, 目的是提高本书的可用性. 微分几何的证明题往往比较困难, 我们的重点是给出证明题的提示. 如果读者熟悉 MATHEMATICA 的话, 计算题在原则上都可以通过该软件来做.

根据我们在北京大学教学的经验, "微分几何" 的后继课应该是 "微分流形", 一般安排在大学 4 年级开设. 原因是, "微分流形" 课的主要教学目标是扩大空间的观念, 并且学习如何处理局部定义的数学对象和整体定义的数学对象之间的关系, 学习光滑流形上的微积分, 这对学生进入现代数学的学习是十分重要的. 该课程的教材可用本书的参考文献 [2].

在本书的写作过程中, 作者得到北京大学数学科学学院、北京大学研究生院、北京大学教材建设委员会、北京大学出版社以及国家自然科学基金 (项目号: 10271004) 的支持和资助, 作者在此向他们表示衷心的感谢. 北京大学数学学院的多位老师曾经用《微分几何初步》讲授过 "微分几何" 课, 特别是王长平教授和莫小欢教授现在主持 "微分几何" 课的教学, 对《微分几何初步》提供了不少意见和建议, 我对北京大学和兄弟院校的各位老师使用该书、并且提出宝贵的意见表示衷心的感谢.

本书完成之后，北京大学出版社特别邀请李兴校教授审读一遍，在此我对他的认真、负责的工作表示感谢. 最后，作者对本书责任编辑邱淑清同志和刘勇同志的卓有成效的辛勤工作和一贯的支持表示深切的谢意. 限于作者的水平，本书中的不足之处肯定是存在的，诚恳地希望读者能不吝指正.

陈维桓

2005 年 6 月于北京大学

目　　录

绪　论

这是本书的开篇. 本书是"微分几何"课程的教材. 在这里我们打算简要地介绍本课程的主要内容和教学目标.

几何学是数学中最古老的一门学科. 如果从欧几里得的《几何原本》(*Elements*) 算起, 至今已有两千三百多年的历史, 而且该学科长盛不衰, 其内涵一直在不断地延展之中, 以至于现在人们很难确切地回答"什么是几何学?"的问题.

相传几何学起源于古埃及尼罗河泛滥后为整修土地而产生的测量法. 它的英文名称"geometry"是由"geo"和"metry"组成的, 其意义就是"土地测量". 在 1607 年利玛窦和徐光启把欧几里得的 *Elements* 合译成中文, 定名为《几何原本》,"几何学"的中文译名由此而得, 它十分形象地表现了"geometry"的原始的"大小"含义.

Thales (约公元前 625 年到 547 年) 曾经利用两个三角形的全等性质做过间接的测量工作. Pythagoras(约公元前 580 年到 500 年) 学派给出了直角三角形的边长之间的关系, 这种关系 (勾三、股四、弦五) 在我国汉朝人撰写的《周髀算经》中以周公姬旦与商高问答的形式也有记述. 但是几何学逐渐发展成理论的数学应该是在它从古埃及传到希腊之后. 哲学家 Plato (约公元前 429 年到 348 年) 确立了今天几何学中的定义、公设、公理、定理等概念. 古希腊数学所追求的是从少数几个原始的假定 (定义、公设、公理) 出发, 经过逻辑推理, 得到一系列命题, 由此积累了相当丰富的数学知识. 约在公元前 300 年前后, 欧几里得把当时古希腊所能得到的全部数学知识组织成一个严密的逻辑系统, 写成了《几何原本》. 这是人类思想史上的一件大事, 是人类理性思维的第一个成功范例, 是数学的公理化方法的先驱, 其影响远远超越数学学科本身. 从此,"几何学"成为"逻辑推理系统"的代名词.

在古希腊时代,《几何原本》代表了数学的全部. 在欧几里得的

《几何原本》中所研究的最主要的几何图形是三角形和四边形等所谓的直线形, 以及最简单的曲线 —— 圆. 在这里, 所谓的几何图形已经遵循《几何原本》的定义, 即"点是没有部分的", "线有长无宽"等, 这就是说在讲到几何图形时已经运用了数学中的"抽象"手段. 例如: 三角形的边只有长度, 没有宽度; 三角形的顶点是两条邻边的公共点, 它没有大小. 关于单个的三角形, 最主要的问题是如何确定它的形状和大小, 而不计它在空间中位于何处. 对此我们有判断两个三角形全等的定理: 若三边对应相等、或两边及其夹角对应相等、或两角及其夹边对应相等, 则这两个三角形全等. 至于确定圆的形状和大小比较简单, 只要用一个量就可以了, 即有相同半径的任意两个圆有相同的形状和大小.

恩格斯在《自然辩证法》和《反杜林论》中对数学产生的历史、发展的动力及其应用和作用都有精辟的论述, 他给数学下了一个最恰当的最有概括性的定义. 他说: "数学的研究对象是现实世界中的数量关系和空间形式." 这就是说, "数"和"形"是数学的两大基本概念, 整个数学是围绕这两个基本概念的演变而发展的, 同时也是通过这两个基本概念应用到各个不同的领域中去的. "几何学"当然是侧重于"形"的数学分科. 但是, "空间形式"和"数量关系"两者是密切相关而不可分隔的. 特别是在 17 世纪, 笛卡儿和费马发明了坐标系, 从此可以把数与数之间的关系描写为图形, 反过来可以把图形表示成数与数之间的关系. 这样, 按照坐标系把图形化为数与数之间关系的问题进行研究的数学分科就称为解析几何学. 在古希腊时代 Apollonius (约公元前 262 年到公元前 190 年) 等人曾经系统地研究过圆锥曲线的性质, 然而, 在解析几何学中圆锥曲线恰好能够作为二次曲线的理论进行系统的代数处理. 于是, 解析几何学把一次曲线 (直线)、一次曲面, 以及二次曲线 (圆锥曲线)、二次曲面作为主要的研究对象. 解析几何学的研究范围与初等几何学相比已经有很大的拓广, 除了研究圆和球以外, 还要研究椭圆、抛物线、双曲线和椭球面、椭圆抛物面、双曲抛物面、单叶双曲面、双叶双曲面等等. 要确定这种曲线和曲面的形状和大小, 只要从它上面的点的坐标所满足的方程式的系数构造出若干代数表达式, 当两条

二次曲线或两个二次曲面全等时, 相应的代数表达式便是相同的, 反之亦然. 我们通常把这些代数表达式称为二次曲线或二次曲面的 (代数) 不变量, 其意义是它们只依赖于二次曲线或二次曲面的形状及其大小, 与它们在平面上或空间中的位置无关, 同时也与平面上或空间中所选取的坐标系无关.

笛卡儿和费马的坐标法将变数引进了数学, 从而将运动引进了数学, 因此为微积分的发明创造了必要的环境和条件. 微积分要解决的首要问题是求曲线的切线斜率, 以及曲线所围区域的面积, 所以微积分在它产生的时刻就是和解决几何问题联系在一起的. 作为微积分在几何学中的应用, 微分几何学应运而生, 它的主要内容是研究如何描述空间中一般曲线和曲面的形状, 以及寻求确定曲线、曲面的形状及其大小的完全不变量系统. 对于三维欧氏空间中的一条光滑曲线, 用它的参数方程的若干次微商构造适当的代数表达式或它的积分可以得到它的弧长、曲率和挠率, 它们刻画了曲线的形状和大小, 并且两条曲线能够在一个刚体运动下彼此重合的充分必要条件是它们的弧长相同, 并且曲率和挠率作为弧长的函数也对应地相同. 因此, 弧长、曲率和挠率构成了空间曲线的完全不变量系统. 关于空间中的曲面, 情况比较复杂一点. 与曲线的弧长相对应的是曲面的第一基本形式 (一个正定的二次微分形式), 通常称为曲面的度量形式, 它可以用来计算曲面上曲线的长度、两个切向量的夹角和曲面上一块区域的面积等. 描写曲面的形状还需要另一个二次微分形式, 称为曲面的第二基本形式. 这两个基本形式合在一起构成了曲面的完全不变量系统, 空间中两个曲面能够在一个刚体运动下彼此重合的充分必要条件是它们在经过一个参数变换之后有相同的第一基本形式和第二基本形式.

对微分几何学做出过杰出贡献的数学家有 Euler (1707—1783) 和 Monge (1746—1818), 但是他们的工作主要限于如何描写和刻画曲面的形状. 比如, Euler 发现曲面在任意一点处的法曲率 $\kappa_n = \mathrm{II}/\mathrm{I}$ 是切方向的函数, 它在两个彼此正交的切方向上分别取到它的最大值和最小值, 称为曲面在该点的两个主曲率. 曲面在任意一点沿任意一个切方向的法曲率能够用主曲率表示出来, 该公式现在称为 Euler 公式.

对微分几何学做出划时代贡献的是 Gauss (1777—1855), 他在 1827 年发表的《关于一般曲面的研究》中发现曲面的第一基本形式和第二基本形式不是彼此独立的, 他所导出的在曲面的第一基本形式和第二基本形式之间的关系式现在称为曲面的 Gauss 方程. 根据 Gauss 方程得知: 曲面在任意一点的两个主曲率的乘积仅与曲面的第一基本形式有关, 而与曲面的第二基本形式无关. 现在, 人们把曲面在任意一点的两个主曲率的乘积称为曲面在该点的 Gauss 曲率. Gauss 的这个惊人的发现意味着: 如果在平面区域上给定一个正定的二次微分形式 (称为度量形式), 构成一个抽象曲面, 则这个抽象曲面便有一定的弯曲性质, 其弯曲性质是由给定的度量形式决定的, 即该曲面的 Gauss 曲率.

在 Gauss 的时代之前, 关于欧几里得的《几何原本》中的第五公设 (或与其等价的平行公理: 在平面上经过直线外一点可作、并且只能作一条直线与已知直线平行) 是否独立于其他公设已经经历了长期的争论和讨论, 人们试图从欧几里得的《几何原本》中的其余公设导出第五公设, 均遭失败. Gauss 已经认识到可以用别的平行公理, 例如假设经过直线外一点有一束直线与已知直线不相交, 代替欧几里得的平行公理, 所得的几何系统仍然是相容的. 这个发现率先由罗巴切夫斯基 (1792—1856) 和 Bolyai(1802—1860) 各自独立发表, 后人称这种几何学为非欧几何学. Gauss 在《关于一般曲面的研究》中的上述结果在更深的层次上说明, 非欧空间与欧氏空间的实质区别在于空间具有不同的度量形式, 从而具有不同的弯曲性质. 欧氏空间是平直的 (Gauss 曲率为零), 而非欧空间是负常弯曲的 (Gauss 曲率是负常数). Gauss 的这个惊人的发现开创了一个新时代: 过去微分几何所研究的是欧氏空间中的曲线和曲面的弯曲性质, 而现在赋予度量形式的空间本身就是微分几何的研究对象. 人们把 Gauss 开创的只赋予度量形式的曲面论称为曲面的内蕴几何学. 他的这个思想后来被 Riemann (1826—1866) 进一步阐明. Riemann 认识到度量形式是加在流形上的一种结构, 而同一个流形可以有众多不同的度量结构. 现在人们把指定了一个度量结构的 n 维流形称为 n 维 Riemann 流形, Riemann 流形上的几何学称为黎曼几何学 (参看参考文献 [5]). 到目前为止, Riemann 流形是数学