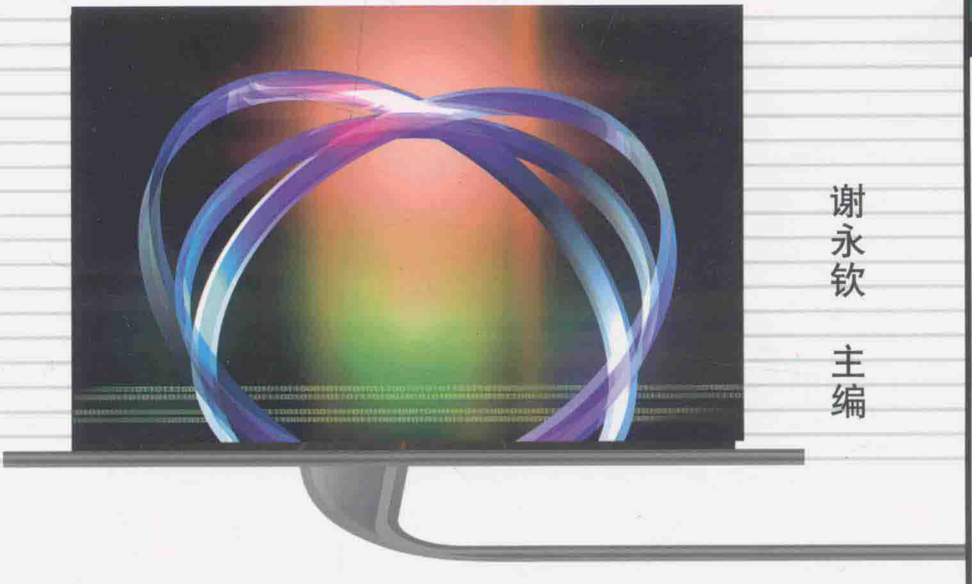
21世纪高等学校规划教材

（第2版）

概率论与数理统计学习指导

GAI LU LUN YU SHU LI TONG JI XUE XI ZHI DAO

GAI LU LUN YU SHU LI TONG JI XUE XI ZHI DAO



谢永钦　主编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

GAI LU LUN YU SHU LI TONG JI XUE XI ZHI DAO

O21
242

21世纪高等学校规划教材

概率论与数理统计学习指导

(第2版)

主　编　谢永钦
副主编　薛　雷　吴松华

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

全书共分10章，内容包括概率的基本概念，随机变量，多维随机变量，随机变量的数字特征，大数定理和中心极限定理，数理统计的基本概念，参数估计，假设检验，方差分析和回归分析等. 在概括简述各其本知识点的基础上，构建了各章重点知识结构图. 旨在帮助初学者在较短的时间内掌握概率论与数理统计这门课程的知识结构. 同时，对教材中的所有习题进行了详细的分析与解答. 希望能帮助读者熟练掌握各类题型的解题方法与技巧. 做到对本课程基础知识的融会贯通，达到举一反三的目的.

由于本书较为完整地讲述了概率论与数理统计的各知识点，且配有习题原题. 因此，可独立作为高等学校非数学专业学生学习《概率论与数理统计》的辅导书或复习考研的辅导书，也可作为教师的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导/谢永钦主编. —2版. -- 北京：北京邮电大学出版社，2014.8(2016.7重印)
ISBN 978-7-5635-4068-6

Ⅰ.①概… Ⅱ.①谢… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第176096号

书　　名　概率论与数理统计学习指导(第2版)
主　　编　谢永钦
责任编辑　张保林
出版发行　北京邮电大学出版社
社　　址　北京市海淀区西土城路10号(100876)
电话传真　010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
网　　址　www3.buptpress.com
电子信箱　ctrd@buptpress.com
经　　销　各地新华书店
印　　刷　北京泽宇印刷有限公司
开　　本　787 mm×960 mm　1/16
印　　张　10.5
字　　数　235千字
版　　次　2014年8月第2版　2016年7月第3次印刷

ISBN 978-7-5635-4068-6　　定价：20.00元

前　　言

21 世纪高等学校规划教材《概率论与数理统计》(第 2 版)(谢永钦主编,北京邮电大学出版社出版)是全国普通高等院校广泛采用的教材. 本书是该教材的学习和教学参考书. 也可以独立作为概率论与数理统计的学习与教学参考书,或复习考研的辅导书.

本书是作者在多年教学实践的基础上编著而成的,旨在帮助读者全面地、系统地掌握概率论与数理统计的基础理论、方法和技巧,同时通过对大量习题的分析和解答,帮助读者学习和掌握解题方法和解题技巧,以达到举一反三、触类旁通的学习效果. 在教材习题中配有大量的考研真题,以便辅助读者进一步提升知识水平,为考研奠定坚实的基础. 该书完全与教材同步,根据教与学的要求及目前研究生入学考试的命题趋势,我们重点编写了前八章. 对后面两章,我们也给出了全部习题详解.

本书由谢永钦教授主编,薛雷、吴松华为副主编,梁小林、陈新美、赵晓芹、陈长月、孙予杰、冯春明等参加编写和讨论. 在编写过程中,许多具有丰富教学经验的一线教师提出了宝贵意见,在此表示衷心感谢.

本书内容丰富,有鲜明的特色. 限于编者水平有限,不妥和疏漏之处在所难免,肯请广大同行和读者提供宝贵意见.

编　　者

2014. 7 于长沙

目　　录

第1章 概率论的基本概念

1.1 基本内容与要求

1.1.1 基本内容

样本空间与随机事件、事件的关系与运算、随机事件的概率的概念、概率的基本性质、古典概型、几何概型、条件概率、概率的基本公式、事件的独立性、独立重复试验.

1.1.2 基本要求

(1)了解样本空间的概念,理解随机事件的定义,掌握事件的关系及运算性质.

(2)理解概率、条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会计算古典型概率和几何型概率,掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式、Bayes 公式.

(3)理解事件独立性的概念,掌握用事件独立性进行概率计算的方法,理解独立重复试验的概念,掌握计算有关事件概率的方法.

1.2 内容图解

〈随机试验 E〉→〈随机事件 $A\subset$样本空间 Ω〉→〈随机事件 A 的概率 $P(A)$〉

$$\xrightarrow{\text{计算方法}}\left\{\begin{array}{c}\text{古典概型}\\ \text{几何概型}\\ \text{五大公式}\left\{\begin{array}{c}\text{加法 } P(B\cup C)\\ \text{减法 } P(B-C)\\ \text{条件概率 } P(B|C)\text{和乘法公式 } P(BC)\\ \text{全概公式}\\ \text{贝叶斯公式}\end{array}\right\}\\ \text{独立性}\\ \text{伯努利概型}\end{array}\right\}$$

1.3 内容提要

1.3.1 随机事件与样本空间

1. 随机事件的相关概念

必然现象:在一定条件下必然出现或必然不出现的现象.

随机现象:在一定条件下,试验有多种可能出现的结果,但事先又不能确定是哪一种结果出现,此类现象称为随机现象.也简述为可能出现也可能不出现的现象.

随机试验:若试验满足如下三个条件:(1)可以在相同条件下重复进行;(2)每次试验可能出现的结果不止一个,且可以事先明确所有可能出现的结果;(3)进行一次试验之前,不能完全确定会出现哪一个结果.

样本空间:试验的所有可能的结果构成的集合,用 Ω 表示.

样本点:试验的不可分的基本结果.

事件:样本空间的子集,即随机试验中可能出现的结果,常用 $A,B,C,\cdots$ 表示.

必然事件:每次试验中必然发生的事件,用 Ω 表示.

不可能事件:每次试验中不可能发生的事件,用 $\varnothing$ 表示.

基本事件:由一个样本点构成的单点集.

2. 事件间的关系和运算

关系:包含,相等,互不相容,互逆.

(1)包含:$A\subset B$:事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

(2)相等:$A=B$:$A\subset B$ 且 $A\supset B$.

(3)互不相容:事件 A 与 B 不可能同时发生,即 $AB=\varnothing$.

(4)互逆:若 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$,则称 A 与 B 互逆.

显然,互逆一定互斥,互斥不一定互逆.

运算:并,交,差.

(5)并:$A\cup B$:事件 A 与 B 中至少有一个发生.

(6)交:$A\cap B$:事件 A 与 B 同时发生.

(7)差:$A-B$:事件 A 发生而 B 不发生.

(8)完备事件组:若事件 $A_1,A_2,\cdots$ 满足 $\bigcup\limits_i A_i=\Omega$,且 $A_iA_j=\varnothing\,(i\neq j)$,并且 $P(A_i)>0$,则称之为完备事件组.完备事件组可以是有限的,也可以是可数的.

3. 运算律

(1)交换律;(2)结合律;(3)分配律;(4)对偶律.

1.3.2 事件的概率

概率是事件在一次试验中出现可能性大小的度量,用 $P(A)$表示事件 A 的概率.

1. 概率的概念

设 Ω 是样本空间,对于每一个事件 A,都有唯一的实数 $P(A)$和它对应,且 $P(A)$满足下列条件:

(1)非负性:$P(A)\geqslant 0$;

(2)规范性:对于必然事件 Ω,有 $P(\Omega)=1$;

(3)可列可加性:对于两两互斥的可列无穷多个事件 A_i,$i=1,2,\cdots$,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

2. 概率的基本性质

(1)$P(\varnothing)=0$,注意,概率为零的事件不一定是不可能事件!

(2)有限可加性:设事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$两两互斥,则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(3)如果 $A\subset B$,则

$$P(B-A)=P(B)-P(A),\text{且 } P(A)\leqslant P(B).$$

(4)对于任意事件 A,有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(5)对于任意事件 A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

3. 古典概型

古典概型:若随机试验 E 的样本空间 Ω 只有有限个样本点,即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,且每个基本事件在一次试验中发生的概率相等,即 $P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})$,则称试验 E 为古典概型.

设任一事件 A,它是由 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$ 组成的,则有

$$\begin{aligned}P(A)&=P(\{\omega_1\}\cup\cdots\cup\{\omega_m\})=P(\{\omega_1\})+\cdots+P(\{\omega_m\})\\&=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.\end{aligned}$$

4. 几何概型

定义 设试验具有以下特点:

(1)样本空间 Ω 是一个几何区域,这个区域大小可以度量(如长度、面积、体积等),并把

Ω 的度量记作 $m(\Omega)$；

(2)向区域 Ω 内任意投掷一个点，落在区域内任一个点处都是“等可能的”．或者设落在 Ω 中的区域 A 内的可能性与 A 的度量 $m(A)$ 成正比，与 A 的位置和形状无关．

则称此试验为几何概型．

如果也用 A 表示“掷点落在区域 A 内”的事件，那么事件 A 的概率可用下列公式计算：

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

其中 m 为几何度量(长度、面积、体积)．

5. 条件概率

定义　设 A、B 是两个事件，且 $P(A)>0$，则称 $\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 已发生的条件下事件 B 发生的条件概率，记为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$.

条件概率是概率的一种，所有概率的性质都适合于条件概率．

例如 $P(\Omega|B)=1\Rightarrow P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$.

6. 计算概率的几个公式：

(1)加法公式：对于任意事件 A,B,C，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

上式可以推广到多个事件的情形．

(2)减法公式：对于任意两个事件 A,B 有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

(3)乘法公式：对于任意事件 A,B，若 $P(A)>0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B|A).$$

对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}).$$

(4)全概率公式：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个完备事件组，则对于任意事件 A，有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|A_i)P(A_i).$$

(5)贝叶斯公式：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个完备事件组，则对于任意事件 $A(P(A)>0)$，有

$$P(A_i|A)=\frac{P(A_i)P(A|A_i)}{\sum_{k}P(A_k)P(A|A_k)},\quad i=1,2,\cdots.$$

1.3.3　事件的独立性与独立重复试验

1. 独立事件

(1)两个事件独立：$P(AB)=P(A)P(B)$.

如果两事件 A 与 B 独立，则事件 A 与$\overline{B}$，$\overline{A}$与 B，$\overline{A}$与$\overline{B}$也是相互独立.

(2)多个事件相互独立：对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果其中任两个事件均相互独立，即对任意 $1\leqslant i<j\leqslant n$，有 $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立；如果其中任何 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件：$A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$ $(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$，均有 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

2. 独立试验

(1)伯努利试验：只有两个可能结果 A，$\overline{A}$的试验.

(2)n 重伯努利试验：将一伯努利试验重复独立地进行 n 次，称之为 n 重伯努利试验.

设在每次试验中 $P(A)=p(0<p<1)$，则在 n 重伯努利试验中，事件 A 出现 k 次的概率为 $C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$.

1.4　习题详解及分析

1. 写出下列随机试验的样本空间及下列事件包含的样本点.

(1)掷一颗骰子，出现奇数点；

(2)掷两颗骰子，

A=“出现点数之和为奇数，且恰好其中有一个 1 点”，

B=“出现点数之和为偶数，但没有一颗骰子出现 1 点”；

(3)将一枚硬币抛两次，

A=“第一次出现正面”，

B=“至少有一次出现正面”，

C=“两次出现同一面”.

【解】

(见教材参考答案)

2. 设 A,B,C 为 3 个事件，试用 A,B,C 的运算关系式表示下列事件：

(1)A 发生，B,C 都不发生；

(2)A 与 B 发生，C 不发生；

(3)A,B,C 都发生；

(4)A,B,C 至少有一个发生；

(5)A,B,C 都不发生；

(6)A,B,C 不都发生；

(7)A,B,C 至多有两个发生；

(8)A,B,C 至少有两个发生.

【解】 (1)$A\overline{B}\,\overline{C}$；

(2)$AB\overline{C}$；

(3)ABC；

(4)$A\cup B\cup C=\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\,\overline{C}\cup A\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\,\overline{B}C\cup AB\,\overline{C}\cup ABC$；

(5)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$；

(6)$\overline{ABC}$；

(7)$\overline{A}BC\cup A\,\overline{B}C\cup AB\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup A\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{ABC}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；

(8)$AB\cup BC\cup CA=AB\,\overline{C}\cup A\,\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$.

3. 说明下列事件的相互关系：

(1)$AB=A$；

(2)$A\cup B=A$；

(3)$\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A}$.

【解】

(见教材参考答案)

4. 设随机事件 A,B 满足条件 $A\cup C=B\cup C,C-A=C-B$，求 $A\overline{B}\cup\overline{A}B$.

【解】 $\overline{B}(A\cup C)=\overline{B}(B\cup C)$，则有

$$A\overline{B}\cup C\,\overline{B}=C\,\overline{A},$$

即

$$A\overline{B}\subset C\,\overline{B}=C\,\overline{A}\subset\overline{A},$$

因而

$$\overline{A}B=\varnothing;$$

同理

$$\overline{A}(A\cup C)=\overline{A}(B\cup C),$$

则有

$$\overline{A}C=(\overline{A}B)\cup(C\,\overline{A})=(\overline{A}B)\cup(C-A),$$

$$\overline{A}B\subset C\,\overline{A}=C\,\overline{B}\subset\overline{B};$$

故

$$\overline{A}B=A\overline{B}=\varnothing.$$

5. 设 A,B 为随机事件，且 $P(A)=0.7,P(A-B)=0.3$，求 $P(\overline{AB})$.

【解】 因为

$$P(A-B)=P(A)-P(AB),$$

故

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-[P(A)-P(A-B)]$$
$$=1-[0.7-0.3]=0.6.$$

6. 设 A,B,C 是随机事件，A,C 互不相容，且 $P(AB)=1/2,P(C)=1/3$，求 $P(AB\overline{C})$.

【解】 因为 A,C 互不相容，则 AB,C 也互不相容，于是 $AB\subset\overline{C}$，

$$P(AB\overline{C})=P(AB)=\frac{1}{2}.$$

7. 设 A,B 是两事件，且 $P(A)=0.6,P(B)=0.7$，求：

【解】 因为

$$P(AB)=P(A)+P(A)-P(A\cup B)=1.3-P(A\cup B),$$

因此只有当 A 与 B 的和事件的概率最小时，A 与 B 的积事件的概率才会最大. 而

$$P(A\cup B)\geqslant\max\{P(A),P(B)\}$$

故当 $AB=A$ 时，$P(AB)$取到最大值为 0.6.

(2)同理只有当 A 与 B 的和事件的概率最大时，A 与 B 的积事件的概率才会最小.

当 $A\cup B=\Omega$ 时，$P(A\cup B)=1$，$P(AB)$取到最小值为 0.3.

8. 将一部五卷文集任意地排列到书架上，问卷号自左向右或自右向左卷号恰好为 12345 的顺序的概率是多少？

【解】 将一部五卷文集任意排列的总排列方法数为 $N=1\times2\times3\times3\times5$ 种，而按卷号自左向右或自右向左恰好为 12345(用事件 A 表示)只有 2 种排列方法，即 $m=2$. 由古典概型概率计算公式，将卷号自左至右或自右至左恰好为 12345 的概率为

$$P(A)=\frac{2}{1\times2\times3\times4\times5}=\frac{1}{60}.$$

9. 对一个 5 人的学习小组考虑生日问题：

(1)求 5 个人的生日都在星期日的概率；

(2)求 5 个人的生日都不在星期日的概率；

(3)求 5 个人的生日不都在星期日的概率.

【解】 (1)设 $A_1=\{$五个人的生日都在星期日$\}$，基本事件总数为 7^5，有利事件仅有 1 个，故

$$P(A_1)=\frac{1}{7^5}=\left(\frac{1}{7}\right)^5\quad(\text{亦可用独立性求解，下同}).$$

(2)设 $A_2=\{$五个人的生日都不在星期日$\}$，有利事件数为 6^5，故

$$P(A_2)=\frac{6^5}{7^5}=\left(\frac{6}{7}\right)^5.$$

(3)设 $A_3=\{$五个人的生日不都在星期日$\}$，由 $A_3=\overline{A}_1$，则

$$P(A_3)=1-P(A_1)=1-\left(\frac{1}{7}\right)^5.$$

10. 从一批由 45 件正品，5 件次品组成的产品中任取 3 件，求其中恰有一件次品的概率.

【解】 $P(A)=\dfrac{C_{45}^2C_5^1}{C_{50}^3}.$

11. 一批产品共 N 件，其中 M 件正品. 从中随机地取出 n 件($n<N$). 试求其中恰有 m 件($m\leqslant M$)正品(记为 A)的概率. 如果：

(1)n 件是同时取出的；

(2)n 件是无放回逐件取出的；

(3)n 件是有放回逐件取出的.

【解】 (1)$P(A)=\mathrm{C}_M^m\mathrm{C}_{N-M}^{n-m}/\mathrm{C}_N^n$.

(2)由于是无放回逐件取出，可用排列法计算. 样本点总数有 P_N^n 种，n 次抽取中有 m 次为正品的组合数为 C_n^m 种. 对于固定的一种正品与次品的抽取次序，从 M 件正品中取 m 件的排列数有 P_M^m 种，从 $N-M$ 件次品中取 $n-m$ 件的排列数为 P_{N-M}^{n-m}种，故

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_n^m\mathrm{P}_M^m\mathrm{P}_{N-M}^{n-m}}{\mathrm{P}_N^n}.$$

由于无放回逐渐抽取也可以看成一次取出，故上述概率也可写成

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_M^m\mathrm{C}_{N-M}^{n-m}}{\mathrm{C}_N^n}.$$

可以看出，用第二种方法简便得多.

(3)由于是有放回的抽取，每次都有 N 种取法，故所有可能的取法总数为 N^n 种，n 次抽取中有 m 次为正品的组合数为 C_n^m 种. 对于固定的一种正、次品的抽取次序，m 次取得正品，都有 M 种取法，共有 M^m 种取法，$n-m$ 次取得次品，每次都有 $N-M$ 种取法，共有$(N-M)^{n-m}$种取法，故

$$P(A)=\mathrm{C}_n^mM^m(N-M)^{n-m}/N^n.$$

此题也可用伯努利概型，共做了 n 重伯努利试验，每次取得正品的概率为$\dfrac{M}{N}$，则取得 m 件正品的概率为

$$P(A)=\mathrm{C}_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m}.$$

12. 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上，每个部件用 3 只铆钉. 其中有 3 个铆钉强度太弱. 若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱. 求发生一个部件强度太弱的概率.

【解】 设 $A=\{$发生一个部件强度太弱$\}$，则

$$P(A)=\mathrm{C}_{10}^1\mathrm{C}_3^3/\mathrm{C}_{50}^3=\frac{1}{1\ 960}.$$

13. 一个袋内装有大小相同的 7 个球，其中 4 个是白球，3 个是黑球，从中一次抽取 3 个，计算至少有两个是白球的概率.

【解】 设 $A_i=\{$恰有 i 个白球$\}(i=2,3)$，显然 A_2 与 A_3 互斥.

$$P(A_2)=\frac{\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_7^3}=\frac{18}{35},\quad P(A_3)=\frac{\mathrm{C}_4^3}{\mathrm{C}_7^3}=\frac{4}{35},$$

故
$$P(A_2\cup A_3)=P(A_2)+P(A_3)=\frac{22}{35}.$$

14. 有甲、乙两批种子，发芽率分别为 0.8 和 0.7，在两批种子中各随机取一粒，求：

(1)两粒都发芽的概率；

(2)至少有一粒发芽的概率；

(3)恰有一粒发芽的概率.

【解】 设 $A_i=\{$第 i 批种子中的一粒发芽$\}(i=1,2)$，

(1)$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=0.7\times0.8=0.56$；

(2)$P(A_1\cup A_2)=0.7+0.8-0.7\times0.8=0.94$；

(3)$P(A_1\overline{A_2}\cup\overline{A_1}A_2)=0.8\times0.3+0.2\times0.7=0.38$.

15. 掷一枚均匀硬币直到出现 3 次正面才停止. 求：

(1)正好在第 6 次停止的概率；

(2)正好在第 6 次停止的情况下，第 5 次也出现正面的概率.

【解】 (1)设 A 表示“掷一枚均匀硬币，直到第 6 次才出现 3 面正面”这一事件，则 A 事件等价于“掷一枚均匀硬币，前 5 次有 2 次出现正面，而第 6 次出现正面”的事件. “前 5 次有 2 次出现正面”的概率为 $C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2}$，则
$$P(A)=C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2}\frac{1}{2}=\frac{5}{32}.$$

(2)设 B 表示“掷一枚均匀硬币，直到第 5 次才出现 2 次正面”这一事件，则 B 事件等价于“掷一枚均匀硬币，前 4 次有 1 次出现正面，而第 5 出现正面”. “前 4 次有 1 次出现正面”的概率为 $C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1}$，“郑一枚均匀硬币，前 4 次有 1 次出现正面，而第 5，第 6 次都出现正面”的事件为 AB，则
$$P(AB)=C_4^1\ \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}.$$

“掷一枚均匀硬币，直到第 6 次才出现 3 次正面的情况下，第 5 次也出现正面”可表示为“$B|A$”，则此条件概率为
$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{5}{32}}=\frac{2}{5}.$$

16. 把一根棒任意折成两段，求其中一段的长度大于另一段的 m 倍的概率.

【解】 将棒分为 $m+1$ 段，只有当两个折点分别落在两端的那一段时，则其中一段的长度大于另一段的 m 倍. 用 A 表示该事件，由几何概型的概率公式有
$$P(A)=\frac{2}{m+1}.$$

17. 在圆周上任取三点 A,B,C，求 $\triangle ABC$ 为锐角三角形的概率.

【解】 $\angle A$ 与 $\angle B$ 的取值范围为 $(0,180°)$，或者是 $(0,\pi)$，而 $0°<\angle C=180°-\angle A-\angle B<90°$，或 $0<\angle C=\pi-\angle A-\angle B\leqslant\frac{\pi}{2}$. 因此，这是平面上的几何概型问题，用 A 表示该事件，则

$$P(A)=\frac{\frac{1}{2}\times 90\times 90}{\frac{1}{2}\times 180\times 180}=\frac{1}{4},\quad \text{或 } P(A)=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}\times\pi\times\pi}=\frac{1}{4}.$$

18. 某地某天下雪的概率为 0.3，下雨的概率为 0.5，既下雪又下雨的概率为 0.1，求：

(1)在下雨条件下下雪的概率；　(2)这天下雨或下雪的概率.

【解】 设 $A=\{\text{下雨}\}$，$B=\{\text{下雪}\}$.

(1)$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.1}{0.5}=0.2$；

(2)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.3+0.5-0.1=0.7$.

19. 已知一个家庭有 3 个小孩，且其中一个为女孩，求至少有一个男孩的概率(小孩为男、为女是等可能的).

【解】 设 $A=\{\text{其中一个为女孩}\}$，$B=\{\text{至少有一个男孩}\}$，样本点总数为 $2^3=8$，故

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{6/8}{7/8}=\frac{6}{7},$$

或在缩减样本空间中求，此时样本点总数为 7.

$$P(B|A)=\frac{6}{7}.$$

20. 已知 5% 的男人和 0.25% 的女人是色盲，现随机地挑选一人，此人恰为色盲，求此人是男人的概率(假设男人和女人各占人数的一半).

【解】 设 $A=\{\text{此人是男人}\}$，$B=\{\text{此人是色盲}\}$，则由贝叶斯公式得

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}$$

$$=\frac{0.5\times 0.05}{0.5\times 0.05+0.5\times 0.0025}=\frac{20}{21}.$$

21. 两人约定上午 9:00—10:00 在公园会面，求一人要等另一人 0.5 h 以上的概率.

【解】 设两人到达时刻为 x,y，则 $0\leqslant x,y\leqslant 60$. 事件“一人要等另一人半小时以上”等价于 $|x-y|>30$. 如图阴影部分所示. 则

$$p=\frac{2\times\frac{1}{2}\times 30^2}{60^2}=\frac{1}{4}.$$