理论力学教程

孙世贤　黄圳圭　等编著

国防科技大学出版社

理论力学教程

主　编　孙世贤
副主编　黄圳圭
编　著　孙世贤　黄圳圭　唐乾刚
　　　　李爱丽　古浪平

国防科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

理论力学教程/孙世贤;黄圳圭;唐乾刚;李爱丽;古浪平
长沙:国防科技大学出版社 1997.7
ISBN 7—81024—427—2

Ⅰ理论力学教程
Ⅱ孙世贤 黄圳圭 唐乾刚 李爱丽 古浪平
Ⅲ理论力学—教程
ⅣO31

责任编辑:张建军
责任校对:黄八一
封面设计:陆荣斌

*

*国际科技大学出版社出版发行
电话:(0731)4555681 邮政编码:410073
新华书店总店北京发行所经销
湖南大学印刷厂印刷

787毫米×1092毫米 1/16 印张:27.25 字数:630千
1997年7月第1版第1次印刷 印数:1—2000册

*

ISBN 7—81024—427—2
O·62 定价:30.00元

内 容 简 介

这是一本为高等院校理工科专业编写的教材。全书共11章，约60万字，其中包括例题约150道，习题约400道。本书在内容体系的安排上，理论概念的阐述上以及例题习题的选用上，充分反映了编著者几十年的教学经验。本书适合于高等院校理工科各类专业使用，也可供广大工程技术人员和力学专业教师参考。

DAN 10/07

前　言

本书是为力学、航天、机械、自动控制等理工科专业编写的理论力学教科书。为了适应教学改革的需要，在内容体系上作了较大革新。第一是采用模块结构，大幅度地减少了章节，强化了内容间的内在联系；第二是提高了起点，减少了与物理的重复；第三是总结从哈尔滨军事工程学院到国防科技大学40多年的教学经验，对许多概念和理论的陈述更为严谨，具有自己的特点；第四是在例题和习题的选择上适当注意了军队院校的需要。编写时力求阐明物理意义，严格数学推导，尽量应用现代数学方法分析处理问题，并配备了大量的例题和习题。注意做到基础与专业相结合，理论与应用相结合，深度与广度相结合，以期适应有关专业对力学教学的要求，缩短基础理论与工程应用之间的距离。

本书编者由孙世贤、黄圳圭、古浪平三位教授和唐乾刚、李爱丽两位副教授组成。孙世贤、黄圳圭担任主编。第一、二章由李爱丽执笔，第三、四章由唐乾刚执笔，第五、六章由古浪平执笔，第七、八章由黄圳圭执笔，第九、十、十一章由孙世贤执笔，最后由孙世贤、黄圳圭审定并汇总统稿而成。

湖南大学黎邦隆教授审阅了本书初稿，多有赞誉之辞，并提出了宝贵的修改意见，使本书的定稿获益匪浅。在此，我们表示衷心的感谢。

编写过程中，疏漏之处仍是难免，需要通过教学实践逐一订正，也恳请专家、读者随时提出宝贵意见，以便再版时改正。

编者

1996．8

目　录

绪　论

力学是研究物体机械运动规律的科学。所谓机械运动，就是指物体的空间位置与形状随时间的变化。移动、转动、流动、变形，等等，都属于机械运动。即使是静止或平衡，也是机械运动的特殊情况。

机械运动是自然界中最简单、最普遍的运动形态，不仅广泛地存在于我们周围，而且在物质运动的高级形态中（物理的、化学的、生物的，等等），都包含有或伴随着机械运动。因此，力学科学不仅揭示了自然界各种机械运动的规律，而且是进一步研究其它高级运动形式的基础。这就决定了力学在自然科学中处于重要的基础学科的地位。另一方面，由于力学提供的有效的分析、计算和实验方法在工程技术中有广泛的应用，力学还是近代工程技术的重要理论基础的技术学科。

理论力学是研究物体机械运动（以下简称运动）一般规律的科学。由于实际物体往往是非常复杂的，其大小、形状以及许多其它物理性质（如变形等）都不同程度地影响着物体的运动。如果一开始就包罗万象地考虑物体的各方面具体问题，则将无法找出物体运动的基本规律。因此，根据要解决问题的任务与范围，抓住影响物体运动的主要因素，忽略不起决定性作用的次要因素，把实际物体抽象成所谓力学模型作为研究对象，就是非常必要的。这样的科学抽象不但没有脱离客观实际，而且更深刻地反映了实际，更便于概括实际物体的共性。常见的力学模型有质点、刚体、质点系等。理论力学就是研究质点、刚体、质点系运动的一般规律。至于更复杂的力学模型，如弹性体、流体等，则是建立在理论力学基础上的连续介质力学等力学分支的研究对象。

质点是指只有质量而无大小的几何点。如果物体的尺寸比其运动的范围小得多，物体的形状对所研究的问题影响很小，就可把此物体抽象为质点。例如当研究地球绕太阳公转时，就可以把地球视为质点。虽然作这样的简化不便于全部细致地描述地球的运动，但是对研究地球公转运动的规律来说，却抓住了问题的本质。

刚体是指在外力作用下或外界影响下大小形状保持不变的物体。这是对一般固体的理想化。实际物体受外力作用或温度变化时，大小与形状均会发生变化，但是当物体的大小、形状改变很小，对问题的研究影响不大时，则可视为刚体。用刚体代替实际物体进行研究，也可使问题大为简化。

质点系是最一般的力学模型，是指由有限个或无限个质点组成的力学系统。例如，整个太阳系可以看作一个质点系，变形的固体或流体也可以看作一个质点系。质点与刚体都是质点系的特例。对于一般的质点系，要深入研究其中每个质点的实际运动是非常复杂与困难的。理论力学只研究质点系运动的一般规律。如要进一步研究系统运动更为具体的规律，则属于相应的力学分支的研究范围。

对实际问题来说，如何恰当地选择力学模型是一个重要问题。选简单模型，可以使问题简化，以利于问题的解决；但简单模型可能使问题失真，甚至导出错误结果。复杂模型可能使问题难以解决，但复杂模型更接近于实际物体，由此可导出更准确与更符合实际的结果。例如研究弹道导弹的飞行力学问题，当导弹在大气层外飞行时，导弹的主要作用力是地球引力，这时把导弹视为质点，就可以充分准确地描述导弹在大气层外的运动。当导弹在大气层内飞行时，空气动力是导弹的主要作用力，而空气动力则与导弹的大小、形状以及飞行姿态有关，因此就要用刚体或弹性体的模型才能正确描述此时导弹的运动。

理论力学研究的范围，通常只限于以牛顿定律为依据的经典力学，即只研究宏观物体的力学规律，而不考虑微观粒子所遵循的量子力学规律；只研究运动速度远小于光速（3×10^8 米/秒）的情形，而不考虑相对论力学中相对性效应的影响。实践证明，这样的理论对研究一般科学技术领域中的力学问题是充分准确并行之有效的。

理论力学研究的内容，按研究对象分，有质点力学、质点系力学与刚体力学；按研究的理论与方法分，有以牛顿定律与欧拉动力学方程为中心内容的矢量力学，和以拉格朗日方程与哈密顿原理为中心内容的分析力学。矢量力学直观性强，物理意义清楚，是力学理论的基础，因而在一般的工程技术中得到广泛的应用。而分析力学较充分地应用分析数学的理论，为力学问题的研究开拓了广阔的途径，特别是为复杂力学系统的研究提供了有效的分析方法。考虑到从简到繁循序渐进的教学原则，本书把理论力学的研究内容分为四部分，其顺序为：静力学（第一章）、运动学（第二、三、四章）动力学（第五、六、七、八、九章）与分析力学（第十章）。这样安排不但有利于教学实施，而且可以使内容阐述得比较系统和完善。

理论力学是力学、机械和自动控制等类型专业的重要技术基础课，同专业课程与工程实际联系极为密切。例如航天器的运动理论，惯性器件的工作原理，以及机器人的力学模型等研究领域都需要应用理论力学所阐述的概念、理论与方法。同时，也正由于理论力学在科学研究、工程实践以及各个学科领域中的广泛应用，使得理论力学的研究内容得到不断的丰富与充实。但是作为技术基础课程来说，书中不能过多地涉及专业与工程中的实际问题，而只能着重阐述其基本概念、基本理论与基本方法。因此学习本课程时，除了必须正确理解与掌握其基本内容外，还必须注意做到理论联系实际，真正把基本内容学深学透，以便学习后续课程与研究实际问题时能够灵活应用。

第一章　静力学

静力学是关于物体平衡的科学，它主要研究物体平衡时作用于物体上的力所应满足的条件。**平衡是物体机械运动的一种特殊状态。若物体相对于惯性参考系保持静止或作匀速直线平动，则称此物体处于平衡。**在工程分析时，常把固连于地球的参考系近似作为惯性参考系。本书中如无特殊说明，也将地球视为惯性参考系。于是，静置于地面的机器，作匀速直线飞行的飞机，都是物体处于平衡的实例。

1-1　静力学基础

一、静力学基本概念

（一）刚体

所谓**刚体**，是指**在力的作用下不变形的物体**。这一特征表现为**刚体内任意两点间的距离永不改变**。显然，实际中并无刚体存在，任何物体在受力作用时都会发生变形，所以刚体只是一个抽象化的力学模型。在实际问题中，当物体的变形对所研究的问题影响很小可忽略不计时，或者物体的变形不影响所研究问题的实质时，均可以把这种物体抽象为刚体，使所研究的问题大为简化。在静力学中，研究的物体只限于刚体，因此静力学又称为刚体静力学，它是变形体力学的基础。

（二）力

人类对力的认识最初来自自身的体力，以后在长期的生产实践中逐渐加深，直到产生牛顿第一定律才建立起力的科学定义：**力是物体间的相互机械作用，其作用效应是使物体的运动状态发生变化和使物体产生变形。**前一种效应称为**力的外效应**（或运动效应），后一种效应称为**力的内效应**（或变形效应）。理论力学只研究力的外效应，力的内效应将在材料力学等课程中涉及。力对物体的作用效应取决于**力的三要素**，即力的**大小、方向和作用点**。实践证明，作用在物体上同一点的两个力的合成服从平行四边形法则。任何有大小、有方向、且满足以平行四边形法则作加法的物理量都是矢量。可见，**力是矢量**，且是**定位矢量**，因为力对物体的作用效应与作用点有关。在作图时，力矢量可以用有向线段表示。线段的长度按一定比例表示力的大小，箭头表示力的方向，线段的起点或终点，表示力的作用点，线段所在直线称为**力的作用线**。书写时，力矢量用黑斜体字母（如本书所采用的）或带箭头的字母（如$\vec{F}$，$\vec{W}$等）表示。

每一个物理量都有确定的量纲，在计算时要采用一定的单位制。在国际单位制（SI）中，把长度单位米（m），质量单位千克（kg）和时间单位秒（s）作为基本单位，

根据牛顿第二定律导出力的单位是牛顿（N）（1 牛顿 = 1 千克·米/秒^2）。本书采用 SI 制。工程中也常采用工程单位制，其中力的单位是公斤力（kgf）。牛顿和公斤力的换算关系是：1（kgf）= 9.807（N）。

（三）力系

同时作用在物体上力的集合称为**力系**。若某力系由几个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，…，$\boldsymbol{F}_n$ 组成，则该力系表示为（$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，…，$\boldsymbol{F}_n$）。

为便于研究，通常将作用于物体上的力系按力的作用线在空间分布的不同情况而区分为**平面力系**和**空间力系**两大类。各力作用线位于同一平面内的力系称为平面力系。各力作用线不在同一平面内的力系称为空间力系。这两大类力系均可进而区分为**汇交力系**、**平行力系**和**任意力系**。汇交力系是指各力作用线汇交于同一点的力系。平行力系是指各力作用线相互平行的力系。任意力系是指各力作用线既不平行又不相交于一点的力系，又称**一般力系**。从力系的分类中可以看出，空间任意力系是各种力系中最复杂最一般的一种形式，其它各种力系均可视为它的特殊情况。

分别作用在同一刚体上的两组力系（$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，…，$\boldsymbol{F}_n$）和（$\boldsymbol{Q}_1$，$\boldsymbol{Q}_2$，…，$\boldsymbol{Q}_n$），如果它们对该刚体的作用效果完全相同，则称此两组力系互相等效，表示为

$$(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n)\backsim(\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_n)$$

将一个力系用其等效力系来代替，称为**力系的等效替换**。用一个简单力系等效替换一个复杂力系，称为**力系的简化**。

如果力系$(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n)$与一个力 $\boldsymbol{R}$ 等效，也就是说

$$(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n)\backsim\boldsymbol{R}$$

那么力 $\boldsymbol{R}$ 称为该力系的**合力**。而力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，…，$\boldsymbol{F}_n$ 称为合力 $\boldsymbol{R}$ 的**分力**。力系$(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n)$用它的合力 $\boldsymbol{R}$ 代替，称为**力的合成**。相反，一个力 $\boldsymbol{R}$ 由它的分力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，…，$\boldsymbol{F}_n$ 代替，称为**力的分解**。

如果力系$(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n)$作用在刚体上时，并不改变该刚体原有的运动状态。则该力系称为**平衡力系**。显然，平衡力系与零力系等效。表示为

$$(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n)\backsim 0$$

二、静力学公理

人们在长期的生活和生产实践中，对力的基本性质进行了概括和归纳，得出了一些显而易见的，能深刻反映力的本质的一般规律。这些规律的正确性已为长期的实践反复证明，从而被人们所公认，称之为静力学公理。静力学的全部理论都可借助于数学论证，从这些公理中推导出来。因此，静力学公理是静力学的理论基础。

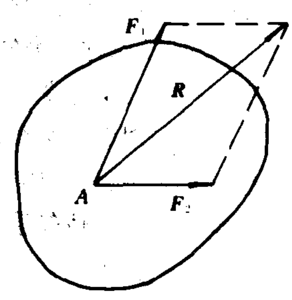


图 1-1

公理一　力的平行四边形公理

作用在物体上同一点的两个力，可以合成一个合力。合力作用点也在该点，合力的大小和方向，由这两个力构成的平行四边形的对角线确定（见图 1-1）。公理一表明力

的合成符合矢量求和规则，即合力矢等于原两力的矢量和（几何和）：

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$

两共点力合成的平行四边形法则可以推广到共点力系的合成。共点力系是指作用于同一点的各力组成的力系。显然，共点力系是汇交力系的特例。

推论一 共点力系可以合成一个合力，合力的矢量等于力系中各力的矢量和，合力的作用点在各力的公共作用点上，即共点力系 $\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n\}_M$ 的合力

$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \sum \boldsymbol{F}_i$$

作用在公共点 M 上。为书写简便，以后将“$\sum\limits_{i=1}^{n}$”简写为“Σ”。

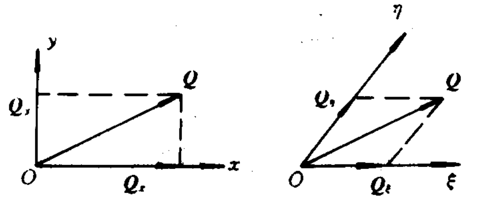


图 1-2

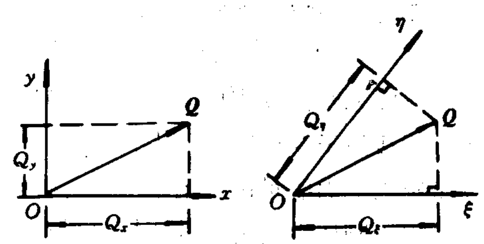


图 1-3

推论一是显而易见的，只要对力系中的力两两依次应用平行四边形法则进行合成，最终即可得到作用在公共点上的合力 $\boldsymbol{R}$.

反之，应用力的平行四边形法则也可将一个力分解为与之共点的两个或多个分力。显然，力的分解是不唯一的。以平面情况为例，图 1-2 中表示了力在正交和斜交坐标系中的分解。

在理论力学中还经常要求力在坐标轴上的投影，此时必须注意在斜交坐标系中，力在坐标轴上的分量大小并不等于力在该坐标轴上的投影大小。仍以平面情况为例，图 1-3 中给出了力在正交和斜交坐标系中的投影。

公理二　二力平衡公理

受两力作用的刚体保持平衡的充分必要条件是这两力的大小相等，方向相反，且作用在同一直线上（见图 1-4）。

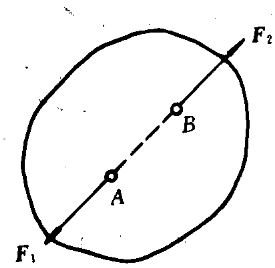
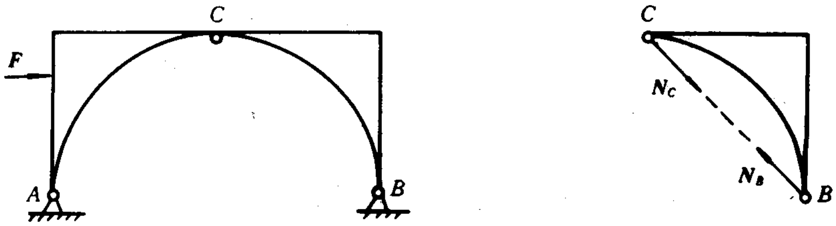


图 1-4

这个公理总结了作用于刚体上最简单的力系平衡时所必须满足的条件。对于刚体这个条件是必要且充分的；但对于变形体，这个条件是必要而不充分的。例如，不可伸长的软绳受到等值、反向、共线的两力作用，受拉时可平衡，受压时则不能平衡。

以后经常遇到仅受二力作用而处于平衡的刚体，这类刚体称为**二力体**。如果它是杆件，就称为二力杆；如果它是结构中的构件，就称为二力构件。由二力平衡公理可知，二力体不论其形状如何，所受**二力必沿两力作用点的连线**。例如，图 1-5 (a) 所示的三铰拱结构，当不计拱的自重时，拱段 BC 是二力构件。作用于 B，C 两点的力的作用线

必沿 B，C 两点连线，如图 1-5b 所示。



(a) (b)

图 1-5

公理三　加减平衡力系公理

可在作用于刚体的力系上增加或除去一个平衡力系，而不改变原力系对刚体的作用。

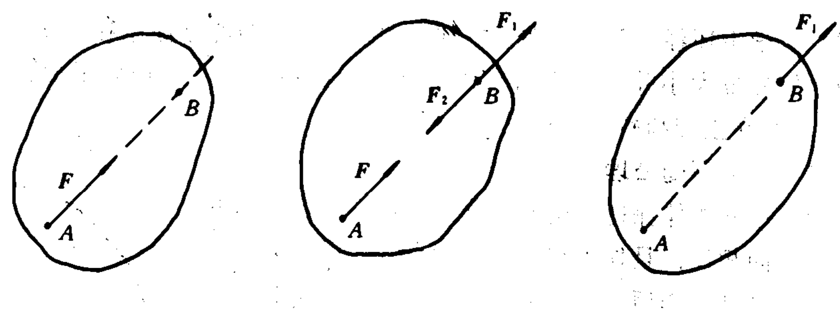
此公理表明，彼此相差一个平衡力系的两个力系是等效的。其次，公理三只适用于刚体而不适用于变形体。

推论二　力的可传性定理

作用于刚体上的力，其作用点可沿作用线移至刚体上的任意点而不改变它对刚体的作用效果。

证明　设有力 $\boldsymbol{F}$ 作用在刚体上点 A 处见图 1-6（a）。根据加减平衡力系公理，可在此力的作用线上任取一点 B，并加上一对平衡力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$，使 $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{F}$ 见图 1-6（b）。因为

$$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) \backsim 0$$



(a) (b) (c)

图 1-6

由公理三可知

$$\boldsymbol{F} \backsim (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$$

又因为

$$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}_2) \backsim 0 \qquad \text{（公理二）}$$

故

$$\boldsymbol{F} \backsim \boldsymbol{F}_1$$

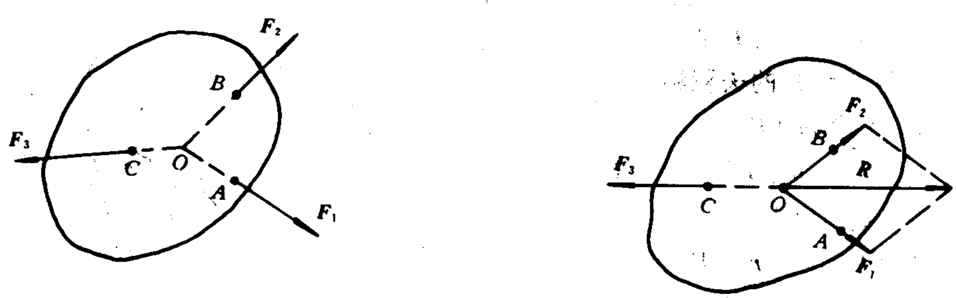
图 1-6（c）可视为将力 $\boldsymbol{F}$ 沿其作用线移至点 B 而成。

根据力的可传性定理，作用于刚体的力的三要素可改为：**大小**、**方向**和**作用线**。沿作用线可任意滑动的矢量称为滑动矢量，因此**作用于刚体的力是滑动矢量**。

推论三　三力平衡汇交定理

刚体受三力作用而平衡时，若其中两力作用线交于一点，则第三力的作用线也必通过此点，且三力必共面。

证明　设刚体在 A，B 和 C 三点受三力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 和 $\boldsymbol{F}_3$ 作用而平衡，且 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的作用线交于点 O（见图 1-7a）.



(a)　　(b)

图　1-7

根据力的可传性定理，可将力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 沿各自作用线移至交点 O，根据公理一，$\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 可以合成为一个过点 O 的合力 $\boldsymbol{R}$（见图 1-7（b））。即

$$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) \backsim \boldsymbol{R}$$

由定理所述条件

$$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3) \backsim \mathbf{0}$$

所以

$$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}) \backsim (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{F}_3) \backsim \mathbf{0}$$

据二力平衡公理可知 $\boldsymbol{F}_3$ 与 $\boldsymbol{R}$ 共线，故 $\boldsymbol{F}_3$ 的作用线必过点 O，且在 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 构成的平面内。

公理四　作用与反作用公理

两物体间的作用力和反作用力总是等值、反向、共线，并且同时分别作用在这两物体上。

应该指出，不能认为作用力和反作用力构成一个平衡力系，因为它们是同时分别作用在两个物体上的力。

公理五　刚化公理

当变形体在已知力系作用下处于平衡状态时，若将它刚化为刚体，则其平衡状态保持不变。

这个公理建立了刚体平衡条件和变形体平衡条件之间的关系。它说明，变形体平衡时，作用于其上的力系必定满足刚体的平衡条件，这样就能把刚体的平衡理论应用于变形体，从而扩大了刚体静力学理论的应用范围。注意，刚体平衡的必要充分条件是变形

体平衡的必要（但不充分）条件。

三、力矩与力偶

（一）力矩

力对刚体作用的效应，有平移和转动两种。力的平移效应由力矢量的大小和方向来决定，而力的转动效应，则决定于**力矩**。

1、力对点之矩

力对点之矩是力使刚体绕某确定点转动效应的量度。

设力 $\boldsymbol{F}$ 作用于刚体的点 A，O 为空间的任意确定点，从点 O 到力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点 A 引矢径 $\boldsymbol{r}$（见图 1-8），则 **$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 的矢积称为力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 之矩**，简称**力矩**，记作 $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$

$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{1-1-1}$$

上述力矩矢量的模为

$$|\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})| = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}| = Fr\sin\alpha = Fh$$

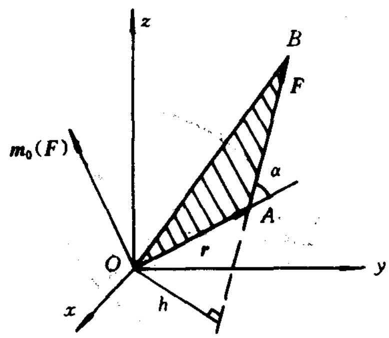


图 1-8

其中 h 为点 O 到力 $\boldsymbol{F}$ 作用线的距离，称为**力臂**。因此力矩矢量的模就等于力的大小与力臂的乘积。力矩矢量的方向即是矢积 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ 的方向，它垂直于点 O 和力 $\boldsymbol{F}$ 构成的平面，指向由右手法则决定。实践表明，力矩矢量能全面反映力使刚体绕定点转动的效应。定点 O 称为**矩心**。由于力矩矢量 $\boldsymbol{m}_o$（$\boldsymbol{F}$）的模和方向都与矩心 O 的位置有关，因此**力矩是一个定位矢量。力矩的大小、方向和矩心是力矩的三要素。**

若以矩心 O 为原点，取直角坐标系单位正交基$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$，则有

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

于是，力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 之矩的解析表达式为

$$\boldsymbol{m}_o(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k} \tag{1-1-2}$$

基矢量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 前面的三个系数，分别表示力矩矢量 $\boldsymbol{m}_o$（$\boldsymbol{F}$）在三个坐标轴上的投影，即，

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{m}_o(\boldsymbol{F})]_x &= yF_z - zF_y \\ [\boldsymbol{m}_o(\boldsymbol{F})]_y &= zF_x - xF_z \\ [\boldsymbol{m}_o(\boldsymbol{F})]_z &= zF_y - yF_x \end{aligned} \tag{1-1-3}$$

由定义可知：

（1）当力的作用点沿着力的作用线移动时，力矩矢量保持不变。

这是因为，设力 $\boldsymbol{F}$ 作用于刚体上的点 M（见图 1-9），如在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用线上任选一

点N，并将力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点移至点N，则因为$\overrightarrow{MN}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$，所以有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON}\times\boldsymbol{F}&=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MN})\times\boldsymbol{F}\\&=\overrightarrow{OM}\times\boldsymbol{F}+\overrightarrow{MN}\times\boldsymbol{F}\\&=\overrightarrow{OM}\times\boldsymbol{F}\end{aligned}$$

(2) 力的作用线通过矩心时，力矩矢量为零。即当 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{M}_o(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$

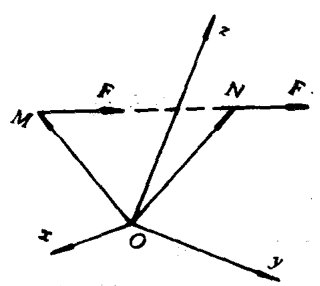


图 1-9

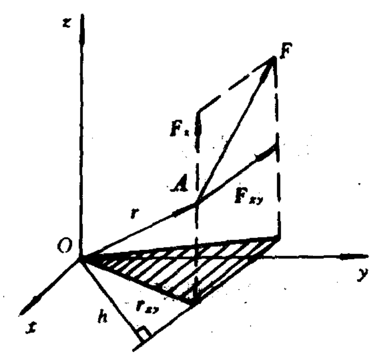


图 1-10

2. 力对轴之矩

力对轴之矩是力使刚体绕某确定轴转动效应的量度。

设力 $\boldsymbol{F}$ 作用于刚体的点A，Z 为空间任意轴（见图 1-10），将力 $\boldsymbol{F}$ 沿轴Z 和在垂直于轴Z 的任意平面Oxy 上分解为分力$\boldsymbol{F}_z$ 和$\boldsymbol{F}_{xy}$两个分量，实践经验表明，$\boldsymbol{F}_z$ 对刚体绕轴Z 的转动不起作用。即转动效应为零，只有 $\boldsymbol{F}_{xy}$才产生绕Z 轴的转动效应。自点 O 到力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点A 引矢径$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}$ 在Oxy 平面上的分量表为$\boldsymbol{r}_{xy}$，则矢积 $\boldsymbol{r}_{xy}\times\boldsymbol{F}_{xy}$可完全表达力$\boldsymbol{F}$ 使刚体绕轴 Z 的转动效应。不难验证，矢积 $\boldsymbol{r}_{xy}\times\boldsymbol{F}_{xy}$的大小等于$F_{xy}h$，其方向沿轴 Z 的正向或负向。当轴 Z 的正向已预先确定时，可用正负号表示此矢积的方向，正号表示它沿轴 Z 的正方向，负号表示沿轴 Z 的负方向，至此可将力 $\boldsymbol{F}$ 对轴Z 之矩定义为$\boldsymbol{r}_{xy}$与$\boldsymbol{F}_{xy}$的矢积在轴Z 上的投影，记作 m_z（$\boldsymbol{F}$）即，

$$m_z(\boldsymbol{F})=(\boldsymbol{r}_{xy}\times\boldsymbol{F}_{xy})\cdot\boldsymbol{R}=\pm F_{xy}h \qquad (1\text{-}1\text{-}4)$$

利用矢量 $\boldsymbol{r}_{xy}$，$\boldsymbol{F}_{xy}$在轴x 和轴y 上的投影式

$$\boldsymbol{r}_{xy}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{F}_{xy}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}$$

可将力 $\boldsymbol{F}$ 对轴Z 之矩表为

$$m_z(\boldsymbol{F})=xF_y-yF_x$$

将上式与式（1-1-3）对照，可看出

$$m_z(\boldsymbol{F}) = [\boldsymbol{m}_o(\boldsymbol{F})]_z = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k} \qquad (1\text{-}1\text{-}5)$$

这表明**力对轴之矩等于此力对该轴上任意点之矩矢在该轴上的投影**。

由力对轴之矩的定义可知，力与轴共面（平行或相交）时，力对轴之矩为零。当力沿其作用线滑动时，力对轴之矩不变。在日常生活中，开门就是一个很好的例子，当施加在门上的力的作用线通过门的转轴或与转轴平行时，都不能把门打开或关闭。

3. 汇交力系的合力矩定理

设汇交力系（$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\cdots \boldsymbol{F}_n$）的汇交点为 A，点 A 相对任意确定点 O 的矢径为 $\boldsymbol{r}$，力系的合力为 $\boldsymbol{R}$（$\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F}_i$，作用于点 A），则合力 $\boldsymbol{R}$ 对点 O 的矩为

$$\boldsymbol{m}_o(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}_i = \sum \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_i$$

故有

$$\boldsymbol{m}_o(\boldsymbol{R}) = \sum \boldsymbol{m}_o(\boldsymbol{F}_i) \qquad (1\text{-}1\text{-}6)$$

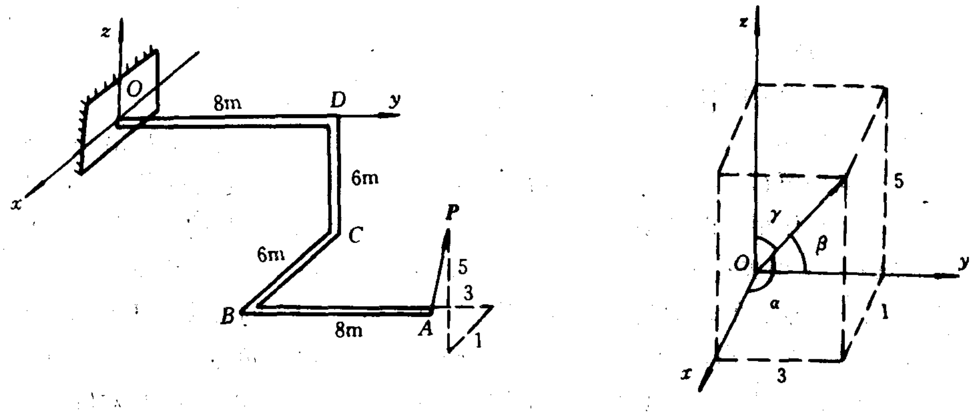
上式表明，**汇交力系的合力对任意点之矩等于各分力对该点之矩的矢量和**。

将式（1-1-6）投影于过点 O 的任意轴 Z 上，则有

$$m_z(\boldsymbol{R}) = \sum m_z(\boldsymbol{F}_i) \qquad (1\text{-}1\text{-}7)$$

即汇交力系的合力对任意轴之矩等于各分力对该轴之矩的代数和。

根据汇交力系导出的合力矩定理也适用于有合力的任意力系，对此我们将在后面给予证明。



(a)　　　　　　　　　　　　(b)

图 1-11

例 1-1　折杆 OA 各部分的尺寸如图 1-11(a)所示。杆端 A 作用一大小等于 1000 (N)的力 $\boldsymbol{P}$，求力 $\boldsymbol{P}$ 对点 O 之矩以及它对坐标系 $Oxyz$ 各轴之矩。

解　由图 1-11b 可求得力 $\boldsymbol{P}$ 的三个方向余弦

$$\cos\alpha = 1/\sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2} = 1/\sqrt{35}$$

$$\cos\beta = 3/\sqrt{35}, \quad \cos\gamma = 5/\sqrt{35}$$

于是力 $\boldsymbol{P}$ 在各坐标轴上的投影分别为

$$P_x = P\cos\alpha = 1000 \times \frac{1}{\sqrt{35}} = 169.0 \quad (\text{N})$$