目　　录

第一章

球面三角学中的一些基本概念

球面三角学出现在古代东方国家。由于古代天文学的发展，促进了球面三角学的发展。

球面三角学是数学上的一个分科，它研究球面上由大圆弧构成的三角形的解法。

球面三角学有着重要的理论和实践价值，在天文学、高等测量学、制图学、结晶学、矿山几何学、仪器学及其它科学方面都有广泛的应用。

球面三角学在机械上的应用时间还不长。由于其优越性大，凡是应用辅助球来研究点、线、面在空间相互位置的都要用到球面三角学，所以发展速度很快。

这里我们根据计算空间角度所需的球面三角知识，编写了一些基本概念，虽然篇幅不多，但已够应用。

§1. 球面三角形的几何性质

一、球面上的圆

通过球心的平面截球，所得的截口是一个圆，这个圆叫做大圆(见图 1-1)。不通过球心的平面截球，所得的截口也是一个圆，这个圆叫做小圆(见图 1-2)。

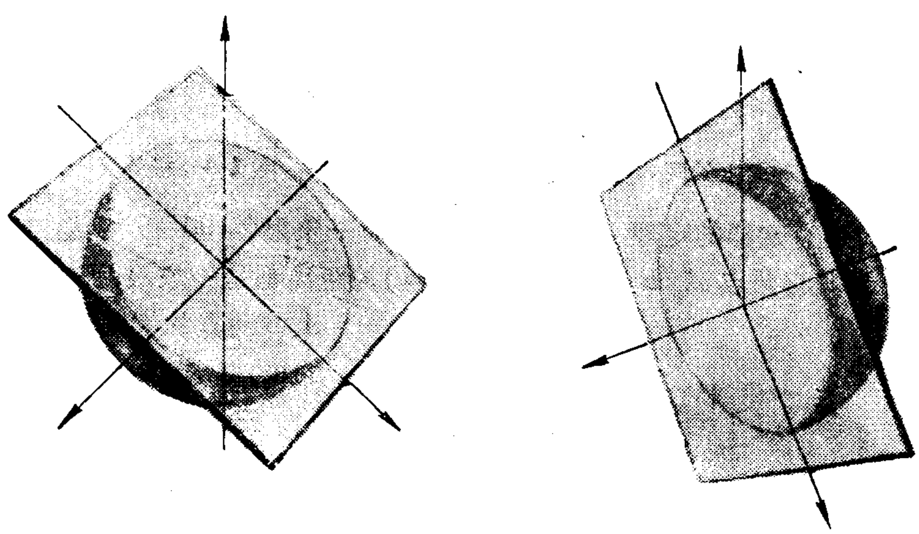


图 1-1 大圆

二、球面上的圆的极

设球面上有一已知圆(不论大圆或小圆)，垂直于这已知圆所在平面的球直径的端点，叫做这个圆的极。

图 1-3 中，圆 AB 的极是 P 与 P'，圆 CD 的极也是 P 与 P'。这就是说，P 与 P' 既是圆 AB 的极，也是圆 CD 的极。这样以 $P(P')$ 为极的圆就很多，为了区分起见，对过球心的平面我们称它为极平面。同时可以看出，一个圆有两个极，而这两个极的连线就是球的直径。

球面上某一个圆的极到这个圆周上的任意一点的距离，称为极距离。

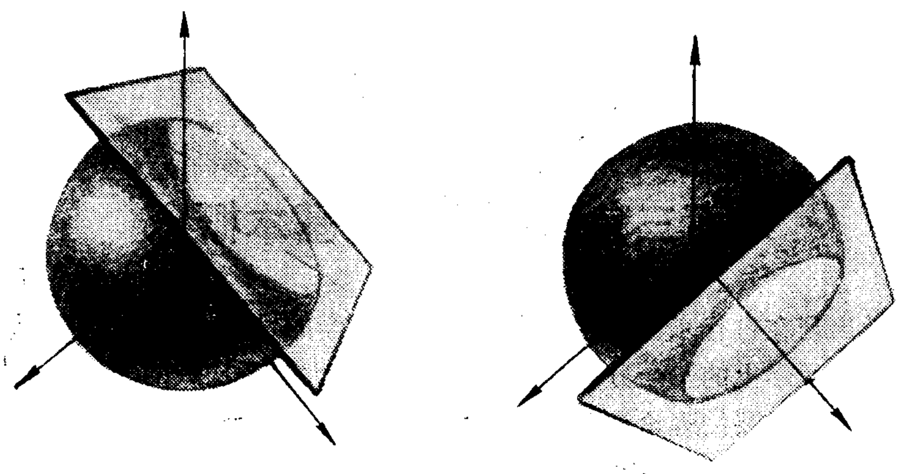


图 1-2　小圆

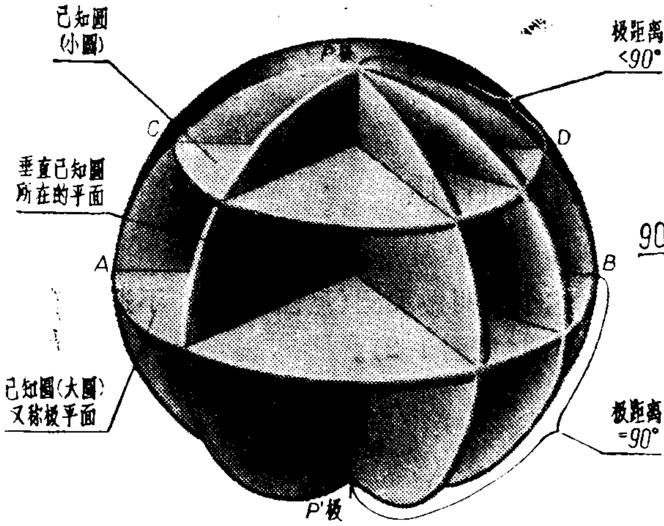


图 1-3　球面上的圆的极

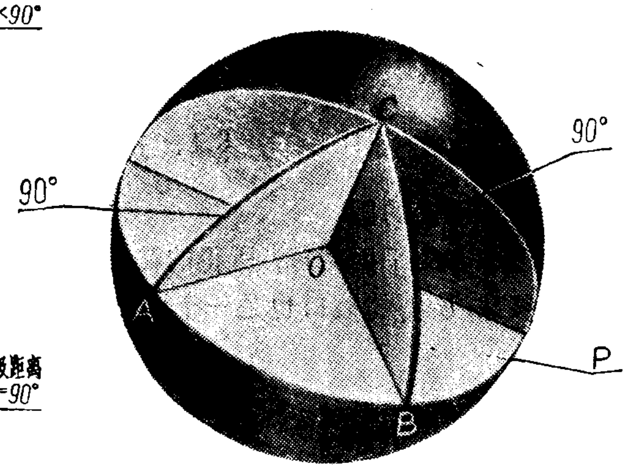


图 1-4　极的又一定理

关于圆的极，还有这样的定理：即大圆的极距离为一象限(=90°)。反之，如果球面上一点 C(见图 1-4)到其它两点 A、B(不是直径的端点)的距离都是一象限，那末点 C 必为通过 A、B 两点的大圆的极(即 C 为 P 圆的极)。

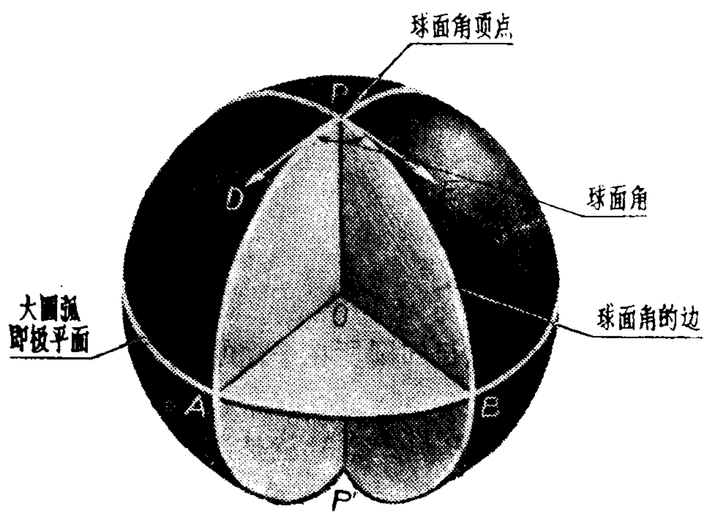


图 1-5　球面角

三、球面角与球面三角形

1．球面角：两大圆相交所成的角，叫做球面角(见图 1-5)。其交点叫做球面角的顶点，大圆弧叫做球面角的边。图 1-5 中的球面角 APB 与 $AP'B$(简记为球面角 P 与 P')的顶点为 P 与 P'，而 PAP'、PBP' 为它的边。通常，球面角是以过顶点的圆弧的二切线所夹的角来度量的。

在图 1-5 中，设以 P 为极的大圆与球面角的边交于 A、B，过 P 作 PA、PB 的切线

PD、PE，则有

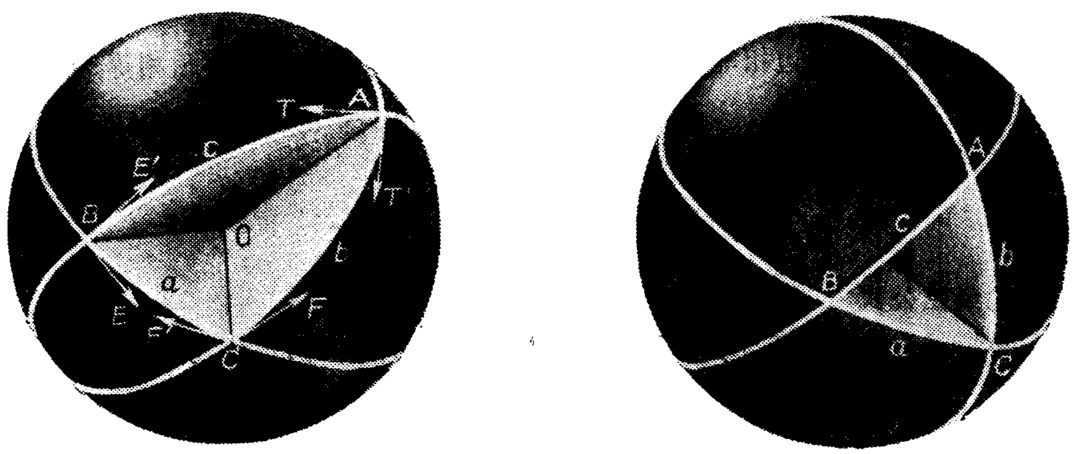
$$\angle DPE = \angle AOB,$$

即

$$\text{球面角 } P = \widehat{AB}。$$

这就是说，球面角与以其顶点为极而夹在角两边间的大圆上的弧同度。

2．球面三角形：球面上相交于三点的三个大圆弧所围成的球面上的一部分，叫做球面三角形（见图 1-6）。这三个大圆弧叫做球面三角形的边。通常用小写拉丁字母 a、b、c 来表示。每两个大圆弧所成的球面角，叫做球面三角形的角，通常用大写拉丁字母 A、B、C 来表示。这三个边与三个角统称为球面三角形的六个元素。



(a)　　　　(b)

图 1-6　球面三角形

将球面三角形 ABC 的各顶点与球心 O 连接，则构成球心三面角 $O\text{-}ABC$（图 1-6(a)）。由于圆的中心角与所对的弧同度，故

$$a = \angle BOC;$$
$$b = \angle AOC;$$
$$c = \angle AOB。$$

又

$$A = \angle TAT';$$
$$B = \angle EBE';$$
$$C = \angle FCF'。$$

这就是说，球面三角形的边与所对应的球心三面角的平面角同度；而球面三角形的角与球心三面角的二面角*同度。

四、球面三角形的边和角的基本性质**

1．球面三角形两边之和大于第三边。即

$$a + b > c;$$
$$a + c > b;$$
$$b + c > a。$$

推论：球面三角形两边之差小于第三边。

---

* 二面角定义：一直线及由这直线所引出的两半平面所构成的几何图形叫做二面角，这直线叫做二面角的棱。二面角在垂直于棱的平面上度量其平面角即可。

** 证明见第五章，第二节。

2．球面三角形三边之和大于0°、小于360°。即

$$0°<a+b+c<360°。$$

3．球面三角形三角之和大于180°，小于540°。即

$$180°<A+B+C<540°。$$

4．球面三角形的两角之和减第三角小于180°。即

$$A+B-C<180°;$$
$$A+C-B<180°;$$
$$B+C-A<180°。$$

5．若球面三角形的两边相等，则这两边的对角也相等。反之，若两角相等，则这两角的对边也相等。

6．球面三角形中，大角对大边，大边对大角。

§2．球面三角形的基本公式*

一、边的余弦公式

球面三角形每边的余弦等于其它两边余弦的乘积加上这两边正弦及其夹角余弦的连乘积。即

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A;$$
$$\cos b=\cos c\cdot\cos a+\sin c\cdot\sin a\cdot\cos B;$$
$$\cos c=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b\cdot\cos C。$$

二、角的余弦公式

球面三角形角的余弦等于其它两角余弦乘积冠以负号加上这两角正弦及其夹边余弦的连乘积。即

$$\cos A=-\cos B\cdot\cos C+\sin B\cdot\sin C\cdot\cos a;$$
$$\cos B=-\cos C\cdot\cos A+\sin C\cdot\sin A\cdot\cos b;$$
$$\cos C=-\cos A\cdot\cos B+\sin A\cdot\sin B\cdot\cos c。$$

三、正弦公式

球面三角形各边的正弦与其对角的正弦成比例。即

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}。$$

四、余切公式

即

$$\operatorname{ctg} a\cdot\sin c=\operatorname{ctg} A\cdot\sin B+\cos c\cdot\cos B;$$
$$\operatorname{ctg} a\cdot\sin b=\operatorname{ctg} A\sin C+\cos b\cdot\cos C;$$
$$\operatorname{ctg} b\cdot\sin a=\operatorname{ctg} B\cdot\sin C+\cos a\cdot\cos C;$$
$$\operatorname{ctg} b\cdot\sin c=\operatorname{ctg} B\sin A+\cos c\cdot\cos A;$$
$$\operatorname{ctg} c\cdot\sin a=\operatorname{ctg} C\cdot\sin B+\cos a\cdot\cos B;$$
$$\operatorname{ctg} c\cdot\sin b=\operatorname{ctg} C\cdot\sin A+\cos b\cdot\cos A。$$

* 证明见第五章，第二节。

§3. 球面直角三角形

一、球面直角三角形的边角关系

在球面三角形中，如有一角为直角，则叫球面直角三角形(图 1-7)。

球面直角三角形可以有一个、两个或三个直角。含有三个直角的球面三角形，它的各边均为一象限(=90°)(图 1-8)。

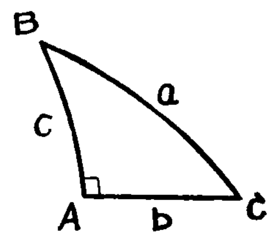


图 1-7 球面直角三角形

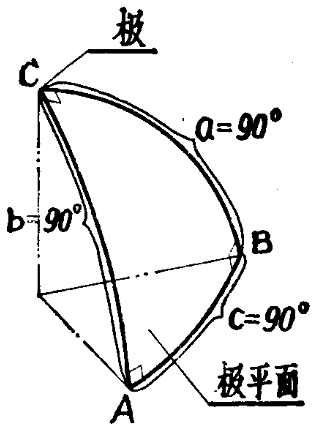


图 1-8 三个角为直角的球面三角形

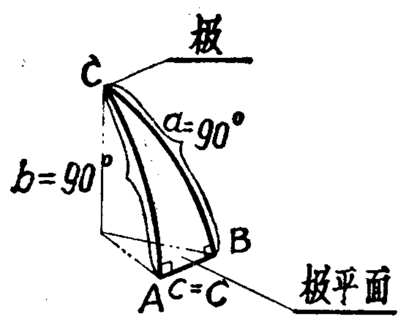


图 1-9 两个角为直角的球面三角形

含有两个直角的球面三角形，其中对直角的两边均为一象限(=90°)，而第三边与第三角同度(图 1-9)，即 $c=C$。所以含有三个或两个直角的球面三角形，它的边与角的关系都是确定的，就无需研究。含有一个直角的球面三角形作为本节的研究对象。

设球面三角形 ABC 中 $A=90°$，可根据

$$\sin 90°=1、\quad \cos 90°=0、\quad \operatorname{ctg} 90°=0$$

的关系，将前面所述的公式简化。

如边的余弦公式

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A,$$

表 1-1 球面直角三角形计算公式($A=90°$)

情况		角度			公式
1	三边	a	b	c	$\cos a=\cos b\cdot\cos c$
2	二角一边	B	C	a	$\cos a=\operatorname{ctg} B\cdot\operatorname{ctg} C$
				b	$\cos B=\sin C\cdot\cos b$
				c	$\cos C=\sin B\cdot\cos c$
3	一角二边	B	a	b	$\sin b=\sin a\cdot\sin B$
				c	$\cos B=\operatorname{ctg} a\cdot\operatorname{tg} c$
			b		$\sin c=\operatorname{tg} b\cdot\operatorname{ctg} B$
		C	a	b	$\cos C=\operatorname{ctg} a\cdot\operatorname{tg} b$
				c	$\sin c=\sin a\cdot\sin C$
			b		$\sin b=\operatorname{tg} c\cdot\operatorname{ctg} C$

当 $A=90°$ 时，则

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c。$$

根据这个原理，推导出球面直角三角形计算公式(表 1-1)共 10 个。这 10 个公式包括了在一切情形下解球面直角三角形所需的公式。为了便于计算时查用方便，特按角、边的不同组成情况编排。解球面直角三角形的公式也能用几何方法导出，这里不予介绍。

二、纳白尔记忆规则

在实际应用中要记住这些公式是有困难的，现介绍纳白尔记忆规则供读者采用。

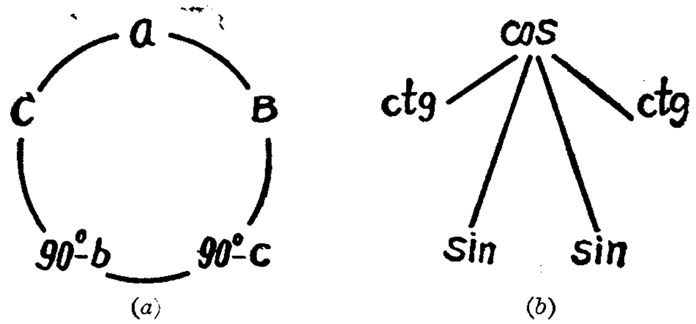


图 1-10 纳白尔记忆规则

纳白尔记忆规则的图形见图 1-10(a)、(b)。

在应用时将图 (b) 放在图 (a) 上，例如把图 (b) 中的余弦放在图 (a) 的 a 上，于是余切与 C 及 B 重合，而正弦和 $(90°-b)$ 及 $(90°-c)$ 重合，从这里得出公式：

$$\cos a=\operatorname{ctg}B\cdot\operatorname{ctg}C;$$

和

$$\cos a=\sin(90°-b)\cdot\sin(90°-c)=\cos b\cdot\cos c。$$

将图(a)对图(b)循序旋转，可以得出球面直角三角形的其余八个公式。

这两个图形由于是对称的，所以很容易记住。

这个以图形表示的记忆规则，可以表述如下：把球面直角三角形的直角边用 90° 减去它们所得的差来代替，那么球面三角形每一元素的余弦都等于相邻二元素余切的乘积或不相邻二元素正弦的乘积。

三、球面直角三角形的解

在球面直角三角形中，由于 $A=90°$，所以只要已知两个元素，就可求出其余三个元素。

[例] 已知球面三角形 ABC(图 1-11)中，$A=90°$、$B=65°$、$C=38°$，试求 c、b。

解：1) $c(c、B、C)$

根据括号中已知角、欲求角的符号，查表 1-1 中二角一边公式得

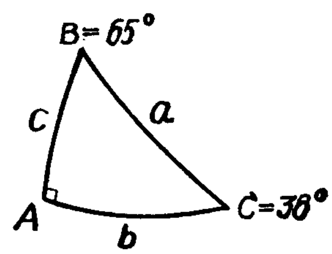


图 1-11

$$\cos C=\sin B\cdot\cos c,$$

即

$$\cos c=\frac{\cos C}{\sin B}=\frac{\cos 38°}{\sin 65°},$$

两边取对数得

$$\lg\cos c=\lg\cos 38°-\lg\sin 65°=\bar{1}.8965-\bar{1}.9573=\bar{1}.9392,$$

所以

$$c=29°37'。$$

2) $b(b、B、C)$

根据括号中已知角、欲求角的符号，查表 1-1 中二角一边公式得

$$\cos B=\sin C\cos b,$$

即

$$\cos b=\frac{\cos B}{\sin C}=\frac{\cos 65°}{\sin 38°},$$

两边取对数得

$$\lg\cos b=\lg\cos 65^\circ-\lg\sin 38^\circ=\bar{1}.6259-\bar{1}.7893=\bar{1}.8366,$$

所以
$$b=46^\circ 39'。$$

§4. 球面直边三角形

一、球面直边三角形的边、角关系

在球面三角形中，如有一边为 90° 的球面三角形，就叫做球面直边三角形(图 1-12)。

球面直边三角形可以有一个、两个或三个边都为 90° 的。当三边都为 90° 时，它的各角均为直角。当两个边为 90° 时，对应角均为直角。而第三角与第三边同度。这两种情况的边、角关系都已确定，所以只须研究一个边为 90° 时的球面三角形即可。

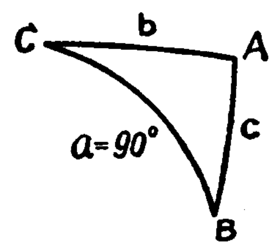


图 1-12 球面直边三角形

设球面三角形 ABC 中 $a=90^\circ$，可根据

$$\sin 90^\circ=1、\quad \cos 90^\circ=0、\quad \operatorname{ctg} 90^\circ=0$$

的关系，将前面所述的公式简化。

如边的余弦公式

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A$$

中，当 $a=90^\circ$ 时，则

$$\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A=0,$$

即
$$\cos A=-\frac{\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}=-\operatorname{ctg} b\cdot\operatorname{ctg} c。$$

根据这个原理，导出了在一切情况下解球面直边三角形所需的全部公式(表 1-2)共 10 个。为了便于计算时查用方便，特按边、角的不同组成情况进行编排。

表 1-2 球面直边三角形计算公式($a=90^\circ$)

情况		角度			公式
1	三角	A	B	C	$\cos A=-\cos B\cdot\cos C$
2	二边一角	b	c	A	$\cos A=-\operatorname{ctg} b\cdot\operatorname{ctg} c$
				B	$\cos b=\sin c\cdot\cos B$
				C	$\cos c=\sin b\cdot\cos C$
3	一边二角	b	A	B	$\sin B=\sin b\cdot\sin A$
				C	$\cos b=-\operatorname{ctg} A\cdot\operatorname{tg} C$
			B		$\sin C=\operatorname{ctg} b\cdot\operatorname{tg} B$
		c	A	B	$\cos c=-\operatorname{ctg} A\cdot\operatorname{tg} B$
				C	$\sin C=\sin c\cdot\sin A$
			B		$\sin B=\operatorname{ctg} c\cdot\operatorname{tg} C$

二、纳白尔记忆规则

为便于读者记住这些公式，特介绍纳白尔记忆规则，其图形见图 1-13(a)、(b)。在应用时，将图(b)中的余弦放在图(a)的 $180^\circ-A$ 上，于是余切与 c 及 b 重合；而正弦和($90^\circ-B$)及($90^\circ-C$)重合，从这里得出公式:

(a) (b)

图 1-13 纳白尔记忆规则

$$\cos(180°-A)=\operatorname{ctg} c\cdot\operatorname{ctg} b,$$

即

$$\cos A=-\operatorname{ctg} c\cdot\operatorname{ctg} b;$$

以及

$$\cos(180°-A)=\sin(90°-B)\cdot\sin(90°-C),$$

即

$$\cos A=-\cos B\cdot\cos C。$$

将这两个图形循序旋转，可以得出球面直边三角形的其余八个公式。

这个以图形表示的记忆规则，可以表述如下：

把球面直边三角形中 90° 边的邻角，用 90° 减去它们所得的差来代替，那么球面三角形每一元素的余弦都等于相邻二元素余切的乘积或不相邻二元素正弦的乘积。

三、球面直边三角形的解

在球面直边三角形中，由于 $a=90°$，所以只要已知两个元素，就可求出其余三个元素。

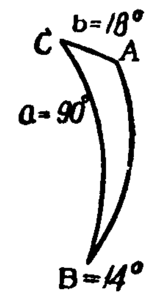


图 1-14

［例］ 已知球面三角形 ABC(图 1-14)中，$a=90°$、$B=14°$、$b=18°$，试求 C。

解：$C(C、B、b)$

查表 1-2 中一边二角公式得

$$\sin C=\operatorname{ctg} b\cdot\operatorname{tg} B=\operatorname{ctg} 18°\ \operatorname{tg} 14°,$$

两边取对数得

$$\lg\sin C=\lg\operatorname{ctg} 18°+\lg\operatorname{tg} 14°=0.4882+\bar{1}.3968=\bar{1}.8850,$$

所以

$$C=50°7'。$$

§5. 球面任意三角形

一、球面任意三角形的边、角关系

在球面三角形中，既无直角又无直边，则该球面三角形叫球面任意三角形（见图 1-15）。

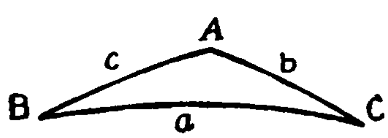


图 1-15 球面任意三角形

球面任意三角形的边、角关系，可由边的余弦公式、角的余弦公式、正弦公式、余切公式等公式中查用。

为了查用公式的方便，如直角、直边的计算公式一样，按边、角的不同的组成情况编排了表 1-3 共 18 个公式。可以满足在任何情况下解球面任意三角形的需要。

二、球面任意三角形的解

在解球面任意三角形时，角与边的符号不同于球面直角、直边三角形。球面直角、直边

表 1-3 球面任意三角形计算公式

情况	已知		求解	公式
1	二边及夹角	a, b, C	A	$\operatorname{ctg} A = -\cos b \cdot \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} a \cdot \sin b \cdot \csc C$
			B	$\operatorname{ctg} B = -\cos a \cdot \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} b \cdot \sin a \cdot \csc C$
			c	$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C$
2	二角及夹边	A, B, c	a	$\operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg} c \cdot \cos B + \csc c \cdot \sin B \cdot \operatorname{ctg} A$
			b	$\operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} c \cdot \cos A + \csc c \cdot \sin A \cdot \operatorname{ctg} B$
			C	$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \sin B \cdot \cos c$
3	二边及一对角	a, b, A	B	$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \sin A$
			C	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(A+B)$
			c	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)$
4	二角及一对边	A, B, a	b	$\sin b = \frac{\sin B}{\sin A} \sin a$
			C	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(A+B)$
			c	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)$
5	三边	a, b, c	A	$\cos A = \cos a \cdot \csc b \cdot \csc c - \operatorname{ctg} b \cdot \operatorname{ctg} c$
			B	$\cos B = \cos b \cdot \csc a \cdot \csc c - \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg} c$
			C	$\cos C = \cos c \cdot \csc a \cdot \csc b - \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg} b$
6	三角	A, B, C	a	$\cos a = \cos A \csc B \cdot \csc C + \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C$
			b	$\cos b = \cos B \cdot \csc A \cdot \csc C + \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} C$
			c	$\cos c = \cos C \cdot \csc A \cdot \csc B + \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B$

三角形只要先定 90° 角为 A(或定 90° 边为 a)，至于 B、C 之位置可任意确定。而球面任意三角形的符号要按表 1-3 而定。如图 1-16(a) 中 ∠1、∠2、边 3 是已知的，这种情况属于二角及一对边。根据表 1-3 应属于情况 4：A、B、a，所以应先定边 3 为 a，∠1 就应该是 A，

(a) (b)

图 1-16

$\angle 2$ 就是 B(见图 1-16(b)),其它元素的符号就可相应定下。

[例] 图 1-17(a) 中 $\angle 1 = 180° - 31°29'$、边 $3 = 2°40'$、$\angle 2 = 25°29'$, 求 $\angle 4$。

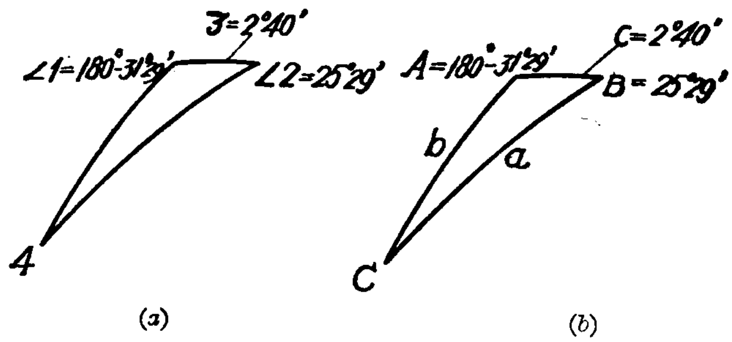


图 1-17

分析: 根据表 1-3 中二角及夹边的已知条件, 则得图 1-17(b) 的球面三角形, 即 $A = 180° - 31°29'$、$c = 2°40'$、$B = 25°29'$, 求 C。

解: $C(C、A、B、c)$

查表 1-3 得

$$\begin{aligned}\cos C &= -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos c \\ &= -\cos(180° - 31°29') \cdot \cos 25°29' + \sin(180° - 31°29') \cdot \sin 25°29' \cos 2°40' \\ &= \cos 31°29' \cdot \cos 25°29' + \sin 31°29' \cdot \sin 25°29' \cdot \cos 2°40' \\ &= 0.8528 \times 0.9027 + 0.5223 \times 0.4302 \times 0.9989 \\ &= 0.76982 + 0.22445 \\ &= 0.99427,\end{aligned}$$

所以 $$C = 6°8'。$$

第 二 章

球面图理论基础及作球面图计算空间角度

§1. 球面图及其绘制

一、球面图的作用

采用球面三角法计算空间角度，首先要建立球面三角形，将已知角与欲求角根据它们的相互位置关系反映到球面三角形中去。

建立球面三角形的方法很多。如图 3-7-127 零件上，欲求 43° 角在 P 面的投影角 α，则球面三角形可根据题意直接建立。如图 2-1 就是直接建立的。当角度关系简单时，这种方法比较优越；但当已知角与欲求角较多时，则纯粹凭脑子设想，那就十分困难了，故不予提倡。本书介绍一种较简易的方法，即利用“球面图”来建立球面三角形法。

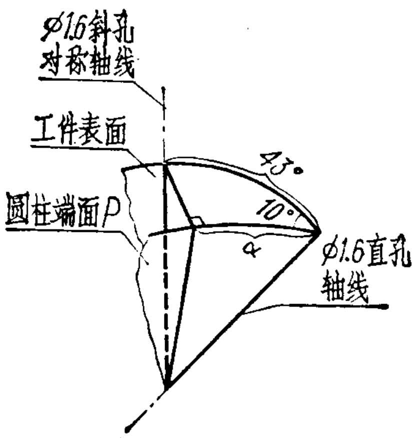


图 2-1

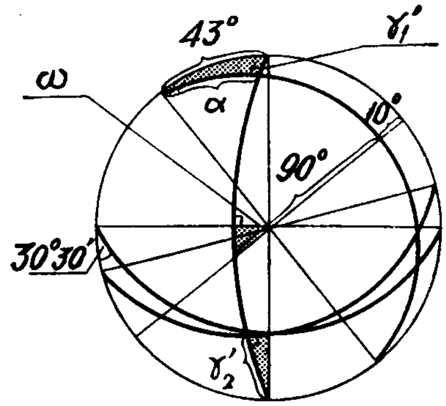


图 2-2

图 2-2 就是一个“球面图”，其中 43°、10°、30°30′ 是图 3-7-127 中的已知角。我们根据它们之间的相互位置和题意绘制了这么一个球面图。欲求角有 α、γ_1'、γ_2'、ω 等四个，所需要的球面三角形有三个，这三个球面三角形是一次建立的，所以既方便又准确*。

利用“球面图”法建立球面三角形的优点：

1．将复杂的空间角度简化为平面的几何图形；

2．能将所需的所有球面三角形一次建立，这样找关系容易，不易出错，效率高。

二、球面坐标系、球面图

1．球面坐标系：球面坐标系是由空间圆球，和原点落在球心的空间直角坐标面 V、H、W 所组成。

球面坐标系可分为三种形式，其名称以正视的大圆面的所在面而命名。如图 2-3(a) 叫 V 球面坐标系；图 2-3(b) 叫 H 球面坐标系；图 2-3(c) 叫 W 球面坐标系。

2．球面图：球面图就是通过球心的平面和直线与球表面的交线和交点在球面坐标系上

* 图 2-2 中标出的角度是怎样从图 3-7-127 中引来的，本书第 109 页有叙述。

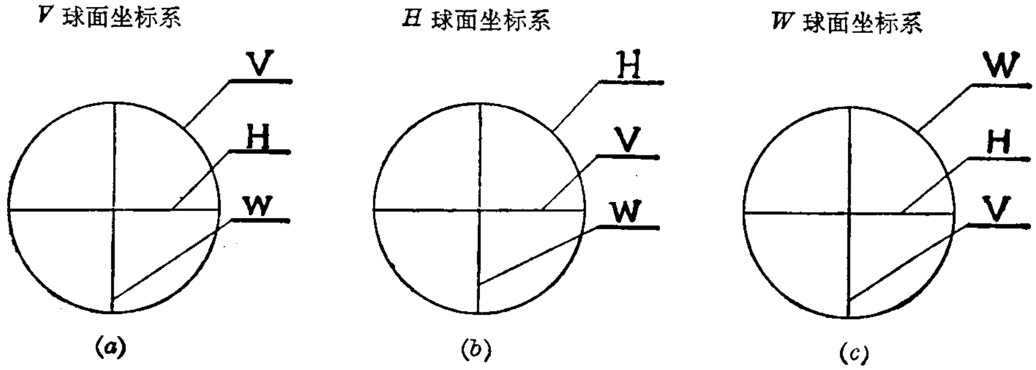


图 2-3

的投影。

在 V 球面坐标系上投影的球面图叫主视球面图，记作 V-球面图。

在 H 球面坐标系上投影的球面图叫俯视球面图，记作 H-球面图。

在 W 球面坐标系上投影的球面图叫侧视球面图，记作 W-球面图。

由于通过球心的平面与球面坐标系的夹角不同，则在球面图中的投影也不同，出现直线与圆弧两种(图 2-4)。图中 Q、M、N 是通过球心的平面；a 是通过球心的直线。

根据球面图的定义，在看球面图时应建立这样一个概念：球面图中的"点"实质上是"线"(通过该点和球心的连线)；球面图中的"线"(直线或圆弧)实质上是"面"(通过球心，投影为直线或圆弧的大圆平面)。

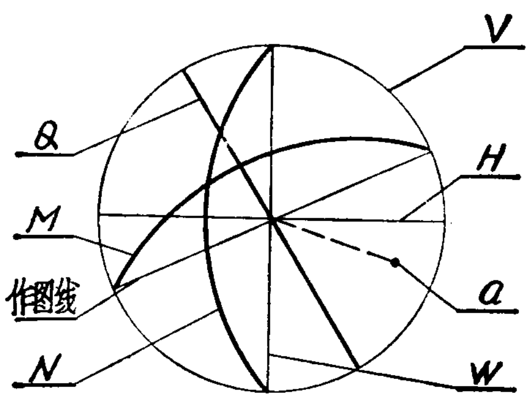


图 2-4

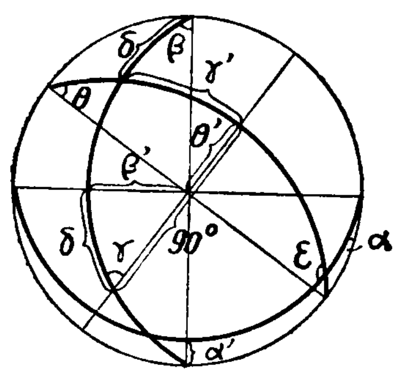


图 2-5

三、球面三角学中一些基本概念在球面图中的应用

1．球面角与球面角的边

球面角在球面图中表现为二段线条之间的夹角，如图 2-5 中 α、β、γ、θ、ε 都叫球面角。

球面角的边在球面图中表现为一段直线或一段圆弧，如图中 α'、β'、γ'、θ'、δ 都叫球面角的边。

当球面角的边，是在某球面角所对的极平面上时，则球面角的边与该球面角为同度角。如 α'、β'、γ'、θ' 分别与 α、β、γ、θ 同度。

2．极与极距离

"极"在球面图中表现为一个"点"，如图 2-6 中 K'、P'、Q'、T'、J'、N' 分别为同名称的大圆面之极。

“极距离”在球面图中表现为一段“直线”(或“圆弧”),其角度值规定为 90°。

根据极和极距离两个概念,我们可以在图 2-6 中找出很多直角与直边,这样对辨认球面三角形的类型,具有很重要的意义。

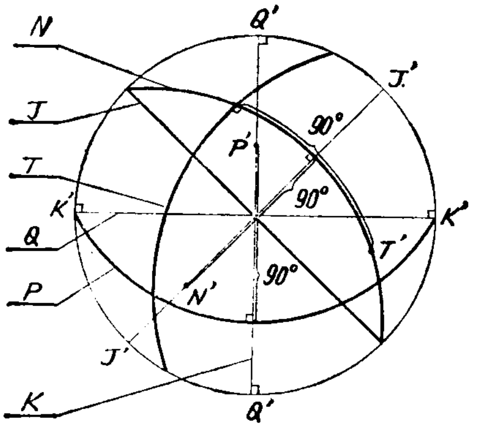


图 2-6

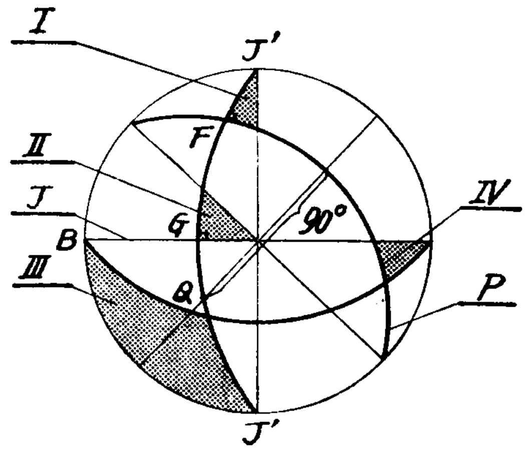


图 2-7

3. 球面三角形的判别

已知点 Q 至平面 P 的极距离为 90°(见图 2-7),根据极的定义,Q 点应是 P 面的极。那么 QF 亦是极距离,且等于 90°,所以 $\angle F=90°$。球面三角形 I 中 $\angle F=90°$,所以为球面直角三角形。J' 是 J 面的极,所以 $\angle G=90°$,则球面三角形 II 亦属于球面直角三角形。这两个球面三角形,在计算时应采用表 1-1 的公式。

因为 J 面的极为 J',所以 $J'B$ 为极距离,且等于 90°,在球面三角形 III 中,边 $BJ'=90°$,故属于球面直边三角形,在计算时应采用表 1-2 公式。

球面三角形 IV 中,既无角为 90°,又无边为 90°,所以属于球面任意三角形,在计算时应采用表 1-3 公式。

4. 球面图中,两线相交时(无论曲线、直线)对顶角相等。即 $\angle 1=\angle 1'$、$\angle 2=\angle 2'$(见图 2-8)。邻角互补,即 $\angle 1+\angle 2=180°$、$\angle 1'+\angle 2'=180°$。

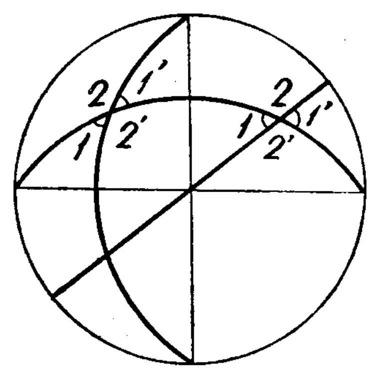


图 2-8

四、球面图的绘制

1. 球面图的绘制步骤

1) 根据产品图分析,欲求的角度用哪个视图的投影作为正视的大圆面较为方便,若认为主视图方便,则就选同名称的球面坐标系即 V 球面坐标系。同理,若俯视图方便,则选 H 球面坐标系。依此类推,只要产品图的视图与球面坐标系相对应即可。如果按零件的加工状态绘制也可以(见图 3-7-133)。

解题中可任意选取球面坐标系,对计算结果并无影响。但坐标系选得合适,就便于分析和解题。

2) 将产品图上与空间角度计算有关的平面、轴线平行移入同名称的坐标面中去,除了保持与各坐标面的角度不变外,还必定要通过球心(因研究对象是大圆),这样在球面图上就可得到一系列的大圆弧和点。

例如对图 2-9 零件,是选用 V 球面坐标系来绘制球面图(见图 2-10)的。ϕ 角是主视图

上的角度，所以将ϕ角平行移入V坐标面上；θ角是侧视图上的角度，所以须将零件底面平行移入W坐标面。由于θ角即是主视投影面与零件底面之间的夹角，所以设想沿W坐标面，有一平面从V坐标面向上扳起θ角(本书中"向上"、"向下"均指对书页而言)，所扳起的大圆面则应该是零件的底面。

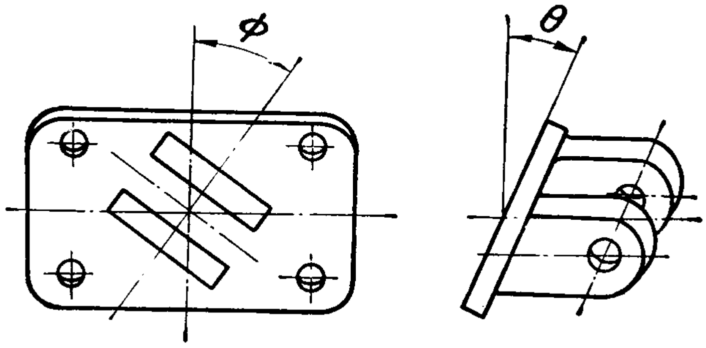


图 2-9

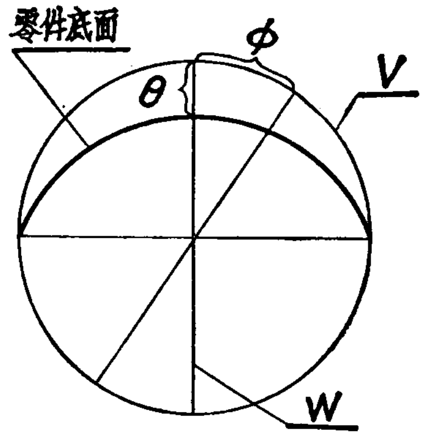


图 2-10

3) 在已作好的球面图中，根据计算的需要，可绘制一些基准面(如夹具底面、垂直面、对称面等)或计算时用的辅助面。

整个球面图的绘制步骤，就包括这样三个环节。然后在球面图中根据已知角和欲求角的分布情况，从球面图中选出计算用的球面三角形进行计算即可。

2．球面图的制图规定

1) 球面图中的角度与投影

(1) 角度

如图 2-11(a)(半球的二面投影图)中的主视图，其中 30° 均分四分之一圆球，按投影法画，则在俯视图的投影会出现不等距，即同样 30° 而间隔不等。若要求按产品图的俯视图作球面图，那么同样 30° 的弧(即球面角的边)，其长度就不相等，给制图带来麻烦。所以规定无论哪个视图上的角度，平移到球面坐标系中去，都以相等间隔等分角度的近似画法来作图(如图 2-11(b))。这样做并不影响空间角度计算的正确性。

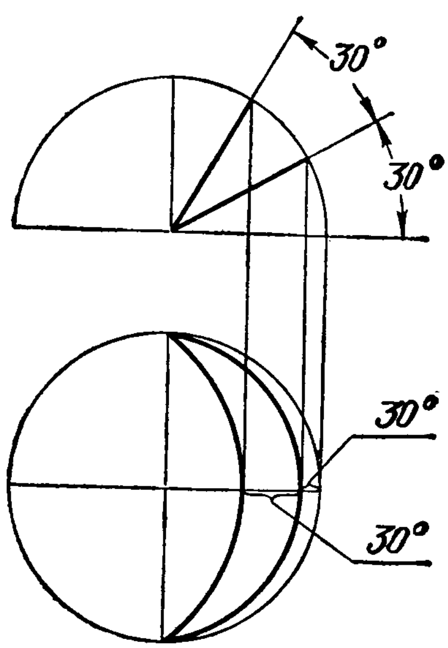


图 2-11(a)

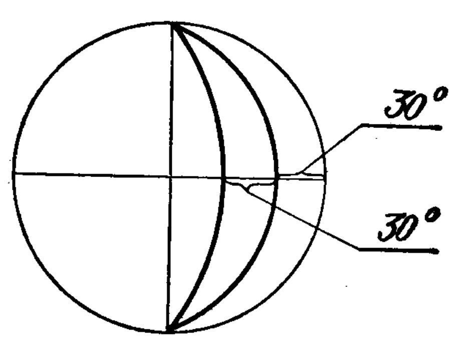


图 2-11(b)

当已知角数值较小时，则应按图 2-11(c) 进行角度的夸张画法；当已知角在90°附近时，则应按图 2-11(d) 进行角度的缩小画法。目的都是为了使计算用的球面三角形更清晰些。

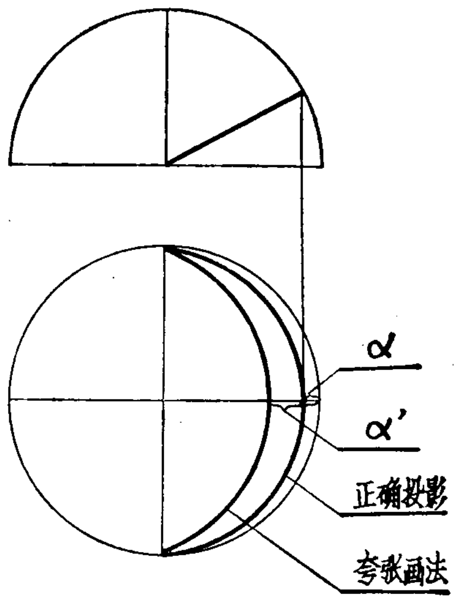


图 **2-11**(*c*)

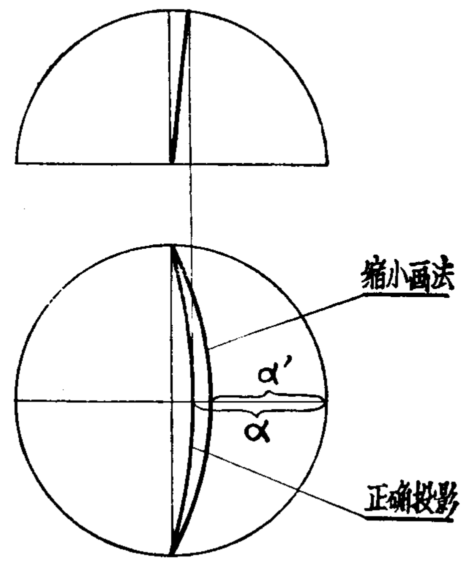


图 **2-11**(*d*)

(2) 投影

空间平面在球面坐标系中的投影线（即球面图中所有曲线）应如图 2-12 中那样是椭圆形的。

这种画法要寻找圆心，给制图带来很多困难。且在球面图的边缘，使球面三角形不易分清(如图右下角阴影三角形)。所以在球面图中所有的曲线均采用如图 2-13 那样近似画法，这样既不影响计算，又可用圆规直接画出，节省了作图时间。

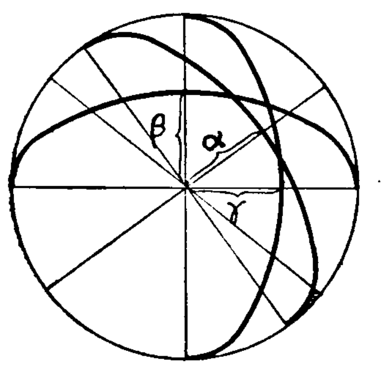


图 **2-12**

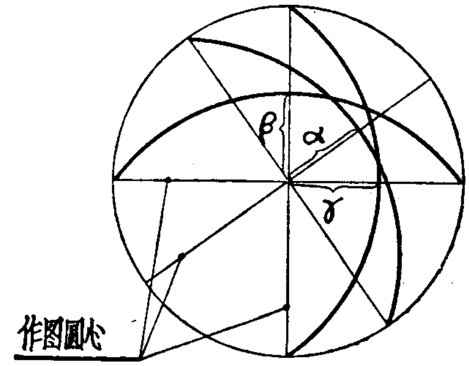


图 **2-13**

2) 极距离在球面图中的度量法

设 A 为球面角的顶点，那么图 2-14 中 $\widehat{AB}=\widehat{AC}=\widehat{AD}=\widehat{AE}=\widehat{AF}=90°$(极距离相等)，但投影的弧长都是不相等的，那么在不同的圆面上截取极距离时，应按其本身弧长来度量。即设 A' 为球面角顶点时，则极距离 $\widehat{A'H}=\widehat{AF}=90°$。

3) 球面图中的虚线与实线

在球面图中，当某平面(直线)投影在球面坐标系的前半球(V-球面图)、上半球(H-球面图)、左半球(W-球面图)时，则在球面图中的投影线(点)用实线(点)表示。反之，某平面投影在球面坐标系的后半球(V-球面图)、下半球(H-球面图)、右半球(W-球面图)时，则在

球面图中的投影线(点)用虚线(点)表示。

在同一个球面图中不允许同时出现虚、实两种线条。因为虚线与实线是不相交的,所以按虚线与实线构成的球面三角形来进行计算,则显然是错误的。

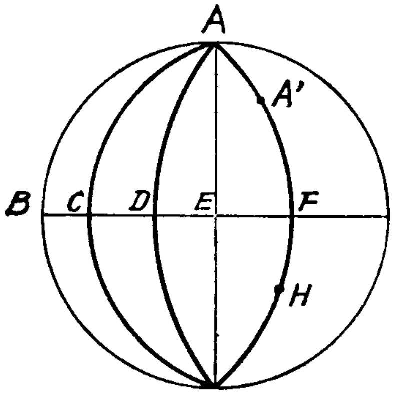


图 2-14

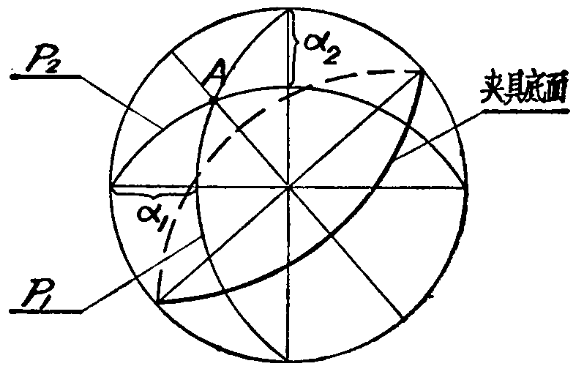


图 2-15

4) 球面图中线条的规定(见图 2-15)

(1) 球面坐标系全部用细实线$\left(\frac{b}{4}\right)$表示。

(2) 如决定空间点 A 的 α_1、α_2 角,所用的辅助平面(P_1、P_2)用细实线表示;点 A 用直径 $=b$ 的点表示。

(3) 零件上的平面、夹具上的底面或极平面等则用粗实线(b)表示。

(4) 不可见的面用虚线$\left(\frac{b}{2}\right)$表示。

球面图的直径,可以根据零件的复杂程度而定,一般在 40~50 mm 之间,$b=0.8\sim1$ mm。

§2. 空间直线的球面图绘制及空间角度计算

当直线对三个投影面都成倾斜时,我们把它叫做空间一般位置直线,又称双斜线或空间直线。

空间直线的角度计算,在空间角度计算中是属于最简单的一种,所以从此开始研究为最好。不论零件的形状如何复杂,在空间角度的计算范畴中,我们总可将它简化为轴线、法线或

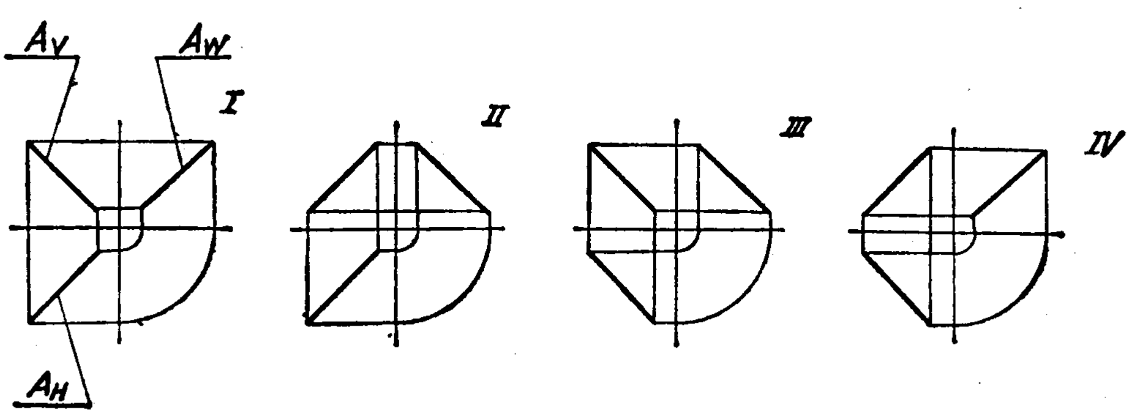


图 2-16 空间直线的四种倾斜情况(三面投影图)