O21

师范专科学校试用教材

13

# 概率论与数理统计

东北地区师专数学教材协编组
《概率论与数理统计》编写组

延边教育出版社

师范专科学校试用教材

# 概率论与数理统计

东北地区师专数学教材协编组
《概率论与数理统计》编写组

延边教育出版社

## 内 容 提 要

本书是编者根据原教育部1982年10月在昆明审订的师专数学专业教学大纲编写而成的。本书结合师专教学的实际，侧重基础理论的论述。叙述简明扼要，由浅入深，通俗易懂，范例较多，便于教学和阅读，可作为二、三年制师专数学专业试用教材，也可作高师数学专业函授教材及中学教师进修和各高校、成人高校有关专业学生学习的参考用书。

本书主要内容有事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、点估计、假设检验、方差分析与回归分析初步。

责任编辑：徐贞淑　王学寅

师范专科学校试用教材
概率论与数理统计
东北地区师专数学教材协编组
《概率论与数理统计》编写组
*
延边教育出版社出版发行
延边新华印刷厂印刷
787×1092毫米32开本　10.9375印张　222千字
1987年11月第1版　1987年11月第1次印刷
ISBN　7-80509-107-2/O.5
书号：13092·8　印数：1——5,130册
定价：2.20元

# 前　言

本书是按照原教育部制订的高等师范专科学校数学专业概率与数理统计教学大纲编写的。目的是供师专用作教材和教学参考之用，也可以供在职初中教师进修用。编写时我们致力建立随机现象及其统计规律性的基本概念和方法，尽量阐明基本概念、定理公式的客观意义和方法。并配置了一定数量的例题和习题，其中，一种是用来引入或解释概念、定义及定理，另一种是具有典型意义的问题。

本书分两部分。第一部分是概率论基础，包括第一章——第五章；第二部分是数理统计初步，包括第六章——第八章，考虑到二年制和三年制师专学时有所不同。本书大约用68学时可以讲授完，如果只有56学时，可以略去打星号(※)部分，并不影响对本书的学习。

编写时，我们希望简明、精练，文字通俗易懂和避免繁琐成为本书的一个特色。按这一想法，对于一些重要定理，证明比较冗长和需用工具超出本书范围者，我们只给出条件和结论，而不加以证明，但是，这并不降低大纲的要求。

在本书编写过程中我们始终得到吉林省延边师专，辽宁省铁岭师专，吉林省通化师院，黑龙江省哈尔滨师专的领导支持和帮助，我们在此致以谢意。

本书是由东北三省师专数学教材协编组邀集王学寅，周士

本、张永仪、姚羽、索振远五位同志编写的．由于水平有限，书中一定有许多缺点和错误，希读者批评指正。

编者

一九八六年十月一日

# 目　　录

## 第三章 随机变量的数字特征



## 第四章 大数定律与中心极限定理



## 第五章 数理统计的基本概念

# 第一章 随机事件及其概率

## §1.1 随机事件与样本空间

随机试验，随机事件，样本空间，随机事件的概率等是概率论中最基本的概念。

### 1. 随机试验

人们的一切实践活动，都是在一定的条件下进行的，今后，我们把“一定条件的实现”称为**试验**

如果试验可以在相同的条件下重复进行，并且试验的结果明确可知，但是在试验之前又无法预言试验后的结果，这样的试验就称为**随机试验**．记为E．有时把随机试验仍简称**试验**。

例如，一次投掷一枚硬币，就是一个随机试验。

### 2. 基本事件

随机试验E中的每一个可能结果称为**基本事件**．记为$\omega$。有时为了强调$\omega$是试验E中的一个基本事件，就记为$\omega \in E$

例如，一次投掷一枚硬币的试验中，有两个可能结果：正面朝上；反面朝上．那么，不妨记$\omega_1$＝{正面朝上}；$\omega_2$＝{反面朝上}．$\omega_1$、$\omega_2$就是该试验中的基本事件。

### 3. 样本空间

试验E的一切基本事件的集合称为**样本空间**．记为$\Omega$．也就是说，若E为一个试验，那么，E的样本空间为

$$\Omega=\{\omega: \omega\in E\}$$

例如，在一次投掷一枚硬币的试验中，它的样本空间为

$$\Omega=\{\text{正面朝上，反面朝上}\}=\{\omega_1, \omega_2\}$$

**例1.1** 试写出下列随机试验的样本空间

（1）$E_1$：一次抛掷二颗骰子

（2）$E_2$：A，B两人约定在〔0，T〕时间范围内相会。

**解**（1）用$\omega_{ij}$表示{第一颗骰子$i$点朝上，第二颗骰子$j$点朝上}。那么，$E_1$的样本空间

$$\Omega_1=\{\omega_{ij}: i, j=1, 2, \cdots, 6\}$$

显然，$\Omega_1$中共有36个基本事件。

（2）用$x$表示A到达约会地点的时间，用$y$表示B到达约会地点的时间。那么，$E_2$的样本空间

$$\Omega_2=\{(x, y): 0\leqslant x\leqslant T, 0\leqslant y\leqslant T\}.$$

显然，$\Omega_2$中有无穷多个基本事件。

为方便起见，样本空间中的每一个基本事件，叫做一个**样本点**。那么，可以把$\Omega$看成是由点组成的集合。

**4．随机事件**

设$\Omega$为某试验E的样本空间

$$\Omega=\{\omega: \omega\in E\}$$

$\Omega$的某个子集$A\subset\Omega$，即

$$A=\{\omega_{i_k}: \omega_{i_k}\in\Omega\}$$

称为随机事件。有时仍简单地说成事件。

例如，考察一次投掷一颗骰子的试验中，则它的样本空间$\Omega=\{\omega_i: i=1, 2, \cdots, 6\}$，其中$\omega_i$表示基本事件$i$点（$i=1$，

2，…，6）朝上．那么，

$$A=\{\omega_1,\ \omega_3,\ \omega_5\}$$

表示随机事件“奇数点朝上”；

$$B=\{\omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6\}.$$

表示“朝上点数不小于4”的事件．

因为随机事件A是$\Omega$的某个子集，A中包含着$\Omega$中的某些样本点$\omega$。今后，我们理解事件A发生当且仅当A中的某一个样本点发生了，否则，就说在试验A中没有发生．

例1.2 试验E：一枚硬币抛三次．试写出这个试验的样本空间，并指下列随机事件是由哪些样本点组成：

A表示{三次都是反面朝上}事件；

B表示{一次正面朝上}事件．

解 试验E有样本点

$\omega_1=$\{正反反\}；$\omega_2=$\{反正反\}；$\omega_3=$\{反反正\}；

$\omega_4=$\{正正反\}；$\omega_5$\{正反正\}；$\omega_6=$\{反正正\}；

$\omega_7=$\{正正正\}；$\omega_8=$\{反反反\}．

所以，E的样本空间为

$$\Omega=\{\omega_i;\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 8\}.$$

显然，随机事件

$$A=\{\omega_8\}$$

$$B=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\}.$$

例1.3（例1.1（2）续）。如果A，B事先约定相互等待的时间不超过$t$，$0<t<T$。试写出随机事件C中的样本点。

C表示{A，B在约定时间范围内相遇}

**解** 如果两人到达的时间差

$$x-y\leqslant t,\ \ y-x\leqslant t$$

则两人就相遇了．所以

$$C=\{(x,\ y):\ |x-y|\leqslant t,\ 0\leqslant x\leqslant T,\ 0\leqslant y\leqslant T\}$$

**5．不可能事件与必然事件**

把不包含$\Omega$的任何样本点的空集$\phi$，规定为$\Omega$的子集．此时，任给样本点$\omega\in\Omega$，总有$\omega\overline{\in}\phi$．根据我们所规定的事件发生的原则，无论怎样做试验，$\phi$总是不会发生的，称$\phi$为**不可能事件**．就记作$\phi$．

把样本空间本身看作是$\Omega$的一个子集．因为每次试验后，总有一个$\omega\in\Omega$，所以，无论怎样做试验，$\Omega$必定会发生．我们把$\Omega$对应的事件称为**必然事件**，仍记作$\Omega$．

例如，考察一个测量物重的试验，则测量结果为负就是一个不可能事件；测量结果非负是一个必然事件．

不可能事件，必然事件是随机事件的两个极端情况．

随机事件A是由$\Omega$中的若干样本点组成的．对一次试验出现的$\omega$可能属于A，也可能不属于A，也就是说，在一次试验中，A可能发生也可能不发生．但是，不可能事件与必然事件就不是这样，前者永远不发生后者总是发生．所以，实际上$\phi$、$\Omega$不是随机事件，但为今后方便起见，我们还是把它们看成随机事件．

## 习　题　1.1

1．写出下列试验的样本空间，并指出下列事件中所含有

的样本点。

(1) 投掷一枚硬币，直到首次出现正面朝上为止。

$A_1$表示{第三次抛时首次正面朝上}事件，

$B_1$表示{首次正面朝上抛掷的次数不少于10次}的事件。

(2) 测量平面上任一点到原点的距离。

$A_2$表示{距离不超过$r$}的事件，

$B_2$表示{距离大于$r_1$而又不大于$r_2$}的事件，$(r_1<r_2)$。

2. 4张纸卡上分别写着数码1，2，3，4从中任取3张组成一个三位数，试求这个试验中的样本空间。并写出下列事件所包含的基本事件：

A表示{组成的数能被3整除}，

B表示{组成的数大于300}，

C表示{组成的数不含1}。

3. 某人有5把钥匙，只有一把能开门，他每次任取一把试开，直至把门打开。如果试开后钥匙不返回。试求这个随机试验的样本空间，并写出下列事件所含的样本点

A表示{第二次试开时打开门}，

B表示{二次内试开时打开门}，

C表示{至少试开二次打开门}。

## §1.2 随机事件间的关系及其运算

### 1. 随机事件之间的关系

(1) 包含关系

有两个事件A、B，如果A发生必导致事件B发生，则称事件B包含事件A。记作$A\subset B$或$B\supset A$。

不难理解$A\subset B$的充分必要条件是

若$\omega\in A\Rightarrow\omega\in B$.

对任意一个随机事件A，总规定为

$\phi\subset A\subset\Omega$.

包含关系可用图1.1作为一种直观解释.

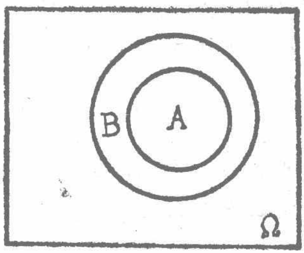


图 1.1

例如，考察生物体的寿命这一试验中，设

A表示{生物活到10岁}，

B表示{生物活到20岁}.

那么，不难理解

$B\subset A$

(2) 相等关系

两个事件A，B称为是相等的，如果$A\subset B$与$B\subset A$同时成立，并记为$A=B$.

显然，$A=B$的充分必要条件为

$\omega\in A\Longleftrightarrow\omega\in B$

也就是说，相等的事件由完全相同的样本点组成.

随机事件之间还有其它一些关系，不过它们与事件的运算

密切相关．待我们在给出随机事件的运算概念时，顺便指出它们．

2．随机事件的运算

(1) 事件的和(或并)．两个随机事件A、B的和记为$A\cup B$，它定义为

$$A\cup B=:\omega\{\omega\in A\text{或}\omega\in B\}$$

也就是说，$A\cup B$的含义是"A或B中至少发生一个"．它们直观解释见图1.2

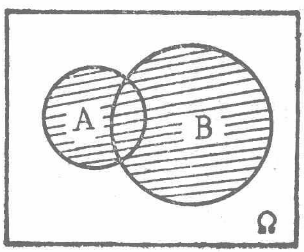


图 1.2

其中阴影部分就表示事件$A\cup B$．

例如，考察任一实数$x$，设有事件

A表示$\{x$是2的倍数$\}$，

B表示$\{x$是3的倍数$\}$．

那么

$A\cup B$表示$\{x$是2或3的倍数$\}$．

对有限个或无穷可列多个(*)随机事件的和具有类似的定

(*)一个集合的元素，若能用自然数编号，则称为可列集，如自然数集是可列的．

义。

对$n$个事件$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，它们的和

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{\omega:\ \omega\in A_1\text{或}\omega\in A_2,\ \cdots,\ \text{或}\omega\in A_n\}$$

也就是说，$n$个事件的和$\bigcup_{i=1}^{n}A_i$表示"$A_1$，$A_2$，…，$A_n$中至少发生一个"。

对无穷可列个事件$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…的和

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\{\omega:\ \omega\text{至少属于一个}A_i\},$$

也即$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$表示"$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…中至少发生一个"。

例如，考察三个产品的好坏，用

$A_i$表示{三个中有$i$个次品}事件。$i=0$，1，2，3。

那么，和

$A_1\cup A_2\cup A_3$表示三个中至少有一个次品；

$A_0\cup A_1$表示三个中至多有一个次品。

对和的运算，我们指出一些明显的关系式

$$A\cup\phi=A,\ A\cup\Omega=\Omega,$$

$$A\subset A\cup B,\ B\subset A\cup B,$$

$$A\cup A\cup\cdots\cup A=A,$$

还有

若$A\subset C$，$B\subset C$，那么，有

$$A\cup B\subset C,\ A\cup C=C,\ B\cup C=C.$$

(2) 事件的积(或交)。随机事件A、B的积(或交)记作$A\cap B$(或AB)定义为