概率论与数理统计

吴亚森　孙爱霞　主编

华南理工大学出版社

概率论与数理统计

吴亚森　孙爱霞
编
陈树英　庄楚强

华南理工大学出版社

内 容 简 介

本书是根据1986年高等学校教材编审委员会订出的"概率论与数理统计教学基本要求"及联系高等工科院校学生的实际需要编写的．全书共十章，前八章为概率论，第九、十章为数理统计．内容为：排列、组合、集合，随机事件，随机事件的概率，条件概率，事件的相互独立性及试验的相互独立性，一维、二维随机变量、随机变量的函数及其分布，随机变量的数字特征，极限定理，统计量及其分布，参数的估计，假设检验，单、双因素的方差分析，一元及二元线性回归方程等．各章配有适当的习题，书末附有答案．

本书可作为高等工科院校教材或参考书，也可作为业余大学及工程技术人员自学用书．

本书原为华南工学院出版社出版，现因学校改名，由华南理工大学出版社重印．

概率论与数理统计

吴亚森　孙爱霞
陈树英　庄楚强　编

责任编辑　林素华

华南理工大学出版社出版发行

广东省新华书店经销　华南理工大学印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 10.75　字数238千

1987年9月第1版　1988年11月第2次印刷

印数 7 001——10 000 册

ISBN 7－5623－0012－7 / O.3

定价：1.95 元

编者的话

概率论与数理统计的许多理论和方法已经在多数自然科学领域、某些社会科学领域和工农业生产中得到广泛应用.目前，工科院校各专业已把它列入必修的基础数学内容.为了更好地结合实际开展教学，我们编写了这本《概率论与数理统计》供工科各专业作为基础数学教材.

本书由华南理工大学吴亚森等同志编写，其第一稿概率论曾由华南理工大学作为教材试用过，效果良好，现又参照1986年高等学校编委会订出的“概率论与数理统计教学基本要求”对第一稿进行了修改和补充.在编写过程中，我们尽量联系生产实际和当今科学发展的实际情况，着重考虑如何才能达到培养学生分析问题和解决问题的能力的目的.本书可作工科院校教材，亦可供工程技术人员作自学参考.

全书共十章，前八章为概率论，后两章为数理统计.如本科生教学时数不足时，数理统计部分可作为工科研究生教材.

本书第一、二、三章由孙爱霞编写；第四、五、六章由庄楚强编写；第七、八章由陈树英编写；第九、十章由吴亚森编写.最后由吴亚森统阅了全书.

编写过程中得到华南理工大学多方面的关怀和支持，也听取了广州地区有关院校数学教研组（室）的宝贵意见，谨此表示衷心谢意.

编　者

1987年3月

目　录

第一章 预备知识

§1.1 排列与组合

一、加法原理与乘法原理

我们首先叙述两个基本原理——加法原理与乘法原理，这两个原理是排列、组合的基础。

1. *加法原理* 若完成某一工作任务有 k 种方式，第一种方式中有n_1个方法，第二种方式中有n_2个方法，…，第 k 种方式中有n_k个方法，这些方法都不相同，无论通过其中哪一种方法都可以完成这一工作任务，则完成这一工作任务共有$N=n_1+n_2+\cdots+n_k$种不同的方法。

2. *乘法原理* 若完成某一工作任务可以分成k个步骤进行，第一步有n_1种方法，第二步有n_2种方法，…，第 k 步有n_k种方法，各步骤连续完成，这一工作任务才能完成，则完成这一工作任务共有$N=n_1\times n_2\times\cdots\times n_k$种不同的方法。

如果一件工作分几种方法独立完成，计算所用的方法总数时，用加法原理，而若一件工作要分几步连续完成，则计算完成这件工作的方法总数时，用乘法原理。

二、排列

1. *选排列与全排列*

从n个不同的元素里，任意取出r个不同的元素（$1\leqslant r\leqslant n$），按一定的顺序排成一列，称为从n个不同元素中取出r个不同元素的一种排列，所有不同排列的总数用符号P_n^r或A_n^r表示。

【例1】 用1、2、3、4四个数字可以排成多少个没有

重复数字的三位数？

解　这个问题相当于从1、2、3、4这四个数字中，每次取出三个数字，按百位、十位、个位的顺序进行排列，求排列的总数 P_4^3，可以这样来考虑，从四个数中任取一个为百位上的数字，有4种取法，在剩下的三个数中任取一个为十位上的数字，有3种取法，而个位上的数字只有在剩下的两个数字中选取，有2种取法，根据乘法原理，一共有 $4\times 3\times 2=24$ 种排法。即可以排成24个不同的三位数，记以

$$P_4^3=4(4-1)(4-2)=4\cdot 3\cdot 2=24.$$

类似地，从 n 个不同的元素中每次取出 r 个不同元素进行排列，其排列总数 P_n^r 的计算方法可以这样来考虑：放在第一个位置的元素可以从 n 个元素中任意取一个，有 n 种取法；放在第二个位置的元素从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个，有 $n-1$ 种取法；第三个位置的元素从剩下的 $n-2$ 个元素中任取一个，有 $n-2$ 种取法；这样继续下去，直到最后一个位置，即第 r 个位置，只能在剩下的 $n-(r-1)$ 个元素中选取一个，共有 $n-(r-1)=n-r+1$ 种取法，于是（对 $r\leqslant n$）所求排列总数为

$$P_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \tag{1}$$

当 $r<n$ 时，称这样的排列为从 n 个不同元素中取 r 个不同元素的选排列。当 $r=n$ 时，即 n 个元素全部取出进行排列，叫做全排列，全排列总数记作 P_n 即

$$P_n=P_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1=n! \tag{2}$$

【例2】　从10本不同的书中取出3本排在书架上，共

有多少种排法？

解　这是一个从10个不同的元素中每次取出3个的选排列问题，把$n=10$，$r=3$代入（1）式得：

$$P_{10}^{3}=10(10-1)(10-2)=10\times 9\times 8=720.$$

即共有720种排法。

如果把这10本书全部排在书架上，这就是10个元素的全排列问题，共有10！种排法。即$P_{10}=10!$。

【例3】　两位老师与四位学生并排坐着照相，如果老师坐在中间，问有多少种坐法？

解　两位老师坐在中间有2！＝2种坐法，当老师就坐后，学生有$P_4=4!=24$种坐法，根据乘法原理，共有：$2\times 24=24=48$种坐法。

【例4】　从0、1、2、3、4、5六个数字中每次取出三个来排列，问（1）共有多少种排列；（2）在没有重复数字的三位数中，百位数上是2的有多少个？（3）可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解　（1）共有$P_6^3=6\times 5\times 4=120$种排列。

（2）在百位数上取定为2，十位数与个位数只能在0、1、3、4、5这五个数字中取，有P_5^2种取法，故百位数上是2的三位数共有$P_5^2=5\times 4=20$个。

（3）要组成三位数，零不能在百位上，而零在百位上的三位数有$P_5^2=5\times 4=20$个。故没有重复数字的三位数有$P_6^3-P_5^2=120-20=100$个。

2. 允许重复选取的排列

如果从n个不同的元素里任取一个元素，然后，把这个元素放回去，再取一个，又放回去，这样有放回地选取共进行了r次，取出r个元素，并按先后选取的顺序排成一列，称为从n个不同元素中允许重复地取出r个元素的排列。

从n个不同元素中，允许重复取出r个元素的排列总数为n^r。因为可以重复选取，所以，从n个元素中每次取出一个元素都有n种方法，故取出r个元素有

$$\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r个}=n^r$$

种方法。

【例5】 广州市的电话号码用六个数字组成，问最多可以安装多少台不同号码的电话机？

解 因为电话号码允许数字重复，且零可以安排在任何位置上，而数码相同而顺序不同是不同的号码，所以题中所要解决的问题，就是从0、1、2，…9十个数码中，允许重复的选取六个数字的排列问题，所以最多可安装10^6台电话机。

三、组合

从n个不同元素中，每次取出r个元素，不管它们之间的顺序，合为一组，叫做从n个元素中每次取出r个元素的组合，这样得出的所有不同组合的总数，叫做组合数，记作C_n^r或$\binom{n}{r}$（$1\leqslant r\leqslant n$）。

组合问题是与元素的顺序无关的，即从n个元素中取定r个不同元素后，只得到一种组合，但如果对这r个不同元素进行排列，可得到$r!$种不同的排列，而所有这些排列均是由一种组合变来的，所以，从n个不同元素中取出r个不同元

素的选排列总数 P_n^r 是 C_n^r 的 $r!$ 倍即

$$P_n^r = r! \cdot C_n^r$$

于是有

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} \tag{3}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\ r!}$$

从公式（3）可推得 $C_n^{n-r} = C_n^r$；因为

$$C_n^{n-r} = \frac{P_n^{n-r}}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots[n-(n-r)+1]}{(n-r)!}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(r+1)}{(n-r)!}$$

又 $\dfrac{n(n-1)\cdots(r+1)}{(n-r)!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(r+1)r!}{(n-r)!\ r!}$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\ r!} = C_n^r$$

故 $C_n^{n-r} = C_n^r$ 当 $r > \dfrac{n}{2}$ 时，用 C_n^{n-r} 代替 C_n^r 在计算上较为简单。

如：$C_{100}^{99} = C_{100}^1 = 100$。

【例 1】 从一副扑克牌52张中，任意取出5张，如果限定这5张牌中有一张A牌，问有多少种取法？

解 一副扑克牌中有4张A牌，故从4张A牌中任取一张

有 C_4^1种取法，又从其余48张牌中任取4张有 C_{48}^4种取法，根据乘法原理得：

$$C_4^1 \cdot C_{48}^4 = 4 \cdot \frac{48 \times 47 \times 46 \times 45}{4!}$$

$$= \frac{48 \times 47 \times 46 \times 45}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 778320 \text{种取法。}$$

【例 2】 两批产品各50件，其中各有次品 5 件，现在从这两批产品中各抽选一件，问

（1）两件都不是次品的选法有多少种？

（2）只有一件次品的选法有多少种？

（3）至少有一件次品的选法有多少种？

解 （1）从两批各有45件正品中各抽选1件，就是两件都不是次品的选法，有

$$C_{45}^1 \cdot C_{45}^1 = 45 \times 45 = 2025$$

种选法。

（2）从一批5件次品中抽选1件，另一批 45 件正品中抽选 1 件，就是只有一件次品的选法，于是，只有一件次品的选法有

$$C_5^1 \cdot C_{45}^1 + C_{45}^1 \cdot C_5^1 = 450$$

种。

（3）至少有一件次品，可以分两类情况：一是只有一件次品，二是两件都是次品，由于是分类完成，所以须将各类选法相加才得到选法种数，故至少有一件次品的选法种数是：

$$C_5^1 \cdot C_{45}^1 + C_{45}^1 \cdot C_5^1 + C_5^1 \cdot C_5^1 = 475\text{。}$$

读者思考：例2中至多有1件次品的选法有多少种？

§ 1.2 集　合

一、集合的基本概念

集合是指具有某种特定性质的事物的总体。（简称集）构成集合的事物称为集合的元素。

习惯上用大写字母A、B、C等表示集合，用小写字母a、b、c等表示集合的元素。如果a是集合A的元素，记作$a\in A$（读作a属于A），如果a不是集合A的元素，则记作$a\notin A$（读作a不属于A），如果集合A是由元素a、b、c…等组成，则集合A可记作：

$$A=\{a,b,c,\cdots\}$$

对于一个集来说，任何事物（即元素）或者是这个集的元素，或者不是这个集的元素，二者必居其一，不得兼有。即任何事物（元素）a与集A之间有两种关系：$a\in A$或$a\notin A$，集是由所有属于它的事物（元素）所完全确定的。

例如：设B是由一切奇数所组成的集合，即$B=\{1,3,5,7,\cdots\}$则$9\in B$而$4\notin B$。又如，设A是由方程$x^2-x-2=0$的实根所组成的集合，即$A=\{-1,2\}$。

在集合中，我们不考虑元素之间的顺序，只要元素完全相同，就认为是同一集合，在集合中重复出现的元素，只算作一个元素，如：集合$A_1=\{2,2,3,0\}$与$A_2=\{3,2,0\}$是同一集合。

由有限个元素所组成的集合，称为有限集，如果一个集合中有无限多个元素，则称这个集合为无限集，由所有自然数所组成的集合$N=\{1,2,3,\cdots n,\cdots\}$是一个无限集。如果一个无限集中的各个元素与全体自然数构成一一对应关系，

这样的无限集称为可列集或可数集，如 $B=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\frac{1}{n},\cdots\}$为可列集，不含任何元素的集合称为空集，用记号$\varnothing$表示空集，例如，由方程$x^2+1=0$的一切实根所组成的集合为空集。

二、集与集之间的关系

包含关系　如果集A的每一个元素都是集B的元素，称集B包含集A，记作$B\supset A$（也可记作$A\subset B$），并称A被B包含，或称A为B的子集）

如果集A的每一个元素都是集B的元素，而且集B中存在不属于A的元素，则说A是B的一个真子集。（图1—1）

图　1-1

相等关系　如果集A的每一个元素都是集B的元素，而集B的每一个元素也都是集A的元素，则说集A与集B相等，记作$A=B$，即

$$A\subset B且B\subset A\Longleftrightarrow A=B.$$

（符号$\Longleftrightarrow$表示充分必要条件）

三、集的运算

并集　由集A和集B的一切元素所组成的集合称为集A与集B的并集，记作$A\cup B$。（图1—2）（并集也可以说成由至少属于集A及集B二者之一的所有元素所组成的集合）即

$$A\cup B=\{x:\ x\in B或x\in A\},$$

如：

$\{3,4,2\}\cup\{1,3,5\}=\{1,2,3,4,5\}$

集合的并的概念不难推广到有限多个或可列多个集合的情形，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{及}$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

它们都是由至少属于一个 A_i 的元素所组成的集合。

$(i=1,2,3,\cdots n)$ 或 $(i=1,2\cdots n,\cdots)$ 例如

$\{1,2,3\} \cup \{4,5,6\} \cup \{6,7,8\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$。

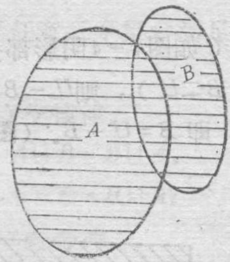

图 1-2

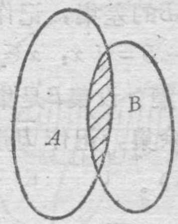

图 1-3

交集　由集A和集B的公共元素所组成的集合，称为A与B的交集，记作$A \cap B$。（即由同时属于集A及集B的所有元素所组成的集合）。即$A \cap B = \{x: x \in A \text{且} x \in B\}$（图 1—3阴影部分），如：

设$A = \{1,2,3,4,5\}$，

$B = \{5,6,7\}$

$C = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$　则

$A\cap B=\{5\}$；$A\cap C=\varnothing$，$B\cap C=\varnothing$。
即A与B的公共元素为5，而A与C及B与C无公共元素。

集合的交集的概念不难推广至有限多个或可列多个集合的情形，即

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i \text{及}$$

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$$

它们都是由属于A_i的公共元素所组成。($i=1,2,\cdots n$或$i=1,2,\cdots n\cdots$)

差集　由属于A但不属于B的所有元素所组成的集合称为A与B的差集，记作$A-B$，即

$A-B=\{x: x\in A$但$x\bar{\in}B\}$（如图1－4阴影部分）。

余集　设集B是集U的子集（$B\subset U$），则$U-B$称为B在U内的余集，记作$\overline{B}_U$或简记作$\overline{B}$，即$\overline{B}=U-B$。（图1—5阴影部分）。

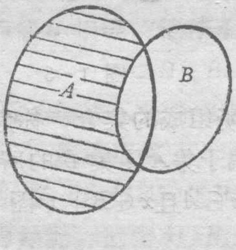

图 1－4

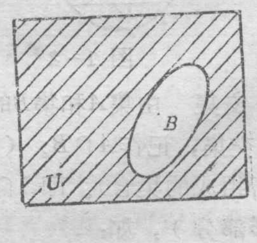

图 1－5

四、运算性质

1．关于余集有下列性质：

（1）$\overline{\overline{A}}=A$；