数学建模

Shuxue Jianmo

□ 主编 颜文勇

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

数学建模

Shuxue Jianmo

主　编　颜文勇

副主编　王　科

参　编　石　川　郑茂波

主　审　姜启源　韩中庚

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是一本面向高职高专教学的数学建模教材，是根据高职高专专业人才培养要求，适应高职高专学生知识基础和范围，精选丰富多样、难易恰当的模型，遵循常用的教学模式、按照新颖的体例编写而成的。

本书包括基础篇和竞赛篇，分别对应课堂教学和竞赛培训。主要内容有数学建模简介、初等模型、微分模型、微分方程模型、线性代数模型、数学规划模型、概率统计模型、数学建模竞赛及论文写作、数据建模、综合评价模型、应用案例分析等。

本书可以作为高职高专院校数学建模或数学模型课程教材，也可以作为具有初步高等数学知识的人员自学建模知识、训练数学应用能力或参加建模竞赛的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

数学建模/颜文勇主编．—北京：高等教育出版社，2011.6（2018.1重印）
ISBN 978 - 7 - 04 - 031890 - 6
Ⅰ.①数… Ⅱ.①颜… Ⅲ.①数学模型 - 高等职业教育 - 教材
Ⅳ.①O141.4
中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第098413号

策划编辑 邓雁城　　责任编辑 崔梅萍　　封面设计 于 涛　　版式设计 范晓红
插图绘制 宗小梅　　责任校对 殷 然　　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京凌奇印刷有限责任公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787×960　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	17.5	版　　次	2011年6月第1版
字　　数	310 000	印　　次	2018年1月第9次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	28.00元

物 料 号 31890-00

序

20世纪以来，随着科技的发展和社会的进步，数学这一重要的基础学科迅速向自然科学和社会科学的各个领域渗透，并在工程技术、经济管理等方面发挥着越来越重要的作用。数学与计算机技术相结合，已经形成了一种普遍的、可以实现的关键技术——数学技术，并成为当代高新技术的重要组成部分。

高等教育必须及时反映并满足社会发展的需要。数学教学不仅要通过传授数学知识来训练学生的逻辑思维和运算技巧，而且应该培养学生运用数学方法分析和解决实际问题的能力，数学建模就是利用数学工具来分析和解决实际问题的桥梁。但是长期以来数学应用能力的培养被忽视，开设数学建模课程、举办数学建模竞赛无疑是改变这一现象的成功尝试。

相对于本科院校而言，以培养技能型、应用型人才为目标的高职高专院校，将数学建模作为数学教学的重要组成部分，更有其必要性和可行性。我们已经看到，越来越多的高职高专院校在讲授最基本的高等数学知识后，开设了各种形式的数学建模课程，还有的院校在试验重组以数学建模为主要线索的数学课程。

目前数学建模教材虽然很多，但是真正适用于高职高专院校、水平又较高的却很少。这本书的编者长期从事高职高专院校的数学教学，深刻了解高职高专院校的培养目标和学生的知识水平，使得这本书从体系到内容具有不少鲜明的特色，如力求与学生的知识、能力及数学课程的内容相衔接，恰当地选取建模类型，并进行适当的数学知识导引；收集、整理了许多简单的实际问题作为建模案例，并在解决各个问题后提出拓展思考的方向，做到形式活泼、内容丰富，融知识性和实用性于一体。

作为数学建模的入门读物，这本书在用作高职高专院校数学建模课程的教材之外，还兼顾到参加数学建模竞赛的培训。真诚希望这本书的出版能让更多的同学在学习数学建模、喜欢数学建模以及参加数学建模竞赛等各项活动中，得到有益的启迪和更大的收获。

姜启源

2011年2月

前　言

数学建模注重兴趣培养和过程开发,集知识传授、能力培养与素质提高于一体,集趣味性、知识性和探索性于一身。有别于传统数学教学,它能培养学生发现、分析和解决实际问题的兴趣与能力,从而提升学生的创新能力。这本数学建模教材根据高职高专人才培养要求,遵循“三个衔接”,着力做到“两个突破”。

一、“三个衔接”

1. 与高职的培养目标相衔接,加强建模能力和求解能力的培养

高等职业教育的主要任务是培养高素质应用性技能型人才。这类人才既要能动脑,更要能动手。高等职业教育的培养目标决定了数学建模教学应以培养应用型人才为目的,理论知识为实际应用服务。高职学生毕业后将成为我国生产、建设、管理和服务行业第一线的生力军,若他们能应用已有的数学知识和方法不断改进工作方法,革新工艺流程,提高工作效率,提升产品质量,增强产品甚至企业的国际竞争力,那么他们将为我国的社会主义建设做出巨大的贡献。因此,数学建模课程的目标是加强学生建模能力和求解模型能力的培养,提升学生的实践应用能力。

2. 与高职学生的知识能力水平相衔接,增加可施教性

1) 简化理论,突出应用。高职高专学生的数学基础普遍较薄弱,基于此,全书简化复杂的数学理论和知识。在内容安排上,去掉较难的数学知识部分,如差分方程、偏微分方程、较难的随机模型等;在知识处理上,简化数学理论,弱化系统性,体现实用性,如求解线性规划问题的理论知识较多较难,本书省去单纯形法、对偶单纯法等理论算法,重点介绍利用数学软件求解规划问题的方法与技巧。

2) 分层设计。高职高专院校生源参差不齐,本书根据学生情况,分层设计。全书分基础篇和竞赛篇两部分,基础篇为广大高职高专学生的数学建模课程教学或其他数学课程教学而设计;竞赛篇为部分优秀学生参加全国大学生数学建模竞赛而设计。

3. 与高职数学课程内容相衔接

随着数学建模活动的不断深入,各学校在“将数学建模的思想和方法融入数学主干课程”的研究中进行了大胆的探索与实践,案例教学、启发式教学、互

动式教学方法等教学与实践相结合的教学方法和教学内容正逐步进入数学课堂。本教材在设计基础篇时,尽量与高职高专高等数学课程教学内容相衔接,努力将数学建模教学与高等数学教学进行实质性融合。

二、"两个突破"

1. 突破传统数学建模教材的理论体系和知识框架,根据高职培养目标和教学要求构建新的知识体系

高职高专的人才培养目标不同于研究型、学科型的本科培养目标。紧扣高职高专人才培养的目标和数学教学的基本要求,在介绍相关的数学知识和方法的同时,突出数学建模的基本思想、基本知识和基本方法。所有知识尽量从实际问题引入,运用尽量多的案例,让学生从大量浅显的实际问题的处理中领悟数学建模的方法,体会数学的奥妙与魅力,从而潜移默化地培养学生的数学应用意识与能力。

2. 突破一般数学建模教材的编写风格,体现趣味性、知识性和实用性

本教材在知识的导入、展开、案例的选取和计算方法的介绍等方面,都充分考虑高职学生接受知识的能力,做到浅显易懂,深入浅出,引人入胜。充分激发学生的兴趣,让数学建模成为通俗、易懂、实用、好用的有力工具,而不是深不可测、高不可攀的数学理论知识,从而让学生通过学习和训练受益终身。

该教材设计的能力培养过程如下图所示。

总的来说,本教材具有风格新颖、形式活泼、直观生动、内容有趣,融知识性和实用性于一体等特点。希望读者通过对本书的阅读和学习,提高发现问题和解决问题、运用知识和自主学习的能力,且达到学有所用、增强兴趣的目的。

本书的编写、出版得到了许多专家的关心和帮助。2009 年,在本书构思、编写之初,韩中庚教授就审阅了编写大纲,并提出了编写建议,成稿后,他又审阅了全书,一些具体的修改意见已体现在书中。另外,姜启源教授也一直关心本书的

出版,他拨冗为本书审稿并作序,给作者以鼓励和指导。在此,谨向他们表示感谢!

限于作者水平,又加之高职高专数学建模课程和教材尚待探索完善,本书不足之处在所难免,敬请广大同行和读者指正。

编　者
2011年3月

目　录

第一部分　基　础　篇

第二部分　竞　赛　篇

第一部分　基　础　篇

第一章　数学建模简介

学习目标：

1. 了解数学模型和数学建模；
2. 了解数学建模的基本方法与步骤.

1.1　奇妙的数学

人们无时无刻不在与数学打交道. 日常购物离不开算术，制订合理的购物或开销计划离不开现代数学方法. 数学是一门古老而又永远焕发青春的学科. 现代社会，数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献.

【优秀工程技术人员的数学素质】一名机械系的学生，要想成为一名优秀的工程技术人员，就应有意识地思考一系列与数学相关的问题，如加工工件原材料大小、形状的选取，材料切割方式的确定，加工工件参数的设计，加工工艺的优化，工件精度的确定，工艺流程的改良，成品外包装规格尺寸的选择，成品的摆放方式等等.

机械制造专业既然如此，其他专业就更不用多说. 现代社会的一个突出特点是定量化. 现代化的设计和控制，从一个大工程的战略计划、新产品的开发与制作、成本的结算、施工、验收、直到贮存、运输、销售和维修等都必须十分精确地规定大小、方位、时间、速度、成本等数字指标. 精确定量思维是对当代技术人员共同的要求. 数学不仅是现代社会发展的助推器，引领科技的竞争，而且数学作为一种文化，已成为人类文明进步的重要标志. 著名美国数学家、哲学家、数理逻辑学家怀特黑德(Whitehead，1861—1947)曾经说过："只有将数学应用于社会科学的研究之后，才能使得文明社会的发展成为可控制的现实."

可以毫不夸张地说，数学的应用无处不在. 其应用实例不胜枚举，下面略举3例，从中我们可以感受到数学的无穷魅力和强大威力.

1.【华罗庚的生产应用】20 世纪 70 年代,华罗庚教授亲自率领研究小组,深入到工厂、农村、矿山,大力推广优选法与统筹法,足迹遍及 23 个省市,成果遍及许多行业,解决了许多实际问题. 例如,纺织业中提高织机效率与染色质量,减少细纱断头率;电子行业中试制新的 160 V 电容器,使百万米废钼丝复活;农业中提高加工中的出米率、出油率、出酒率等,为国家经济建设做出了贡献.

2.【预测与控制】自然科学的主要任务是预测、预见各种自然现象. 数学是预测的重要武器,而预测则是管理工作如资金的投放、商品的产销、人员的组织等的重要依据. 我国数学工作者在天气、台风、地震、病虫害、鱼群、海浪等方面进行过大量的统计预测. 中国科学院系统研究所对我国粮食产量的预测,获得了很好的结果,连续 11 年的预测产量与实际产量平均误差只有 1%,保证了国家政策的科学性,确保了 13 亿中国人的温饱.

3.【军事】海湾战争中,美国运用运筹学和优化的方法,只用了短短一个月时间就将大批人员和物资调运到位.

1990 年,伊拉克点燃了科威特的数百口油井,浓烟遮天蔽日. 事实上,美国及其盟军在"沙漠风暴"之前,曾严肃地考虑了所有油井被点燃的后果. 通过建立模型和计算得出:大火的烟雾可能招致一场重大的污染事件,它将波及波斯湾、伊朗南部、巴基斯坦和印度北部,但不会失去控制,不会造成全球性的气候变化,不会对地球的生态和经济系统造成不可挽回的损失. 这样才促成美国下定决心发动号称"沙漠风暴"的军事行动. 所以人们说第一次世界大战是化学战(火药),第二次世界大战是物理战(原子弹),海湾战争则是数学战.

事实上,数学在国民经济和社会生活中扮演着越来越重要的角色. 希望同学们在今后的学习和工作中,不仅能学好数学,更能用好数学. 我们相信:数学在未来科技的竞争中必将显示出更强大的威力,彰显其在整个科学技术中的基础地位.

1.2 数学建模的概念

也许,你只听说过航空航天模型、建筑模型、机械模型或手机模型等实物模型,而对数学模型还很陌生. 但事实上,数学模型并不是新东西,可以说有了数学并用数学去解决实际问题,就一定要用数学的语言、方法去近似地刻画该实际问题,而这种刻画的数学表述就是一个数学模型.

【最典型的数学模型 1: 万有引力定律】17 世纪,牛顿从苹果落地这一大家熟视无睹的自然现象中发现了万有引力,并给出了万有引力定律公式

$F = G\frac{Mm}{r^2}$. 万有引力定律这一数学表示就是一个很好的数学模型.

【最典型的数学模型2：微积分基本公式】学习过微积分的同学都知道，17世纪牛顿和莱布尼茨几乎同时发明了微积分基本公式：若 $F'(x) = f(x)$，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. 微积分基本公式是一个划时代的优秀数学模型，它掀开了数学史的新篇章.

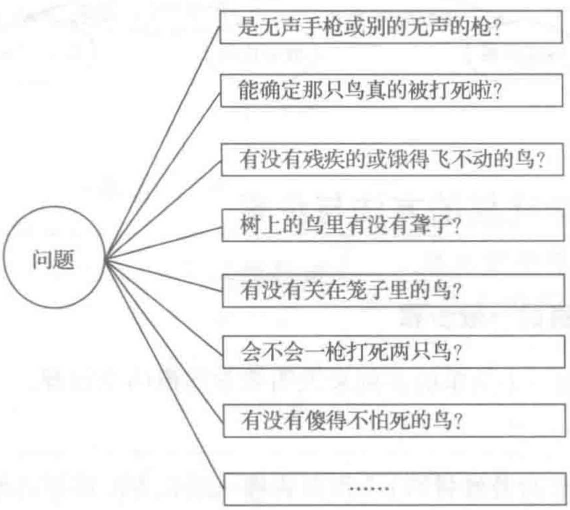
一般地说，当人们设计产品参数、规划交通网络、制订生产计划、控制工艺过程、预报经济增长、确定投资方案时，都需要将研究对象的内在规律用数学的语言和方法表述出来，并将求解得到的数量结果返回到实际研究对象的问题中去. 在决策科学化、定量化呼声日渐高涨的今天，数学建模几乎无处不在.

1.2.1 数学模型与数学建模

下面从一个有趣的脑筋急转弯问题引入数学建模的相关话题.

问题1 **【趣味题】**树上有7只鸟，开枪打死一只，还剩几只？

当我们置身于现实世界时，应该考虑到以下情形：



现实世界的复杂性和多样性需要充分发挥人们的想象力，从不同的角度思考同一个问题，想尽所有的可能. 但如果考虑的因素太多，又会导致我们无从着手分析并得出最终结论. 因此，在处理实际问题时，必须抓住问题的主要方面，对

复杂的客观现实世界进行必要的、合理的简化假设，从中抽象出数学问题，建立数学模型.

若把实际问题看做原型，则数学模型是将原型经过简化提炼而构成的替代物. 简化是构成数学模型的必要前提.

如果要下一个定义的话，**数学模型**是对一个实际问题，按照其内在规律做出一些必要、合理的简化假设后，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构. 借助数学的分析与计算全面探讨并求出所得模型的解. 再结合相关背景知识，利用所得结果解释或回答实际问题. 而建立数学模型的全过程称为**数学建模**.

这里所说的数学结构(数学表述)可以是一个等式或不等式，还可以是一个图表、图像、框图等等(或数学公式、算法、表格、图示等).

1.2.2 数学建模与求解数学应用题

数学建模的对象是客观实际问题. 从问题 1 的思考过程还可以看出，数学建模不同于求解应用题：应用题已经是一个理想化的数学问题，而实际情况却往往比想象中的更复杂，更棘手. 因此在建立数学模型之前，需要我们对客观对象进行深入的研究，并从中抽象出数学问题. 图 1－1 能大概说明数学应用题与现实问题以及数学建模之间的关系.

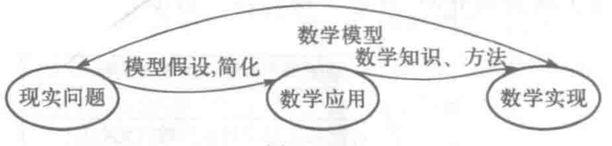


图 1－1

1.3 数学建模的方法与步骤

1.3.1 数学建模的一般步骤

下面，我们用一个简单的实例来说明数学建模的全过程.

> **问题 2 【节约装修材料】**小张要装修一间长方形房屋的地板，通过比较，他决定选用以下规格的玻化砖：500×500，600×600 和 800×800. 试建立选择玻化砖型号的数学模型，使浪费的地砖最少. 若这间房屋的面积为 $4.2\times3.6\ \mathrm{m}^2$，问选哪一种型号的地砖最好？

一、模型准备（弄清题意）

题目涉及安装行业的一些专用术语及专业知识，如：

1. 什么是玻化砖？

2. 玻化砖如何安装？有哪些技术要求？

3. 三种规格及型号的地砖：500×500，600×600，800×800 大小分别是多少？

带着这些问题，我们可以查阅资料、上网查询，或咨询装修行业的人员等. 从而可以获知：玻化地板砖是一种硬度较大的瓷砖，为防止在使用过程中因热胀冷缩而引起的拱翘，在安装过程中一般要预留收缩缝. 三种型号地砖 500×500，600×600，800×800 分别表示边长为 0.5 m，0.6 m，0.8 m 的正方形地砖.

另外：

4. 题目的要求：浪费材料最少.

5. 影响选择地砖的因素：

(1) 房间大小.

(2) 瓷砖大小.

准备就绪后，将进入下一步.

二、模型假设与变量说明（抓住主要因素，去掉次要因素）

经过模型准备，初步理顺了问题的要求以及影响目标的各个因素. 为便于下一步建模，由问题 1 我们知道，必须在这些众多因素中，抓住主要因素，去掉次要因素，做必要的、合理的简化假设.

1. 假设房间地面为一个标准的长方形.

注：虽然建筑误差和测量误差可能导致测量数据与实际房屋尺寸有一些出入，但在最初分析时，我们可以将问题理想化.

第一步　模型的准备
（问题分析）

建模的问题可能来自各行各业，而我们都不可能是全才. 因此，当刚接触某个问题时，我们可能对其背景知识一无所知. 这就需要我们想方设法地去了解问题的实际背景. 通过查阅、学习，可能对问题有了一个模糊的印象. 再通过进一步的分析，对问题的了解会更明朗化.

模型准备跟炒菜前的准备一样，准备得越充分，解决问题就越得心应手.

资料查阅十分重要

第二步　模型的假设

现实世界的复杂性和多样性，使得我们不得不根据实际情况扩大思考的范围，再根据实际对象的特性和建模的目的，在分析问题的基础上对问题进行必要的、合理的取舍简化，并使用精确的语言作出假设.

如果假设过于详细，试图把复杂的实际现象的各个因素

2. 假设玻化砖均为标准的正方形，三种型号地砖的边长分别为 0.5 m，0.6 m，0.8 m.

3. 不考虑玻化砖之间的缝隙、房屋尺寸的误差以及磁砖尺寸的误差等等.

4. 假设一间屋用同一型号的地砖.

5. 假设一块地砖被切割后，余料不能再用.

6. 设测得房间的长为 am，宽为 bm.

7. 设三种型号规格的地砖的边长分别为 $d_i(i=1,2,3)$.

都考虑进去，无疑是一种有勇气但方法欠佳的行为. 在假设中，应抓住问题的关键因素，抛弃次要因素. 当然，如果假设不合理或过分简单，也同样会因为与实际相去甚远而使建模归于失败.

必要而合理化的模型假设应遵循两条原则：

A. 简化问题；

B. 保持模型与实际问题的"贴近度".

必要的、合理化的简化

三、模型的分析与建立

所用地砖的数量 $=\lceil a/d_i\rceil\cdot\lceil b/d_i\rceil$，其中$\lceil\ \rceil$表示取上整，如$\lceil 5.3\rceil=6$.

所用材料的面积

$=(\lceil a/d_i\rceil\cdot d_i)\cdot(\lceil b/d_i\rceil\cdot d_i)$；

浪费面积 $=(\lceil a/d_i\rceil\cdot d_i)\cdot(\lceil b/d_i\rceil\cdot d_i)-ab$.

按题目的要求：求浪费的材料最少，即

$(\lceil a/d_i\rceil\cdot d_i)\cdot(\lceil b/d_i\rceil\cdot d_i)-ab$

最小，

简记为

$\min(\lceil a/d_i\rceil\cdot d_i)\cdot(\lceil b/d_i\rceil\cdot d_i)-ab$.

这就是要建立的数学模型

四、模型求解

当房间长 4.2 m、宽 3.6 m 时，将三种型号的地砖代入以上模型，进行比较，显然，选用 600×600 型地砖浪费材料最少.

第三步　**模型的建立**

根据所做的假设，利用适当的数学工具（应用相应的数学知识），建立多个量之间的等式或不等式关系，列出表格，画出图形，或确定其他数学结构.

事实上，建模时还有一个原则，即尽可能采用简单的数学工具，以便使更多的人能够了解和使用模型.

等式、不等式、表格、图形或其他数学结构