



普通高等教育“十二五”规划教材  
工 科 数 学 精 品 丛 书

# 概率论与 数理统计教程

(第四版)

李子强 黄 斌 主编



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

工科数学精品丛书

# 概率论与数理统计教程

(第四版)

李子强 黄 斌 主编

科学出版社

北京

# 版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229;010-64034315;13501151303

## 内 容 简 介

本书分为三部分,其中1~5章为概率论部分,包括概率论的基本概念、一维和二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理等;6~10章为数理统计部分,包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析、贝叶斯估计等;11~12章为应用部分,包括概率论与数量统计在实际中的应用以及统计分析软件SAS的简单介绍与应用举例。每章后配备了练习题,书末提供参考答案。

本书可作为高等学校各专业本专科学子的概率论与数量统计课程教材,也可作为报考硕士研究生考生的复习参考书,还可供工程技术人员、科研人员和教师阅读参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程/李子强,黄斌主编. —4版. —北京:科学出版社, 2015.10

(工科数学精品丛书)

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-046107-0

I. ①概… II. ①李… ②黄… III. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 IV. O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第251934号

责任编辑:王雨舸 / 责任校对:董艳辉

责任印制:高 嵘 / 封面设计:苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

开本:B5(720×1000)

2015年11月第 四 版 印张:23 3/4

2015年11月第一次印刷 字数:459 000

定价:46.80元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

# 《概率论与数理统计教程》(第四版)

## 编 委 会

主 编 李子强 黄 斌

副主编 罗幼喜 商 豪 胡二琴

编 委 (按姓氏笔画为序)

方 璞 田德生 刘 磊

李子强 李逢高 罗幼喜

胡二琴 费锡仙 黄 斌

商 豪

## “工科数学精品丛书”序

工科学生毕业多年后时常感言,数学知识很多似乎没有派上用处,但数学训练、数学思想和精神,却无时无刻不在发挥着积极的作用,成为取得成功的最重要因素之一。

数学是一门高度抽象的学科,但是它非人类精神纯粹自由创造和想象,而是源于自然和工程问题.系统传授数学知识当然是工科数学教学的基本任务与责任,同时,掌握了数学的思想方法和精神实质,就可以由不多的几个公式演绎出千变万化的生动结论,显示出无穷无尽的威力.工科数学创新教学,增强数学应用背景的讲授,拓宽学生的知识面,了解数学学科在科学研究领域的重要性,为学生打开数学与应用的窗口,等等,能培养学生的创新意识与精神,提高数学思维与素养,真正达到工科数学教学的目的。

工科数学精品教材的编写与成熟,在开放的视野与背景下,得到认同,自然成为纸质教材与数字出版的精品,从而得到广泛认可和使用。

在学会、领导和专家的关怀和指导下,本区域若干所全军重点、一本和省重点高校,其工科数学教材,在科学出版社出版和再版.10余年以来,教学和教材理念从素质教育,到分类分层教学改革,到数学思想、方法与创新教育,历经各校几届班子和责任教授的共同努力,逐渐成熟,成为具有较高质量的核心精品。

教材转型与数字出版呼之欲出,大趋势赫然在前,教材又重新经历新的考验.《工科数学精品丛书》正是按此理念和要求,直面开放的视野与背景,将改革与创新的成果汇集起来,重新审视和操作,精益求精,以赢得内容先机,修订版和新编教材均是如此。

修订和新编的核心理念,一是体现数学思维,将数学思想和方法(如数学建模)融入教材体系、内容及其应用;二是深化改革与创新,面向开放和数字出版的大平台,赢得内容先机,营造精品。

《工科数学精品丛书》为工科数学课程教材:高等数学、线性代数、概率论与数理统计、数学建模、数学实验、复变函数与积分变换、数值分析、数学物理方程、离散数学、模糊数学、运筹学等.上述各课程大多为全军级、海军级优质课程和省部级精品课程,对应教材为相应的一、二级获奖教材。

丛书注重质量,讲究适用和教学实践性,体系相对完整与系统,加强应用性,按照先进、改革与创新等编写原则和基本要求安排教材框架、结构和内容。

丛书具有明确的指导思想:

(1) 遵循高等院校教学指导委员会关于课程的教学基本要求,知识体系相对完整,结构严谨,内容精炼,循序渐进,推理简明,通俗易懂.

(2) 注重教学创新,加强教学知识与内容的应用性,注重数学思想和方法的操作与应用及其实用性.增强数学应用背景的介绍,拓宽学生的知识面,了解数学学科在科学研究领域的重要性,为学生打开数学与应用的窗口,培养学生的创新意识与精神,提高数学思维与素养,真正达到工科数学教学的目的.

(3) 融入现代数学思想(如数学建模),分别将 Mathematic、Matlab、Sas、Sps 等软件的计算方法,恰当地融入课程教学内容中,培养学生运用数学软件的能力.

(4) 强化学生的实验训练和动手能力,可将实验训练作为模块,列入附录,供教学选用或学生自学自练,使用者取舍也方便.

(5) 教材章后均列出重要概念的英文词汇,布置若干道英文习题,要求学生用英文求解,以适应教育面向世界的需要,也为双语教学打下基础.

(6) 为使学生巩固知识和提高应用能力,章末列出习题,形式多样.书后配测试题,书末提供解题思路或参考答案.

丛书为科学出版社普通高等教育“十二五”规划教材.

《工科数学精品丛书》编委会

2015年1月

## 第四版前言

概率论与数理统计是研究和探索客观世界中随机现象的科学,在金融、保险、经济与企业管理、工农业生产、军事、医学、地质学、空间技术、气象与自然灾害预报等方面起到非常重要的作用.现代科学的发展,越来越需要概率论与数理统计的指导来寻求随机现象的统计规律性,检验、分析和预测随机现象的规律、发展和变化.因此,概率论与数理统计已经成为高等学校理、工、农、经管等专业的一门重要基础课程.

全书分为三部分:第一部分(第1至5章)为概率论基础,包括概率论的基本概念、一维和二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理;第二部分(第6至10章)为数理统计基础,包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析、贝叶斯统计;第三部分(第11、12章)为概率论与数理统计应用,包括概率论与数理统计在实际中的应用以及统计分析软件SAS的简单介绍与应用举例.

本书可作为高等学校经管类、工科、理科等学科概率论与数理统计课程教材.在编写过程中,我们力求做到结构严谨,知识体系相对完整,例题丰富,通俗易懂.为适应不同学科类教学的需要,我们对书中部分内容采用\*标出,非数学和统计学专业学生在学时紧张情况下可不学习该部分内容,而数学和统计学专业学生可根据学时情况选择学习.为了方便学生巩固知识及自学,每章末配备了适量习题与自测题,并提供解题思路或参考答案.

本书由李子强、黄斌任主编,罗幼喜、商豪、胡二琴任副主编.各章编写人员如下:田德生(第1章),刘磊(第2章),方瑛(第3章),李子强(第4、5章),商豪(第6、11章),李逢高(第7章),黄斌(第8章),费锡仙(第9章),胡二琴(第10章),罗幼喜(第12章).罗幼喜、商豪、胡二琴对初稿内容进行了修改和整理,最后由李子强统稿、定稿.

由于编者水平有限,加上时间仓促,本书难免存在疏漏和不足之处,恳请广大读者批评指正.

编者

2015年6月

# 目 录

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| <b>第 1 章 概率论的基本概念</b> .....   | 1  |
| 1.1 随机事件与样本空间 .....           | 1  |
| 1.1.1 随机现象与随机试验 .....         | 1  |
| 1.1.2 样本空间与随机事件 .....         | 2  |
| 1.1.3 事件的关系与运算 .....          | 3  |
| 1.2 随机事件的概率 .....             | 6  |
| 1.2.1 概率的统计定义 .....           | 6  |
| 1.2.2 概率的古典定义 .....           | 7  |
| 1.2.3 概率的几何定义 .....           | 10 |
| 1.2.4 概率的公理化定义 .....          | 13 |
| 1.3 条件概率与概率公式 .....           | 16 |
| 1.3.1 条件概率 .....              | 16 |
| 1.3.2 概率的三个基本公式 .....         | 18 |
| 1.4 事件的独立性与伯努利概型 .....        | 22 |
| 1.4.1 两个事件的独立性 .....          | 22 |
| 1.4.2 多个事件的独立性 .....          | 23 |
| 1.4.3 伯努利概型 .....             | 24 |
| 1.5 概率计算杂例 .....              | 25 |
| 习题 1 .....                    | 34 |
| <b>第 2 章 一维随机变量及其分布</b> ..... | 38 |
| 2.1 随机变量与分布函数 .....           | 38 |
| 2.1.1 随机变量 .....              | 38 |
| 2.1.2 随机变量的分布函数 .....         | 39 |
| 2.2 离散型随机变量及其分布 .....         | 39 |
| 2.2.1 离散型随机变量的分布律 .....       | 39 |
| 2.2.2 常用离散型随机变量 .....         | 43 |
| 2.3 连续型随机变量及其分布 .....         | 48 |
| 2.3.1 连续型随机变量 .....           | 48 |
| 2.3.2 常见连续型随机变量 .....         | 51 |
| 2.4 随机变量函数的分布 .....           | 58 |



|                                |           |
|--------------------------------|-----------|
| 习题 2 .....                     | 61        |
| <b>第 3 章 多维随机变量及其分布</b> .....  | <b>65</b> |
| 3.1 二维随机变量 .....               | 65        |
| 3.2 二维离散型随机变量 .....            | 67        |
| 3.2.1 联合分布律 .....              | 67        |
| 3.2.2 边缘分布律 .....              | 69        |
| 3.2.3 条件分布律 .....              | 71        |
| 3.3 二维连续型随机变量 .....            | 72        |
| 3.3.1 联合概率密度 .....             | 72        |
| 3.3.2 边缘概率密度 .....             | 74        |
| 3.3.3 条件概率密度 .....             | 76        |
| 3.4 随机变量的独立性 .....             | 80        |
| 3.5 随机变量函数的分布 .....            | 82        |
| 3.5.1 随机变量之和的分布 .....          | 83        |
| 3.5.2 随机变量的最大值与最小值的分布 .....    | 88        |
| 3.5.3* 一般变换 .....              | 89        |
| 习题 3 .....                     | 94        |
| <b>第 4 章 随机变量的数字特征</b> .....   | <b>99</b> |
| 4.1 随机变量的数学期望 .....            | 99        |
| 4.1.1 离散型随机变量的数学期望 .....       | 99        |
| 4.1.2 连续型随机变量的数学期望 .....       | 100       |
| 4.1.3 随机变量的函数的数学期望 .....       | 102       |
| 4.1.4 数学期望的性质 .....            | 103       |
| 4.2 随机变量的方差 .....              | 105       |
| 4.2.1 方差的概念 .....              | 105       |
| 4.2.2 方差的性质 .....              | 107       |
| 4.2.3 常见分布的随机变量的期望与方差 .....    | 108       |
| 4.2.4 几个重要的不等式 .....           | 111       |
| 4.3 协方差、相关系数与矩 .....           | 112       |
| 4.3.1 协方差的定义与性质 .....          | 112       |
| 4.3.2 相关系数 .....               | 115       |
| 4.3.3 矩、协方差矩阵与 $n$ 维正态分布 ..... | 118       |
| 4.4* 特征函数 .....                | 119       |
| 4.4.1 特征函数的定义 .....            | 119       |
| 4.4.2 特征函数的基本性质 .....          | 122       |

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| 习题 4 .....                      | 124 |
| <b>第 5 章 大数定律与中心极限定理</b> .....  | 128 |
| 5.1 伯努利(Bernoulli)试验的极限定理 ..... | 129 |
| 5.1.1 大数定律 .....                | 129 |
| 5.1.2 中心极限定理 .....              | 132 |
| 5.2 收敛性* .....                  | 133 |
| 5.2.1 分布函数的弱收敛 .....            | 133 |
| 5.2.2 随机变量的收敛性 .....            | 134 |
| 5.3 独立同分布场合的极限定理 .....          | 136 |
| 5.3.1 独立和问题 .....               | 136 |
| 5.3.2 辛钦大数定律 .....              | 137 |
| 5.3.3 林德贝格-勒维中心极限定理 .....       | 138 |
| 习题 5 .....                      | 140 |
| <b>第 6 章 数理统计的基本概念</b> .....    | 142 |
| 6.1 总体与样本 .....                 | 142 |
| 6.1.1 总体与个体 .....               | 142 |
| 6.1.2 样本 .....                  | 143 |
| 6.1.3* 经验分布函数 .....             | 145 |
| 6.2 统计量及其分布 .....               | 146 |
| 6.2.1 统计量的概念 .....              | 146 |
| 6.2.2 三大抽样分布 .....              | 147 |
| 6.2.3 正态总体常用的抽样分布 .....         | 154 |
| 6.3* 次序统计量及其分布 .....            | 157 |
| 6.3.1 次序统计量 .....               | 157 |
| 6.3.2 单个次序统计量的分布 .....          | 158 |
| 6.3.3 多个次序统计量的联合分布 .....        | 160 |
| 习题 6 .....                      | 162 |
| <b>第 7 章 参数估计</b> .....         | 165 |
| 7.1 点估计的常用方法 .....              | 165 |
| 7.1.1 矩估计法 .....                | 166 |
| 7.1.2 最大似然估计法 .....             | 168 |
| 7.2 估计量的评价标准 .....              | 172 |
| 7.2.1 无偏性 .....                 | 172 |
| 7.2.2 有效性 .....                 | 174 |
| 7.2.3 相合性 .....                 | 176 |

|              |                                      |            |
|--------------|--------------------------------------|------------|
| 7.3          | 充分统计量与一致最小方差无偏估计                     | 177        |
| 7.3.1        | 充分性的概念                               | 177        |
| 7.3.2        | 因子分解定理                               | 179        |
| 7.3.3        | Rao-Blackwell 定理                     | 181        |
| 7.3.4        | 一致最小方差无偏估计                           | 183        |
| 7.4          | 区间估计                                 | 184        |
| 7.4.1        | 单个正态总体期望与方差的区间估计                     | 186        |
| 7.4.2        | 两个正态总体期望差与方差比的区间估计                   | 189        |
| 7.4.3        | 单侧置信区间                               | 193        |
| 7.4.4        | 非正态总体的置信区间                           | 194        |
|              | 习题 7                                 | 195        |
| <b>第 8 章</b> | <b>假设检验</b>                          | <b>198</b> |
| 8.1          | 假设检验的基本概念                            | 198        |
| 8.1.1        | 假设                                   | 198        |
| 8.1.2        | 检验统计量与临界值                            | 198        |
| 8.1.3        | 样本空间与拒绝域                             | 199        |
| 8.1.4        | 两类错误                                 | 199        |
| 8.1.5        | N-P 原则                               | 200        |
| 8.1.6        | 水平为 $\alpha$ 的检验                     | 201        |
| 8.1.7        | 处理假设检验问题的一般步骤                        | 202        |
| 8.2          | 单个正态总体的假设检验                          | 202        |
| 8.2.1        | 单个正态总体均值的假设检验                        | 202        |
| 8.2.2        | 单个正态总体方差的假设检验                        | 207        |
| 8.3          | 两个正态总体的假设检验                          | 209        |
| 8.3.1        | 比较 $\sigma_1^2$ 与 $\sigma_2^2$ 的假设检验 | 209        |
| 8.3.2        | 比较均值 $\mu_1$ 和 $\mu_2$ 的假设检验         | 210        |
| 8.4          | 假设检验与区间估计                            | 214        |
| 8.5          | 似然比检验                                | 216        |
| 8.5.1        | 广义似然比检验                              | 216        |
| 8.5.2        | 分布的似然比检验                             | 218        |
| 8.6          | 分布拟合检验                               | 219        |
| 8.6.1        | $\chi^2$ 检验法                         | 219        |
| 8.6.2        | 偏度、峰度检验                              | 223        |
| 8.7          | 秩和检验                                 | 225        |
|              | 习题 8                                 | 227        |

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| <b>第 9 章 方差分析与回归分析</b> ..... | 232 |
| 9.1 方差分析 .....               | 232 |
| 9.1.1 单因素试验的方差分析 .....       | 232 |
| 9.1.2 双因素试验的方差分析 .....       | 239 |
| 9.2 回归分析 .....               | 247 |
| 9.2.1 模型与背景 .....            | 247 |
| 9.2.2 一元线性回归模型 .....         | 247 |
| 9.2.3 模型参数的估计 .....          | 249 |
| 9.2.4 回归方程的显著性检验 .....       | 254 |
| 9.2.5 利用回归方程进行预测与控制 .....    | 258 |
| 习题 9 .....                   | 260 |
| <b>第 10 章* 贝叶斯统计</b> .....   | 263 |
| 10.1 先验分布与后验分布 .....         | 263 |
| 10.1.1 贝叶斯公式 .....           | 264 |
| 10.1.2 先验分布的选取 .....         | 266 |
| 10.2 贝叶斯估计 .....             | 269 |
| 10.2.1 统计决策的基本概念 .....       | 269 |
| 10.2.2 贝叶斯点估计 .....          | 270 |
| 10.3 贝叶斯区间估计 .....           | 273 |
| 10.4 贝叶斯方法在预测中的应用 .....      | 275 |
| 习题 10 .....                  | 277 |
| <b>第 11 章 概率论的应用</b> .....   | 278 |
| 11.1 数学期望的应用 .....           | 279 |
| 11.2 定积分的概率计算方法 .....        | 283 |
| 11.2.1 蒙特卡罗方法简介 .....        | 283 |
| 11.2.2 常用的两种算法 .....         | 285 |
| 11.2.3 重积分的计算 .....          | 288 |
| 11.3 随机徘徊与破产问题 .....         | 289 |
| 11.3.1 古典破产问题 .....          | 290 |
| 11.3.2 博弈持续时间的期望值 .....      | 293 |
| 11.4 概率在生物学中的应用 .....        | 294 |
| 11.4.1 在遗传学中的应用 .....        | 294 |
| 11.4.2 伴性性状 .....            | 297 |
| 习题 11 .....                  | 298 |

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| 第 12 章 数理统计的应用 .....           | 300 |
| 12.1 质量控制 .....                | 300 |
| 12.2 抽样检验 .....                | 305 |
| 12.2.1 抽样检验的过程 .....           | 306 |
| 12.2.2 一次抽样检验方案的接收概率 .....     | 306 |
| 12.2.3 一次抽样检验方案的 OC 曲线 .....   | 307 |
| 12.3 正交试验设计与分析 .....           | 311 |
| 12.3.1 不考虑交互作用的正交试验设计与分析 ..... | 313 |
| 12.3.2 有交互作用的正交试验设计与分析 .....   | 315 |
| 12.4 SAS 统计分析软件简介及其应用实例 .....  | 318 |
| 12.4.1 SAS 主要窗口 .....          | 319 |
| 12.4.2 SAS 主要菜单 .....          | 320 |
| 12.4.3 SAS 数据集的创建 .....        | 320 |
| 12.4.4 SAS 程序调用的基本模式 .....     | 322 |
| 12.4.5 常见统计分析模块 .....          | 322 |
| 12.4.6 应用实例 .....              | 324 |
| 习题 12 .....                    | 331 |
| 习题参考答案 .....                   | 334 |
| 主要参考文献 .....                   | 342 |
| 附录 常用概率统计表 .....               | 343 |

# 第 1 章 概率论的基本概念

概率论是研究随机现象的数量规律的数学分支,本章重点介绍概率论中的基本概念,如随机事件、空间样本、概率等,它们是学习概率论与数理统计的基础.

## 1.1 随机事件与样本空间

### 1.1.1 随机现象与随机试验

在自然界和人类社会生活中,存在着两类不同的现象:必然现象(确定性现象)和随机现象(不确定性现象),它们是从其结果能否准确预言的角度区分的.例如,水在标准大气压下于  $100^{\circ}\text{C}$  沸腾;太阳每天都从东边升起;匀速直线运动的物体在不受外力作用下仍保持匀速直线运动等,这种在一定条件下必然会发生(或必然不发生)的现象,称为必然现象.

除了必然现象之外,在人类社会生活中还存在着大量的随机现象.例如,抛掷一枚硬币,可能出现正面朝上,也可能出现反面朝上,而在每次抛掷之前,无法确定会出现何种结果;记录 24 小时通过武汉长江大桥的车辆数,可能是任意非负数,但事先无法预言其确切数字;每天中午观察武汉市的气温,它可能是某一实数,但事先无法确定其确切的数值.这类现象的共同特点是:在条件相同的情况下,一系列试验或观察会得到不同的结果.换言之,就某一次的试验或观察而言,它可能出现这样的结果,也可能出现那样的结果,呈现出一种偶然性,这种现象称为**随机现象**.

随机现象的结果虽然无法预测,但并不是完全无规律可循.例如,在篮球的投篮比赛中,选手甲和选手乙投篮之前,无法预知他们是否能够投中,而在日常生活中常听到“甲比乙优秀”这样的说法,这样说的依据是:根据以往多次比赛的统计,甲的命中率比乙的命中率高.可见,随机现象在个别试验或观察中呈现不确定的结果,而在大量重复试验或观察中,其结果呈现某种规律性,这种规律性称为**统计规律性**.

为了研究随机现象的统计规律性,必然要联系到对客观事物进行观察或试验.为此将这种在相同条件下进行的大量重复的试验或观察称为**随机试验**,简称为**试验**,用字母  $E$  表示.一般地,一个随机试验满足以下条件:① 试验可以在相同的条件下重复进行;② 每次试验的可能结果不止一个,而究竟会出现哪一个结果,在试验之前不能确定;③ 事先知道试验可能出现的所有结果.

**例 1.1.1** 下列各试验或观察都是随机试验.

$E_1$ : 掷一枚骰子, 观察朝上一面出现的点数.

$E_2$ : 观察长江武汉关的水位. 防汛指挥部关心的是“超过警戒水位”与“没有超过警戒水位”.

$E_3$ : 一学生宿舍的电话一天之内收到呼叫次数可能是某一个非负整数.

$E_4$ : 在一批日光灯管中任意抽取一只, 观察具体使用寿命.

$E_5$ : 记录武汉市一昼夜的最高气温和最低气温.

从例 1.1.1 可知, 随机试验是产生随机现象的过程, 二者是并存的, 人们通过随机试验来研究随机现象.

## 1.1.2 样本空间与随机事件

根据随机试验满足的条件可知, 一个随机试验将出现怎样的结果在试验以前是不能确定的, 但试验的所有可能结果在试验以前是已知的. 将随机试验  $E$  的每一个可能结果称为**样本点**, 一般用  $\omega$  来表示. 样本点的全体构成的集合称为**样本空间**, 一般用  $\Omega$  来表示. 通常来说, 给出样本空间是描述随机现象的第一步.

**例 1.1.2** 给出例 1.1.1 中各随机试验的样本空间  $\Omega_k$  ( $k=1, 2, \dots, 5$ ).

**解**  $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Omega_2 = \{\text{超过警戒水位}, \text{没有超过警戒水位}\}$

在这里, 若以“1”表示“超过警戒水位”, 以“0”表示“没有超过警戒水位”, 则

$$\Omega'_2 = \{0, 1\}$$

$$\Omega_3 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\Omega_4 = \{t \mid t \geq 0\}$$

$$\Omega_5 = \{(x, y) \mid T_0 \leq x \leq y \leq T_1\}$$

这里,  $x$  表示最低气温,  $y$  表示最高气温, 并设这一地区气温不会低于  $T_0$ , 也不会高于  $T_1$ .

从这些例子可以看出, 样本空间可以是数集, 也可以不是数集; 样本空间可以是有限集, 也可以是无限集.

这里需要指出的是, 样本空间的元素是由试验的目的所确定的. 例如,  $E_6$  表示将一枚硬币投掷两次, 观察两次出现正面、反面的情况;  $E_7$  表示将一枚硬币投掷两次, 观察两次出现正、反面数相同的情况的次数. 虽然上述  $E_6$  和  $E_7$  都是将硬币投掷两次, 但其试验目的不同, 其样本空间是不同的. 对于  $E_6$ , 其样本空间为

$$\Omega_6 = \{(\text{正面}, \text{正面}), (\text{正面}, \text{反面}), (\text{反面}, \text{正面}), (\text{反面}, \text{反面})\}$$

而对于  $E_7$ , 所有可能的结果只有出现 0 次和出现 1 次两个, 故其样本空间有两个元素, 即  $\Omega_7 = \{0, 1\}$ .

人们在研究随机现象时, 通常关心的不仅是某一个样本点在试验中是否出现, 更关心满足某条件的一些样本点在试验中是否出现. 例如, 在例 1.1.1 中的投掷一枚

骰子  $E_1$  的试验中,当关心掷出的点数是奇数的情况,则它是由 3 个样本点 1, 3, 5 所组成的集合. 同样在上述  $E_6$  的试验中,如果讨论“两次出现的面相同”的情形,那么它是由两个样本点“正正”和“反反”所组成的集合. 以上两个集合都是其相应样本空间的子集. 称样本空间的子集为**随机事件**,简称**事件**. 随机事件通常以大写字母  $A, B, C, \dots$  表示. 因此,以上两个事件可以表示为

$$A = \{\text{掷出的点数为奇数}\} = \{1, 3, 5\}$$

$$B = \{\text{两次出现的面相同}\} = \{(\text{正正}), (\text{反反})\}$$

由此可见,一个样本空间可以含有很多的随机事件.

一般地,对于随机试验  $E$ ,如果随机事件  $A$  中某一个样本点出现,那么就称事件  $A$  发生,否则就称事件  $A$  不发生. 例如,对于事件  $A = \{\text{掷出的点数为奇数}\}$ ,在试验中可能发生,也可能不发生,当且仅当掷出的点是 1, 3, 5 中的任一个时,则认为事件  $A$  发生. 同样,对于事件  $B = \{\text{两次出现的面相同}\}$ ,若试验的结果是(正, 正)或(反, 反),则可以认为随机事件  $B$  发生了.

根据定义,随机事件是样本空间的子集,由一个样本点组成的单点集当然是样本空间  $\Omega$  的一个子集合,因此也是随机事件,称之为**基本事件**. 样本空间  $\Omega$  是其自身的子集,因而  $\Omega$  也是随机事件. 由于样本空间  $\Omega$  包含所有的样本点,每次试验中必有  $\Omega$  中的一个样本点出现,即  $\Omega$  必然发生,称之为**必然事件**. 空集  $\emptyset$  总是样本空间  $\Omega$  的子集,因此  $\emptyset$  也是一个随机事件;而  $\emptyset$  不含任何样本点,在每次试验中都不发生,所以称之为**不可能事件**. 值得注意的是,必然事件和不可能事件都不具有随机性;但为了数学处理上的方便,仍把  $\Omega$  和  $\emptyset$  当成两个特殊的随机事件.

### 1.1.3 事件的关系与运算

在同一样本空间中,往往存在许多随机事件. 概率论的一个重要研究课题就是希望通过对较简单事件的分析,去了解较复杂的事件. 因此,需要研究同一个随机试验的各种事件之间的关系和运算.

由于样本空间、随机事件都是集合,因此,随机事件之间的关系和运算同集合论中集合之间的关系和运算是一致的. 设随机实验  $E$  的样本空间为  $\Omega$ ,而  $A, B, A_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) 都是  $\Omega$  的随机事件.

#### 1. 事件的包含

如果事件  $A$  发生必然导致事件  $B$  发生,则称事件  $B$  包含事件  $A$ ,或称事件  $A$  为事件  $B$  的子事件,即属于事件  $A$  的每一个样本点均属于事件  $B$ ,记为  $A \subset B$  或  $B \supset A$ .

显然,对任意事件  $A$ ,有  $\emptyset \subset A \subset \Omega$ .

#### 2. 事件的相等

若  $A \subset B$  且  $B \subset A$ ,则称事件  $A$  与事件  $B$  相等,记为  $A = B$ ,这表明事件  $A$  与事件  $B$  所包含的样本点完全相同.



### 3. 事件的和(并)

将表示“事件  $A$  与事件  $B$  至少有一个发生”的事件,称为事件  $A$  与事件  $B$  的和(并),记为  $A \cup B$ ,它是由属于  $A$  或  $B$  的所有样本点构成的集合. 事件  $A \cup B$  发生意味着或  $A$  发生,或  $B$  发生,或  $A$  与  $B$  都发生.

一般地,事件的和(并)可以推广到多个事件的情形,即

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

表示“事件  $A_1, A_2, \cdots, A_n$  中至少有一个发生”的事件.

### 4. 事件的交(积)

将表示“事件  $A$  与事件  $B$  同时发生”的事件,称为事件  $A$  与事件  $B$  的交(积),它是由既属于  $A$  又属于  $B$  的样本点构成的集合,记为  $A \cap B$  或  $AB$ .

类似地,事件的交(积)可以推广到多个事件的情形,即

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

表示“事件  $A_1, A_2, \cdots, A_n$  同时发生”的事件.

### 5. 事件的差

将表示“事件  $A$  发生而事件  $B$  不发生”的事件,称为事件  $A$  与事件  $B$  的差,记为  $A - B$ . 它表示由属于  $A$  但不属于  $B$  的样本点构成的集合.

### 6. 互不相容(或互斥)事件

如果事件  $A$  与事件  $B$  不能同时发生,即  $A \cap B = \emptyset$ ,则称事件  $A$  与事件  $B$  互不相容(或互斥),它表明事件  $A$  与事件  $B$  没有公共的样本点. 若  $A$  与  $B$  互不相容时, $A \cup B$  记为  $A + B$ ,称为  $A$  与  $B$  的和. 样本点是互不相容的.

### 7. 对立事件(或逆事件)

如果  $A \cup B = \Omega, A \cap B = \emptyset$ ,则称事件  $A$  与事件  $B$  互为对立事件,或互为逆事件,它表示事件  $A, B$  中必有一个且仅有一个发生.  $A$  的对立事件记为  $\bar{A}$ ,它由样本空间  $\Omega$  中所有不属于  $A$  的样本点组成的集合,满足关系

$$A \cup \bar{A} = \Omega \quad A\bar{A} = \emptyset$$

由定义知,两个对立事件一定是互不相容事件,而两个互不相容事件却不一定是对立事件. 上述事件的各种关系和运算可直观地用韦氏图表示,如图 1-1 所示.

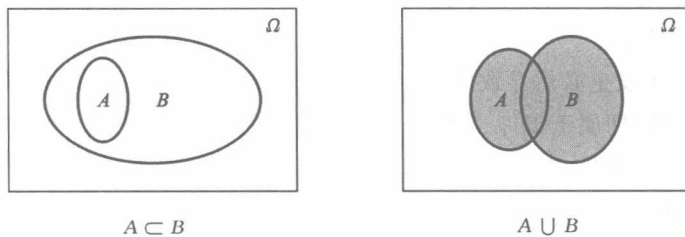


图 1-1 事件关系与运算关系韦氏图