信号·电路·系统资料汇编

系统基本概念　系统状态空间分析

教育部高等学校工科电工教材编审委员会
电路理论及信号分析编审小组　编
常　迥　选编

I

高等教育出版社

内容提要

本辑由清华大学常迥教授负责选编。选材取自1975—1980年美国出版的四本教科书，每本摘译数章。主要内容是：系统基本概念，系统状态空间分析。

本书可供无线电、自动化、电力等专业大学生、研究生、教师以及研究人员和技术人员参考。

本书责任编辑　王忠民

信号·电路·系统资料汇编

——系统基本概念　系统状态空间分析——

教育部高等学校工科电工教材编审委员会

电路理论及信号分析编审小组　编

常　迥　选编

I

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

二二〇七工厂印装

*

开本 787×1092 1/16　印张 27.75　字数 630,000

1985年11月第1版　1985年11月第1次印刷

印数 00,001—5,200

书号 15010·0600　定价 5.30 元

前　　言

1977年在合肥电工教材编委会上，与会同志们认为：除编写大学教材外，有必要为教师们编译一些参考资料，于是就组织《信号·电路·系统资料汇编》的编译工作。经反复酝酿准备，1981年在重庆会议上，由重庆大学江泽佳教授、南京工学院管致中教授主持讨论，拟定了资料汇编第一、二辑的选题和编译工作计划。并推定由清华大学常迵教授负责第一辑（本辑）的编选工作。

本辑的主要内容包括：系统的基本定义和基本概念，系统模型的建立和一些容易误解的问题，系统状态方程的建立及其求解方法，输入输出模型与状态空间模型的联系与对比，状态空间分析的一些应用示例。

选择系统状态空间分析作为本辑主题的主要理由是：目前，在国外《信号与系统》的各类教材中，有关状态空间分析部分的选材和处理有较大的差异，有必要从不同角度加以理解和比较。在国内，讲授《信号与系统》的教师，较多注意在通信系统方面的应用，对控制系统方面的应用，则注意不够。实际上，从系统观点看，它们是有密切关系的。现着重介绍状态空间分析的理论与应用，或有助于弥补这方面的不足。

本辑选材取自1975—1980年美国出版的四本教科书。每本仅摘选其中数章。现将这四本教科书的基本内容简要介绍如下

（一）R. A. GABEL and R. A. ROBERTS, University of Colorado, *Signals and Linear Systems*, 1980(Second edition), John Wiley and Sons, Inc.

本书的特点是先讲离散时间信号与系统，后讲连续信号与系统，例题与习题丰富、生动。1973年第一版有中译本。第二版前三章作了较大的修改和补充，最后一章介绍了数字滤波器引论。近几年，国内有的院校直接选用此书英文版作为《信号与系统》课程教材。

本汇编选译了第一、二、三章。第一章讨论线性系统的基本概念。第二、三章研究线性系统的时域分析，输入-输出描述与状态空间描述穿插对比讲授，先离散、后连续，概念表达清楚。

（二）C. L. LIU and JANE W. S. LIU, University of Illinois, *Linear System Analysis*, 1975, McGraw-Hill, Inc.

本书对一些基本概念的引出独具特色，文字表达深入浅出，注重讨论初学者可能遇到的疑难和易混淆的问题。例如1—4节信号的操作(Manipulation)、1—6节广义函数、2—4节与2—7节边界条件匹配、3—12节微分方程与状态方程等。

本汇编选译该书前三章。第二、三章研究系统输入-输出描述与状态空间描述。每章都将连续系统分析与离散系统分析并列与对比讨论。

（三）G. LAGO and L. M. BENNINGFIELD, University of Missouri—Columbia, *Circuit and System Theory*, 1979, John Wiley and Sons, Inc

本书起点较低，从电路的元件方程与拓扑约束的基本概念开始逐步引入信号分析与系统分析方法。这里选译该书最后二章，讨论系统的状态空间分析。本书特点是利用了信号流图方法。第十三章是状态空间分析的基本概念，第十四章是一些深入的论题，包括状态空间分析的某些应用，如可控性、可观性等等，着重连续系统分析，对离散系统仅作简要介绍。

（四）**THOMAS KAILATH,** Stanford University, *Linear Systems,* 1980, Prentice-Hall, Inc.

这是近年来在现代控制理论方面一本比较全面、深入、系统的基础理论教科书。我国有的院校已选用此书作为无线电系或自动化系研究生有关课程的教材。

本汇编选译了该书前言和第一、二章。在前言中作者阐述了系统状态空间分析方法的发展过程。第一章全面而精练地复习了信号与系统分析的基本概念。提出了一些值得深入思考的问题（如第1.1节中关于线性系统的定义等）。第二章讨论状态空间分析的基本概念，包括基本定义、时域与频域状态方程的建立、可观性与可控性、状态方程求解、稳定性理论等等。立论严谨、深刻，为进一步学习现代控制理论作了较好的准备。

本辑汇编从第一部分到第四部分分别由合肥工业大学、兰州铁道学院、西安交通大学和清华大学的有关教师负责翻译。芮坤生教授、管致中教授、邱关源教授和常迵教授分别审校了各部分译稿。清华大学郑君里同志协助完成本汇编的选编工作。

此次出版教学参考资料汇编，尚属尝试性质。由于种种关系，急需的参考资料，尚不易即时汇编出版。缺乏经验，缺点和错误在所难免，敬请读者多提宝贵意见，请批评指正。

常　迵

1984年4月

目　录

第Ⅰ部分：ROBERT A. GABEL, RICHARD A. ROBERTS《信号与线性系统》(第二版)

第Ⅱ部分：C. L. LIU, JANE W. S. LIU《线性系统分析》

第III部分 GLADWYN LAGO, LLDYD M. BENNINGFIELD
《电路和系统理论》

第IV部分: THOMAS KAILATH 《线性系统》

第 I 部 分

第一章 线 性 系 统

1.1 引言

线性系统的研究，多年来已是培养正规大学生必不可少的一部分。尽管物理系统从来都不完全是线性的，但线性模型常常适用于输入-输出值的某一指定范围内。这就是线性系统之所以有用的原因。在线性系统分析中，工程师和科学家们可以有效地运用大量的数学理论分析问题。相反，非线性系统的分析基本上是个别进行的。每个非线性系统必须逐类逐个地进行研究，可以说，几乎没有普遍适用的分析方法。

利用特殊类型的输入信号，常常可以使线性系统易于分析。因此，在线性系统的研究中，自然要包括信号及其各种表示方法的研究。我们将发现正弦信号和冲激信号作为系统输入时特别有用。

和工程师一样，我们不仅对系统的分析感兴趣，而且对系统的综合也很关心。事实上，系统的综合或设计才真正是工程中富有创造力的部分。然而，和许多创造性工作一样，在进行系统设计之前，必须首先学习如何分析系统。虽然本书主要是针对某几类线性系统进行分析的，但是，由于设计和分析是如此紧密相关，因而，这些内容也将为简单的设计打下一些基础。

我们可以把系统分析分成三个方面：

1. 对所关心的物理问题建立适合的数学模型。这部分的分析涉及获得“运动方程”，边界或初始条件，参数值等等。这是一个把判断、经验及实验结合起来建立适当模型的过程。对按照一定程式建立的模型，是最困难的一步；

2. 合适的数学模型得到之后，接着求解得到的方程式，获得各种形式的解；

3. 再一步，即对物理问题的数学模型解作些叙述或解释。当然，只有在 1 中所建立的数学模型足够准确时，才能对物理系统做出有意义的解释和推断。

本节主要侧重于上述2、3两个方面，第 1 步是必要的，但只有熟悉本门学科的人才能做到比较完善、比较合理。因此，化学工程师要学习针对化学变化过程写运动方程式，电气工程师要对电路写出运动方程式，如此等等。当模型建立以后，就能考虑它的各种分析方法，为模型的数学解释奠定基础。

在工程和科学技术的一切领域中，由于线性模型要经常用到，所以这本教材是很有用的。指出这个事实的最好方法就是一一列举各种物理问题的实例。这种方法的唯一缺陷就是读者并非总是具备实现分析中第 1 步（即列写运动方程式）所必需的基础知识，这个问题已在预料之中，但

是，对于熟悉了本门学科的人，对此才会运用自如。我们采用的线性模型大部分来自电气工程。而在各章后面的一些问题还介绍其它学科一些实际例子。

对于分析线性系统，我们将介绍几个模型，虽然每个模型各有自己的用处，但把它们放在一起介绍，对线性系统可获得比较完整的认识。希望通过这些不同方法的观察，能够统一读者对这一学科的看法。

1.2 线性系统的分类

一个系统是物理过程的数学模型或者抽象，它把输入(外部激励)和输出(响应)联系起来，其输入、输出存在“因”和“果”的关系。系统可有几种类型。

因果（或非预测)系统，在任意时刻t_0产生的输出仅是那些已出现在t_0以前(包括t_0)的输入量的函数，换句话讲，当输入信号确实加给系统时，该系统才有响应。如此说，似乎所有实际的物理系统都是因果系统。但是，我们将要说明，非因果系统也有许多应用。

系统的状态是一个基本的概念。状态是这样选择的最少一组变量，即只要知道在时间 t_0 时它们的值及大于 t_0时的全部输入值，就能计算出时间大于 t_0时系统的输出。系统的状态可看作是系统的记忆性，任意时刻 t_0的记忆概括了过去所有输入和任何初始状态(即记忆) 的影响。

一般地讲，输入、状态和输出分别是一组变量，可表示成向量。例如，n 个输入变量可写为:

$$\mathbf{u}(t)=\begin{bmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\\\vdots\\u_n(t)\end{bmatrix} \tag{I-1.1}$$

我们采用符号 $\mathbf{u}$, $\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{x}$ 分别标记输入、输出和状态变量，相同类型的不同矢量用上标例如$\mathbf{u}^1$、$\mathbf{u}^2$等等加以区别。

这里我们将考虑到连续和离散时间系统。连续时间系统就是这样的系统，其输入、输出和状态都是连续时间实变量 t 的函数。我们还研究仅由时刻 t_k 的离散瞬时值来定义的时间变量系统，其中 k 是整数，这种情形的系统叫做离散时间系统。

我们将用$f(t)$表示连续时间函数，在不会引起混淆的情况下，我们就用f，它在 t 时刻的值为$f(t)$。类似地，对于离散时间函数用 $f(k)$（或 f)标记。它在 $t=t_k$ 时的值可用下列任意记号$f(t_k)\equiv f(kt)\equiv f(k)\equiv f_k$，注意 $f(k)$本身是连续变量——只是它的自变量是离散的。离散时间函数通常也叫时间序列(或只叫序列)，因此，n 个变量的输入序列可以记为:

$$\mathbf{u}(k)\equiv\mathbf{u}\equiv\begin{bmatrix}u_1(k)\\u_2(k)\\\vdots\\u_n(k)\end{bmatrix} \tag{I-1.2}$$

本书的物理系统的模型限定为常参数系统。即假设系统参数不随时间而变化。这就导致为时不变、位移不变系统的概念。时不变连续时间系统有如下特征：若输入 $u(t)$产生输出 $y(t)$，那

么输入移动一位置 $u(t\pm\tau)$，就要产生输出为 $y(t\pm\tau)$。类似地，对于位移不变的离散时间系统来讲，若一个输入 $u(k)$，产生一个输出 $y(k)$，则 $u(k\pm n)$ 就会产生一输出 $y(k\pm n)$。换句话说，系统响应只取决于输入的形式，而与时间的起点无关。

以下我们将考虑线性时(或位移)不变系统，这些系统通常用常系数线性微分方程(或差分方程)来表示，它们分别是连续时间和离散时间系统的基本模型。

1.3 线性

我们已用几种方法把系统加以分类了，在系统理论中最重要的概念之一就是线性。确切地讲究竟什么是线性系统？线性系统具有叠加性质，即若 u^1 产生一个输出 y^1，u^2 产生一个输出 y^2，于是输入 (u^1+u^2)，则产生输出 (y^1+y^2)，用符号表示：

若 $u^1\to y^1$ 及 $u^2\to y^2$ (I-1.3)

则 $(u^1+u^2)\to(y^1+y^2)$

对于输入为若干个时，则有 u^j，$j=1、2、\cdots\cdots$。叠加还意味着：若 $u\to y$ (I-1.4)

则 $\alpha u\to\alpha y$（α 为有理数）。

如果对所有 α 均适用，则这种性质叫齐次性。对于式 (I-1.3) 和 (I-1.4) 中箭头的记号可以方便地使用函数，把该系统表示为将输入 u 转化为输出 y 的变换 T。

若 T 满足：

$$T(\alpha u^1+\beta u^2)=\alpha T(u^1)+\beta T(u^2) \qquad \text{(I-1.5)}$$

则系统是线性的，式中 α 和 β 是任意常数，下面是如何检验系统是否为线性的例子。

例1.1 假设一个系统的输入输出关系是由线性方程

$$y=au+b \qquad (a、b\text{是常数}) \qquad \text{(I-1.6)}$$

所给出。

这个方程代表线性系统的输入-输出关系吗？我们可将式(I-1.6)写为：

$$y=T(u)=au+b$$

考虑有两个输入 u^1 和 u^2 时，相应输出有：

$$T(u^1)=au^1+b$$
$$T(u^2)=au^2+b$$

现在施加输入为 (u^1+u^2)，则输出是：

$$T(u^1+u^2)=a(u^1+u^2)+b$$

但是应当注意

$$T(u^1)+T(u^2)=au^1+b+au^2+b$$
$$=a(u^1+u^2)+2b\neq T(u^1+u^2)$$

因此系统不是线性的！问题是 au 加上了 b，这就偏离了原点，从而破坏了叠加性。

例1.2 考虑一个如图 I-1.1 所示的离散时间系统。方框图中含有一个单位延迟元件，一个“1/2”值乘法器和一个加法器，延迟单元是一个能保持前一次馈入值的器件，则输出方程是：

$$y(k)=\frac{1}{2}u(k)+u(k-1) \tag{I-1.7}$$

该系统满足叠加系统吗？输入 u^1 产生输出为:

$$y'(k)=\frac{1}{2}u^1(k)+u^1(k-1)$$

输入 u^2 产生输出为:

$$y^2(k)=\frac{1}{2}u^2(k)+u^2(k-1)$$

若输入为 $\alpha u^1+\beta u^2$, 所产生输出为:

$$\begin{aligned}y(k)&=\frac{1}{2}[\alpha u^1(k)+\beta u^2(k)]+[\alpha u^1(k-1)+\beta u^2(k-1)]\\&=\frac{1}{2}\alpha u^1(k)+\alpha u^1(k-1)+\frac{1}{2}\beta u^2(k)+\beta u^2(k-1)\\&=\alpha y^1(k)+\beta y^2(k)\end{aligned}$$

因此，该离散时间系统是线性的。

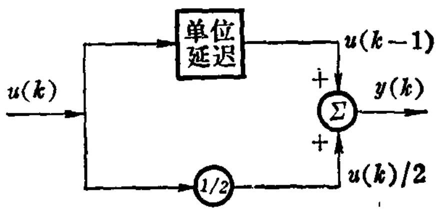


图 I-1.1

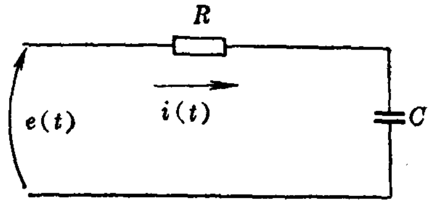


图 I-1.2

例 1.3 如图 I-1.2 所示的简单 RC 网络，有输入电流 $i(t)$ 和输出电压 $e(t)$。这个电流 $i(t)$ 变换为电压 $e(t)$ 是线性系统吗？我们假设初始储能为零，即电容器上没有净电荷。应用基尔霍夫电压定律写为:

$$e(t)=Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt' \tag{I-1.8}$$

再利用叠加性来验证是否线性。假设有两个独立输入 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$。则相应的输出是:

$$e_1(t)=Ri_1(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i_1(t')dt'$$

$$e_2(t)=Ri_2(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i_2(t')dt'$$

如果施加输入 $\alpha i_1(t)+\beta i_2(t)$, 则输出是:

$$\begin{aligned}e(t)&=R[\alpha i_1(t)+\beta i_2(t)]+\frac{1}{C}\int_0^t[\alpha i_1(t')+\beta i_2(t')]dt'\\&=\alpha\left[Ri_1(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i_1(t')dt'\right]+\beta\left[Ri_2(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i_2(t')dt'\right]\\&=\alpha e_1(t)+\beta e_2(t)\end{aligned}$$

这就表明它是线性系统。注意在这个例子中我们假设电容器上的初始电压为零。假设电容器两

端有初始电压。而初始电压降的正负极性按顺时针方向。则得出基尔霍夫电压方程是:

$$e(t)=Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt'+V_0 \qquad t\geqslant 0 \tag{I-1.9}$$

式中

$$V_0=\frac{q}{C}=\frac{\int_{-\infty}^{0} i(t')dt'}{C}$$

是电容器上的初始电压,因为常数项V_0的存在,使得(I-1.9)表示的$i(t)$与$e(t)$之间的输入输出关系不再是线性关系了。这与例1.1系统不是线性关系一样,在检验系统是否线性常常令初始条件为零,若不这样做,则由于非零初始条件会引起输入输出方程中含有常数项,在这种情况下,就不能满足叠加性了。事实上,当线性系统具有非零初始条件时,该系统就将出现非线性。

线性系统中的初始储能

具有初始能量储存的线性系统可按线性系统来进行分析,把总响应分解为两个独立响应:由于初始储能引起的响应和由于系统输入引起的响应,这种分解如图 I-1.3 所示,在图 I-1.3 所示的分解中,用标记T表征的所有系统是相同的。我们把系统输出 y 分解为 $y^{(d)}$和 $y^{(h)}$之和。$y^{(d)}$为初始松驰系统,由输入 u 引起的输出;$y^{(h)}$为零输入时系统的输出,它的初始条件等于原来系统的那些值。

被分解的系统其解为 $y=y^{(h)}+y^{(d)}$,它与原来系统的解一样。它们的解满足相同的微分方程和差分方程,且具有相同的初始条件。

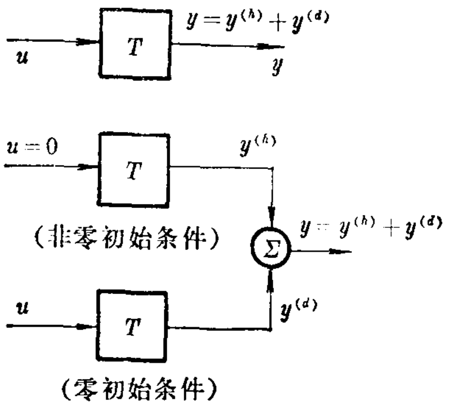


图 I-1.3

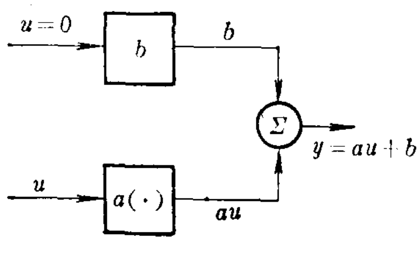


图 I-1.4

例1.4 例1.1的系统用代数方程$y=au+b$ 来描述,它可分解为图 I-1.4所示,这里由输入 u 引起的输出为 $y^{(d)}=au$,具有零输入的原来系统的输出为 $y^{(h)}=b$.

例 1.5 考虑例1.3的 RC 网络由微分方程

$$e(t)=Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt'+V_0$$

来描述。我们定义 $i(t)$为系统的输入,$e(t)$为系统的输出,在分解中,令 $y^{(d)}(t)$等于具有零初始条件的系统的输出,于是,

$$y^{(d)}(t)=Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt'$$

解 $y^{(h)}(t)=0$ 是原系统具有 $i(t)=0$、但初始条件 $e(0)=V_0$ 时的输出，

$$y^{(h)}(t)=V_0$$

于是有

$$e(t)=y^{(d)}(t)+y^{(h)}(t)$$
$$=Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt'+V_0$$

如前面一样。用这种方式分解系统，就可把叠加性用于线性部分，即 $u(t)\to y^{(d)}(t)$ 的关系，然后再加上 $y^{(h)}(t)$ 就得到整个输出。

隐含模型

在上面例子中的系统输出 y 都可写成输入 u 的显函数，即能表示为 $y=T(u)$，但也有许多不能以显式给出输出的模型，例如考虑差分方程

$$y_k=u_k+\frac{1}{2}y_{k-2} \tag{I-1.10}$$

输出 y 是现在的输入和延迟两个周期的输出的二分之一的总和，如何考察这种情况的叠加性呢？式(I-1.10)的方框图如图 I-1.5 所示。

方程(I-1.10)产生变换 T，在这一点上我们不能利用这种变换形式，然而，如假设这种变换是存在的，就可同前面一样证实式(I-1.10)的线性关系。于是考虑两个输入 u^1 和 u^2，输出由

$$y_k^1-\frac{1}{2}y_k^1=u_k^1$$

$$y_k^2-\frac{1}{2}y_k^2=u_k^2$$

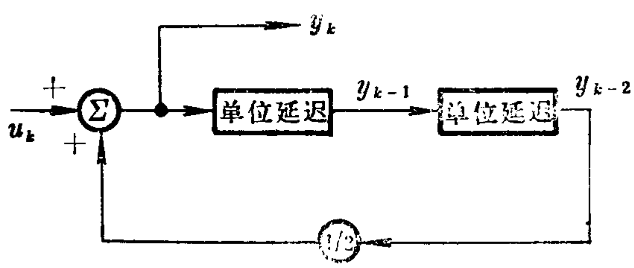


图 I-1.5

来定义。对于输入 $(\alpha u^1+\beta u^2)$，则可得到输出 y_k^3 定义为

$$y_k^3-\frac{1}{2}y_{k-2}^3=\alpha u_k^1+\beta u_k^2$$
$$=\alpha\left(y_k^1-\frac{1}{2}y_{k-2}^1\right)+\beta\left(y_k^2-\frac{1}{2}y_{k-2}^2\right)$$
$$=(\alpha y_k^1+\beta y_k^2)-\frac{1}{2}(\alpha y_{k-2}^1+\beta y_{k-2}^2)$$

因此可求得 $y_k^3=\alpha y_k^1+\beta y_k^2$，因此系统是线性的，这种相同的过程也可应用于线性微分方程的情形。

1.4 离散时间系统

离散时间系统表示离散时间函数或序列之间的关系。由于数字部件运算速度不断加快，而且具有低的成本，因而这类系统在所有的工程学科中变得愈益重要。离散时间电路的设计和分析将继续发展并补充相应的连续时间理论。为了研究离散时间系统，我们将引出某些术语和

符号。

正如前文所述，离散时间函数是离散自变量的函数。利用记号$\{f(k)\}$或f描述完整序列，而序列值可由任意一种记号$f(k)$、f_k、$f(t_k)$或$f(Tk)$来表征，其中k是整数。我们用两种方式定义序列f

(1) 能列举计算f_k的规律，例如，若

$$f_k=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k; & k\geqslant 0\\ 0, & k<0\end{cases}$$

我们得到序列值$\left\{\begin{matrix}\cdots 0, 0, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \cdots, \left(\dfrac{1}{2}\right)^k, \cdots \\ \uparrow_{k=0}\end{matrix}\right\}$

(2) 可把序列值明确地列出来，例如：

$$f=\left\{\begin{matrix}\cdots 0, 0, 1, 5, -3, 4, 0, 0, \cdots\\ \uparrow\end{matrix}\right\}$$

箭头用来指示$k=0$的项。若对于$k<0$的所有项的值均为零，则可省去箭头，这时第一个值就是$k=0$的项。若

$$f=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \left(\frac{1}{2}\right)^k, \cdots\right\}$$

那么此式可等效为

$$f_k=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k, & k\geqslant 0\\ 0, & k<0\end{cases}$$

离散时间系统就是把输入序列u变换为输出序列y的系统，这些系统是由单位延迟元件，常数乘法器和加法器组成。它们可用形式为

$$y_k+b_1y_{k-1}+b_2y_{k-2}+\cdots+b_ny_{k-n}=a_0u_k+a_1u_{k-1}+\cdots+a_mu_{k-m} \tag{I-1.11}$$

或

$$y_k=\sum_{i=0}^{m}a_iu_{k-i}-\sum_{i=1}^{n}b_iy_{k-i} \tag{I-1.12}$$

的常系数线性差分方程表示。在式(I-1.11)和式(I-1.12)中，y_k被表示为输入u_k的现在值和过去值及输出的过去值的线性组合，方程(I-1.11)和(I-1.12)就是我们将要详细分析的离散时间系统的基本模型之一。

我们定义两个序列之和$\{a_k\}+\{b_k\}$为序列$\{c_k\}$，这里

$$c_k=a_k+b_k$$

两个序列之积$\{a_k\}\{b_k\}$是序列$\{c_k\}$

$$c_k=a_k\cdot b_k$$

常数α与序列$\{a_k\}$的乘积是序列$\{c_k\}$

$$c_k=\alpha a_k$$

差分或递归方程在一些问题中是有价值的模型，它可用 y_k 的前面值和输入 u_k 及其前面值来表征所希望的输出 y_k（k 为某一定值）。下面是一些实际问题中导出差分方程式的例子。

例 1.6 试求如图 I-1.6 所示的离散时间电路的差分方程模型。单位延迟元件是将先前的输入保持一个时钟周期的记忆元件。因此第一个延迟单元的输出是 y_{k-1}，同样，第二个延迟单元的输出是 y_{k-2}。由于进入加法器的各量应等于加法器输出 y_k。所以得到

$$y_k = u_k - \frac{1}{4} y_{k-1} + \frac{1}{8} y_{k-2}$$

作为该电路的差分方程模型。可见我们可以很快写出这类系统的方程式。

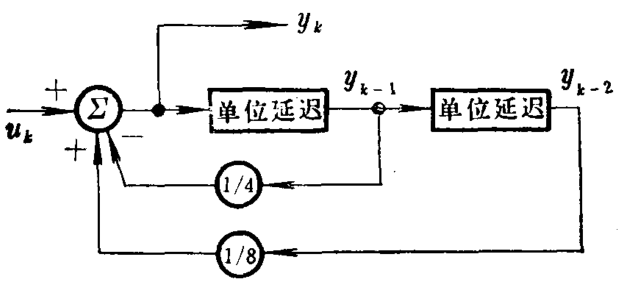


图 I-1.6

例 1.7 在某化学过程的每次循环中，把 u_k 升化学药品 A 和 $100-u_k$ 升化学药品 B 加到有 900 升混合剂的大桶内，其中 $0 \leqslant u_k \leqslant 100$，$k=1, 2, 3, \cdots$。待大桶内的物质混合均匀后，取出 100 升混合剂。令 y_k 表示取出来的混合剂中含化学药品 A 的浓度，即 $1000 y_k$ 是全部混合剂所含化学药品 A 的总量。为了推导出 y_k 的递推关系，我们把第 k 次循环中化学药品 A 的总量表示为它的第 $k-1$ 次循环中化学药品 A 的总量加上任何输入。即

$$1000 y_k = 900 y_{k-1} + u_k \tag{I-1.13}$$

或

$$y_k = 0.9 y_{k-1} + 0.001 u_k, \qquad k = 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

方程式(I-1.13)只是说明：第 k 次循环中化学药品 A 的量是第 $k-1$ 次循环中的量加上第 k 次循环中新加的数量。

例 1.8 等比增长是应用很广泛的一种模型。假定在第 t 年（$t=0, 1, 2, \cdots\cdots$）年终时某人口数为 N_t。已知每年人口的相对增长率为2%，即任意一年的人口增加量与那一年开始的人口成正比。在这种情况下，比例常数为 0.02。由于人口增加量是：$N_{t+1}-N_t$，所以得到差分方程为

$$N_{t+1} - N_t = 0.02 N_t \tag{I-1.14}$$

或

$$N_{t+1} - 1.02 N_t = 0, \quad t = 0, 1, 2, \cdots\cdots$$

其中 N_0 是开始时的人口数。注意，此例题中输入为零。由于具有非零初始条件（人口数）N_0，故输出是增长的。

例 1.9 信息论涉及到的问题之一是如何有效地传输信息。信息所通过的介质叫信道。每个实际信道在单位时间内能无误地通过信道发送的信息有一个理论上的极限（因噪声和带宽的影响）。这就叫做“信道容量”。其单位是比特/秒，，它可由下面公式来定义

$$c = \lim_{t \to \infty}\left[\frac{\log_2 N_t}{t}\right] \text{比特/秒} \tag{I-1.15}$$

式(I-1.15)中，N_t 是在 t 期间能传输的消息量。因此，给定任一信道，当单位时间内能传输消息量增加时，其容量也增加。

假设有一个仅用两个符号的通信系统。称这两个符号为 s_1 和 s_2，例如点和划。消息由两个符号为 s_1 和 s_2 组合而成。假设 s_1 持续时间为 t_1 秒，s_2 持续时间为 t_2 秒。令 N_t 为在 t_1 期间的消息量。问该信道的容量是什么？

要计算容量，就必须计算 N_t。我们通过研究 N_t 的一个循环来计算N_t。在 t 秒中有多少消息量呢？总量可分为以 s_1 结尾和以 s_2 结尾的两类。以 s_1 结尾的有多少呢？s_1 持续t_1秒。那末在 s_1 开始之前共有$(t-t_1)$秒。根据定义，在此区间内，有 N_{t-t_1}消息量。因而以 s_1 结尾的准确消息量为 N_{t-t_1}。同理，在区间 t 内，以 s_2 结尾的消息量为 N_{t-t_2}。因为消息总量 N_t 不是以 s_1 结尾就是以 s_2 结尾。于是，我们有：

$$N_t = N_{t-t_1} + N_{t-t_2} \tag{I-1.16}$$

为了计算信道容量，必须由式(I-1.16)解出 N_t，然后，利用式(I-1.15)求c。例如，若 $t_1=1$ 和$t_2=2$，则式(I-1.16)可简化为

$$N_t - N_{t-1} - N_{t-2} = 0, \qquad t = 1, 2, 3, \cdots\cdots \tag{I-1.17}$$

初始条件为 N_1 和 N_2，即分别为在持续时间为 1 和 2 单位时间内的消息量。在这种情况下，$N_1=1$，$N_2=2$。如 $t_1=t_2=1$ 时，与 $t=1$ 及 $t_2=2$ 的情况相比，你认为信道容量是增大了还是减小了？

1.5 连续时间系统

连续时间系统对大学工科学生来讲也许是比较熟悉的，因为在先前的电路和力学课程中已经碰到过。这些系统的基本数学表达式是具有形式为：

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_n y(t) = a_0\frac{d^m u(t)}{dt^m} + a_1\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}u(t) + \cdots + a_m u(t) \tag{I-1.18}$$

的常系数(假设为常参数系统)的线性微分方程。在这种模型中，输入 $u(t)$和输出函数 $y(t)$是连续实变量 t（通常为时间变量）的函数。

例1.10 电网络是用线性微分方程模拟系统的经典例子。用基尔霍夫两个定律可以得到表示电路的方程。考虑图 I-1.7 所示的网络沿单回路采用基尔霍夫电压定律可得方程

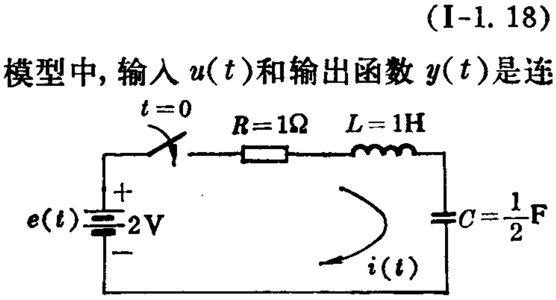


图 I-1.7

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\,dt', \qquad t>0 \tag{I-1.19}$$

我们将(I-1.19)式变成只含有导数的方程，现在方程两边分别对 t 求导，可得

$$\frac{de(t)}{dt}=0=R\frac{di(t)}{dt}+L\frac{d^2i(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t) \qquad \text{(I-1. 20)}$$

要想解出式(I-1. 20)，必须详细说明该网络的初始条件。若设开关在 $t=0$ 时合上，因为电流通过电感不可能瞬时突变，所以开关刚刚闭合以后，回路的电流 $i(0^+)$ 必为零。因此在 $t=0^+$时刻，没有电流流过，且电感两端电压是

$$L\frac{di(0^+)}{dt}=e(0^+) \qquad \text{(I-1. 21)}$$

或

$$\frac{di(0^+)}{dt}=\frac{e(0^+)}{L}=2\text{A/s}$$

方程(I-1. 21)和$i(0^+)$就是电路的初始条件，于是问题归结为求解方程

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\frac{di(t)}{dt}+2i(t)=0$$

其初始条件是 $i(0^+)=0$及 $\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0^+}=2$

例1. 11 线性微分方程可作为许多具体问题的模型。试考虑污水处理的一个理想化的例子，一分解池含有某污染物，其浓度为c，流入池中的未处理的污水含污染物的浓度比池中的浓度高。在池中经过一段时间由细菌溶解污染物后的混合液允许注入江河。情况如图 I-1. 8 所示。假设污水流入的稳定速率为 i_1 加伦/分，含污染物浓度为 c_1 磅/加伦。废水流出的稳定速率为 i_2 加伦/分。开始时，池中有 G_0 加伦污水，含 P_0 磅污染物。问题是确定在浓度超过政府标准 $0.1\,c_1$ 之前，把混合物排入江河之中的时间有多长？

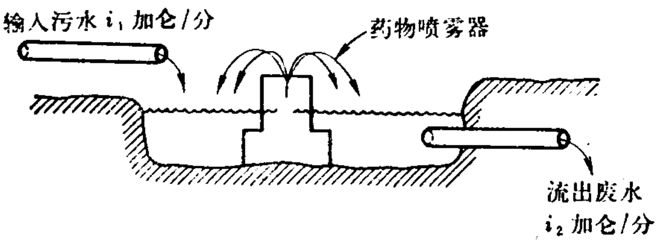


图 I-1.8

因流入池中与向池外流出的速率都是固定不变的，故池中水的总体积为

在 t 时刻的总体积$=G_0+(i_1-i_2)t$ 加伦

令在 t 时刻池中的污染物为 $P(t)$磅。污染物总量变化率为 $dP(t)/dt$。它等于每单位时间流入池内的总量 c_1i_1 减去每单位时间自池内流出的总量 $i_2(P(t)/\text{总体积})$ 于是

$$\frac{dP(t)}{dt}=c_1i_1-i_2\frac{P(t)}{G_0+(i_1-i_2)t}$$

或

$$\frac{dP(t)}{dt}+\frac{i_2}{G_0+(i_1-i_2)t}P(t)=c_1i_1 \qquad \text{(I-1. 22)}$$

方程(I-1. 22)是一阶时变系数的线性微分方程。然而，方程可以很容易地用基本方法解出。首先，我们处理具有常参数的系统，它的微分方程具有常参数，例如令 $i_1=i_2$，就可以得到这种

情况。

在后面几章里，将讨论用线性差分方程和微分方程来描述系统的几种分析方法。我们将先介绍离散系统理论，然后介绍连续系统理论。这两类系统在数学上有很大的相似性。当研究连续时间系统时，记住对离散时间系统的求解过程是有帮助的，反之亦然。我们之所以要先讨论离散时间系统，是因为它的数学处理方法比较容易。

本书的目的之一是要介绍线性系统的几种不同的表示方法。我们将详细地讨论每种描述法以及用一种描述法表示另一种描述法的手段。当学习本教材时对同样系统将会碰到新的描述方法，这时，请试用别的描述方法参数来描述这个模型，这些变换十分有用，且有助于搞清各种描述方法的特点。

习　题

1.1. 下列系统是线性的吗？试证明之。

(a) $T(u(t))=\begin{cases}0, & t<T_0\\ \alpha u(t), & t\geqslant T_0\end{cases}$ α——常数

(b) $u(t)=\begin{bmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{bmatrix}\longrightarrow\boxed{\text{系统}}\longrightarrow y(t)=\min[u_1(t),u_2(t)]$

向量输入

(c) $y(t)\begin{cases}\alpha u(t)+u(t^2), & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

(d) $y(k)=\sum\limits_{n=k}^{k+2}k^2u(n)$

(e) $y(k)=\alpha u(k)+\beta u(k-1)+\gamma[u(k-2)]^2$

1.2. 一个系统可用下列输入-输出的矩阵方程来描述

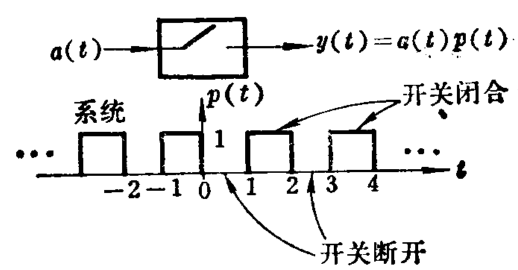
$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4 & 2\\-1 & t & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}$$

(a) 该系统是线性的吗？

(b) 该系统是时不变的吗？

1.3. 试举出一个能满足齐次性但不满足叠加原理的系统的例子。

1.4. 下图中波形 $a(t)$ 通过由晶体管开关来接通和断开。该系统的输出可表示为 $y(t)=a(t)p(t)$，其中 $p(t)$ 是如图所示的方波。该系统是线性的吗？这系统是时不变的吗？



开关特性