

中法工程师学历教育系列教材

GÉOMÉTRIE

几 何 (法文版)

Marc Pauly 著



科学出版社

中法工程师学历教育系列教材

几 何
GÉOMÉTRIE
(法文版)

Marc Pauly 著



科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是北京航空航天大学中法工程师学院“几何”课程的法语教材。本书以法国路易大帝 MPSI 班预科数学课程为基础,涵盖了空间解析几何、微分几何等内容,给出了各种数学符号的法语读法及各种数学公式的法语表达方式。在内容讲述上力图向近代微分几何的语言和方法靠近,结合现代流行的概念,注重于实际数学问题的几何解释。全书共 5 章,内容包括仿射空间、 \mathbf{R}^n 空间中的测度、多变量导数及微分、标量场和向量场。本书叙述深入浅出,论证严密,突出几何思想,便于读者理解与掌握。

本书可作为与法国有交流合作的工程师院校的“几何”课程教材,也可作为其他法语数学类的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

几何: 法文/(卢森堡)波利(Pauly, M.)著. —北京: 科学出版社, 2013
中法工程师学历教育系列教材

ISBN 978-7-03-037421-9

I. ①几… II. ①波… III. ①几何-教材-法文 IV. ①O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 096169 号

丛书策划: 匡 敏 余 江

责任编辑: 余 江 李岚峰 / 责任校对: 邹慧卿

责任印制: 闫 磊 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

铭浩印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 5 月第 一 版 开本: 720×1000 B5

2013 年 5 月第一次印刷 印张: 10

字数: 160 000

定价: 26.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

北京航空航天大学中法工程师学院
工程师教材融合编委会

主任 熊 璋

副主任 于黎明 徐 平

编 委 (按拼音排序)

艾迪列娜·米内	马克·波利
麦尔勒·贵龙姆	萨日娜
王 梅	伊夫·杜拉克
殷传涛	张 巍
张心婷	

编 辑 (按拼音排序)

卞文佳	陈 辉	陈 威	陈晓径
崔 敏	段 斐	方 乐	林立婷
马纪明	牛 薇	宋 萌	唐宏哲
田 原	王乐梅	王 敏	王 峥
王竹雅	于 雷	于 珊	张 莉
张 澎	张晓雯		

丛 书 序

我国《国家中长期教育改革和发展规划纲要（2010-2020年）》明确提出，要“适应国家经济社会对外开放的要求，培养大批具有国际视野、通晓国际规则、能够参与国际事务和国际竞争的国际化人才”，为此教育部于2010年启动了“卓越工程师教育培养计划”，并把培养国际化工程人才作为我国高等工程教育改革发展的战略重点之一。通过与国际高水平大学开展人才培养合作，借鉴国外先进经验，引入国外优质教育资源并结合自身优势，面向国家发展战略需求，建立植根于本土的工程师学历教育体系，是培养具有国际竞争力工程师人才的重要途径，也是贯彻落实“人才强国”战略、提升我国国际竞争力的重要举措。

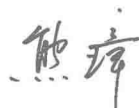
采用精英培养模式的法国工程师学历教育对法国乃至世界经济、社会发展起到了重要的推进作用，许多工程师院校在世界范围内享有盛誉。为此，近年来我国许多大学对这种培养模式进行了深入研究，并成立了多家中法合作的工程师培养机构。这些具有国际化教育目标与理念的办学机构与项目，已经成为我国高等工程教育的重要组成部分，取得的成功经验深刻影响着我国高等工程教育改革与创新进程。

作为我国教育部批准的第一家中法教育合作培养通用工程师人才的教育机构，北京航空航天大学中法工程师学院于2005年由北京航空航天大学与法国中央理工大学集团合作建立，在创立和实施我国的国际通用工程师学历教育过程中，通过借鉴法国工程师培养理念，引进国外优质教育资源，结合北京航空航天大学自身优势，建立了卓越工程师培养本-硕统筹课程体系，赢得了国内外教育界、工业界的广泛认同与赞誉，并通过了法国工程师职衔委员会（CTI）和欧洲工程教育EUR-ACE体系的认证，成为迄今为止国内唯一一家具有在本土颁发法国和欧洲工程师文凭资质的办学机构，培养出来的毕业生得到了用人单位的普遍欢迎和高度评价。

为把探索实践过程中取得的成功经验和优质课程资源与国内外高校分享，我们在北京市教委和科学出版社的支持下，组织出版了这套《中法工程师学历教育系列教材》，其中包括由法国著名预科教师和法国工程师学院一线教师领衔编写的法文版、英文版和中文版的预科数学、物理、工业科学教材，以及适合工程师培养阶段的专业教材。本套教材可作为中法合作办学单位的预科和专业教材，也

可作为其他相关专业的参考教材。

希望本套教材能为我国卓越工程师的教育培养作出贡献!

Handwritten signature in black ink, consisting of the characters '熊' and '璋'.

北京航空航天大学中法工程师学院院长

2013年5月

前 言

法国工程师学历教育是世界上先进的高等教育模式之一。几个世纪以来,该模式不仅培养了大批卓越的工程师人才,而且造就了大量高水平的科学家、政治家、企业家、商界精英。2005年北京航空航天大学与法国中央理工大学集团联合创建北京航空航天大学中法工程师学院,成功将法国工程师学历教育模式引入中国,并在过去的几年中成功培养了数批高水平、国际化的通用工程师。

在多年的教学工作中,我们积累了大量的授课经验,并且针对中国学生开发编写了丰富实用的课堂讲义。为了将北京航空航天大学中法工程师学院的教学经验传播给更多的相关院校以供借鉴交流,我们编写出版了本套《中法工程师学历教育系列教材》。在本套系列教材中,《法语数学》、《代数》、《几何》、《微分方程》四本数学教材由法国资深预科数学教师 Marc Pauly 根据其多年来在北京航空航天大学中法工程师学院授课的实际情况编写而成。

《几何》全书共 5 章,内容包括仿射空间、 \mathbf{R}^n 空间中的测度、多变量导数及微分、标量场和向量场。本书在内容讲述上力图向近代微分几何的语言和方法靠近,结合现代流行的概念,注重于实际数学问题的几何解释。本书可作为与法国有交流合作的工程师院校的“几何”课程教材,也可作为其他法语数学类的教材或参考书。

感谢北京航空航天大学中法工程师学院数理组的老师和同学们在本书的校订中所付出的辛勤劳动。

编 者

于北京航空航天大学中法工程师学院

2013 年 5 月

Table des matières

丛书序

前言

1	Structure des ensembles $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$	1
1.1	Introduction et rappels	1
1.2	Sous-espaces affines	2
1.3	Applications affines	5
1.4	Repères. Équations paramétriques de droites et de plans	7
1.5	Équations cartésiennes de droites et de plans	13
1.6	Vocabulaire du chapitre	18
1.7	Exercices	18
2	Les outils de mesure dans \mathbb{R}^n	20
2.1	Produit scalaire sur \mathbb{R}^n . Norme. Distance	20
2.2	Bases orthonormées	22
2.3	Le déterminant dans \mathbb{R}^2	24
2.4	Le produit vectoriel dans \mathbb{R}^3	28
2.5	Le déterminant de trois vecteurs de \mathbb{R}^3	30
2.6	Isométries et similitudes de \mathbb{R}^n	33
2.7	Vocabulaire du chapitre	34
2.8	Exercices	35
3	Quelques applications	36
3.1	Distance entre deux ensembles	36
3.2	Angle entre deux sous-espaces affines	43
3.3	Vocabulaire du chapitre	46
3.4	Exercices	46
4	Dérivation à plusieurs variables	47
4.1	Nécessité des dérivées partielles	47
4.2	Définition et exemples	47

4.3	Dérivées directionnelles	51
4.4	Fonctions différentiables	53
4.5	Espace tangent	62
4.6	Fonctions de classe C^k et C^∞	66
4.7	Vocabulaire du chapitre	68
5	Champs de scalaires. Champs de vecteurs	69
5.1	Champs de scalaires. Notion d'équivalence	69
5.2	Champs de vecteurs équivalents	74
5.3	Les opérations sur les champs	79
5.4	Action d'un champ de vecteurs sur un champ de scalaires	81
5.5	Crochet de Lie de deux champs de vecteurs	84
5.6	Produits scalaires de deux champs de vecteurs	88
5.7	Gradient d'un champ de scalaires	96
5.8	La connexion de Levi-Civita	102
5.9	La divergence d'un champ de vecteurs	104
5.10	Le laplacien d'un champ de scalaires	107
5.11	Le produit vectoriel de deux champs de vecteurs ($n = 3$)	109
5.12	Le rotationnel d'un champ de vecteurs en dimension 3	112
5.13	Vocabulaire du chapitre	114
	Annexes	116
	Travaux Dirigés	121

1 Structure des ensembles $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

1.1 INTRODUCTION ET RAPPELS

La géométrie euclidienne classique étudie les trois ensembles $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. Selon l'ensemble considéré, on parle respectivement de géométrie de la droite, géométrie du plan, géométrie de l'espace.

Nous avons déjà vu que $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ sont des exemples d'espaces vectoriels sur le corps \mathbb{R} de tous les nombres réels. En fait, ce sont des cas particuliers de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n (de dimension n). Par conséquent, \mathbb{R} est de dimension 1, \mathbb{R}^2 est de dimension 2, et \mathbb{R}^3 est de dimension 3. Dans la suite, nous parlerons souvent de l'ensemble \mathbb{R}^n (où $n \in \{1, 2, 3\}$). Mais très souvent nous supposons en fait $n \in \mathbb{N}$ car la plupart de nos résultats sont vrais en dimension quelconque.

Ces ensembles \mathbb{R}^n portent une structure d'espace vectoriel. Cela signifie plusieurs choses :

(1) Il existe une addition interne des éléments de \mathbb{R}^n , appelés **vecteurs**. Cette addition est associative et commutative.

(2) Il existe un vecteur spécial, appelé **vecteur nul**, noté 0 (parfois $\vec{0}$), et neutre pour l'addition :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \quad 0 + v = v = v + 0$$

(3) Il existe une multiplication externe d'un élément de \mathbb{R}^n par un nombre réel. Cette multiplication obéit aux règles de distributivité

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n, \lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^n, (\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$$

Ensuite, comme \mathbb{R}^n est un espace vectoriel, il possède des sous-espaces vectoriels. Nous savons déjà que l'intersection de sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel et que tous les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n ont une dimension finie $\leq n$.

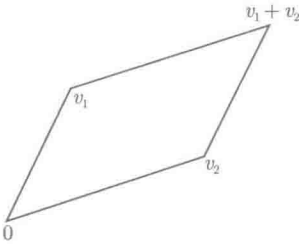


Figure 1.1 L'opération d'addition des vecteurs

Nous rappelons également ce qu'est une application linéaire entre espaces vectoriels E, F sur le même corps K : c'est une application $u : E \rightarrow F$ telle que

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \forall v_1, v_2 \in E$$

$$u(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 u(v_1) + \lambda_2 u(v_2)$$

Nous savons que si W est un sous-espace vectoriel de E , alors $u(W) = \{u(v) | v \in W\}$ est un sous-espace vectoriel de F .

Une **forme linéaire sur un espace vectoriel** V est par définition une application linéaire $V \rightarrow K$, où K est le corps de V (on rappelle que K est un espace vectoriel sur K).

1.2 SOUS-ESPACES AFFINES

Définition. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur K . On dit qu'une partie $\mathcal{A} \subset V$ est un **sous-espace affine** de V s'il existe un vecteur $a \in V$ et un sous-espace vectoriel W de V tel que

$$\mathcal{A} = a + W = \{a + w | w \in W\}$$

Le sous-espace vectoriel W est alors unique. Il est appelé **la direction de \mathcal{A}** et sera noté $\vec{\mathcal{A}}$. La **dimension de \mathcal{A}** est la dimension de sa direction $\vec{\mathcal{A}}$.

En effet W est unique, car si $a_1 + W_1 = a_2 + W_2$, on montre que $a_1 - a_2 \in W_1 \cap W_2$, puis que $W_1 \subset W_2$ et $W_2 \subset W_1$.

On remarque qu'un sous-espace affine est toujours non vide (car il contient le vecteur $a = a + 0$). En outre, tout sous-espace vectoriel de V est un sous-espace affine de V (prendre $a = 0$).

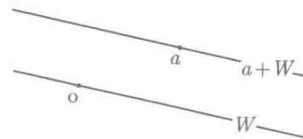


Figure 1.2 Un sous-espace affine et sa direction

Théorème 1.1. Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Une partie \mathcal{A} de V est un sous-espace affine de V si et seulement si :

- (i) \mathcal{A} est non vide, et (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v_1, v_2 \in \mathcal{A}, \lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2 \in \mathcal{A}$.

Preuve. «si» : Nous supposons (i) et (ii) vraies. Il existe alors $a \in \mathcal{A}$ et on définit $W = \{v - a \mid v \in \mathcal{A}\}$. Clairement W contient le vecteur nul. Ensuite pour $w_1, w_2 \in W$, on a

$$a + \frac{1}{2}(w_1 + w_2) = \frac{1}{2}(a + w_1) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)(a + w_2) \in \mathcal{A}$$

et donc $\frac{1}{2}(w_1 + w_2) \in W$. Enfin, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $w \in W$, alors

$$a + \lambda w = \lambda(a + w) + (1 - \lambda)(a + 0) \in \mathcal{A}$$

et donc $\lambda w \in W$. Il en résulte en particulier que $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$. Donc W est un espace vectoriel, ce qui montre $\mathcal{A} = a + W$.

«seulement si» : on sait déjà qu'un sous-espace affine n'est jamais vide. Ensuite, si on écrit $\mathcal{A} = a + W$, deux éléments quelconques de \mathcal{A} , notés v_1, v_2 , s'écrivent

$v_1 = a + w_1, v_2 = a + w_2$, où w_1, w_2 sont deux éléments de W . Mais alors

$$\begin{aligned} \lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2 &= \lambda(a + w_1) + (1 - \lambda)(a + w_2) \\ &= a + [\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2] \end{aligned}$$

Comme W est un sous-espace vectoriel, on trouve $\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2 \in W$ et donc $\lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2 \in \mathcal{A}$. \square

Il est intéressant de mettre côte à côte les définitions de sous-espace affine et de sous-espace vectoriel. D'après le théorème qui vient d'être prouvé, \mathcal{A} est un sous-espace affine si et seulement si $\mathcal{A} \neq \emptyset$ et

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall v_1, v_2 \in \mathcal{A}, (\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \mathcal{A})$$

D'autre part, W est un sous-espace vectoriel si et seulement si $W \neq \emptyset$ et

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall w_1, w_2 \in W, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W$$

Ceci montre à nouveau que tout sous-espace vectoriel est un sous-espace affine. En fait, les sous-espaces vectoriels sont exactement les sous-espaces affines qui contiennent le vecteur nul.

Définition. Soit $V = \mathbb{R}^n$ avec $n \in \{1, 2, 3\}$.

Un sous-espace affine de dimension 0 de V est appelé **point**.

Un sous-espace affine de dimension 1 de V est appelé **droite**.

Un sous-espace affine de dimension 2 de V est appelé **plan**.

On parle alors de points de la droite \mathbb{R} , points du plan \mathbb{R}^2 , points de l'espace \mathbb{R}^3 , droites du plan \mathbb{R}^2 , droites de l'espace \mathbb{R}^3 , plans de l'espace \mathbb{R}^3 .

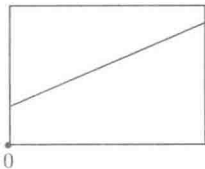


Figure 1.3 Une droite du plan

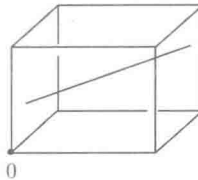


Figure 1.4 Une droite de l'espace

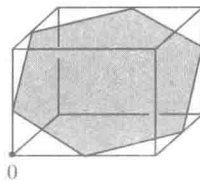


Figure 1.5 Un plan de l'espace

Comme le seul espace vectoriel de dimension 0 est le singleton $\{0\}$, un sous-espace affine de dimension 0 dans \mathbb{R}^n est un ensemble de la forme $a + \{0\} = \{a\}$. On peut donc établir une bijection naturelle entre les points de \mathbb{R}^n et les vecteurs de \mathbb{R}^n .

Définition. Soit V un espace vectoriel sur K , et $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ deux sous-espaces affines de V . On dit que \mathcal{A}_1 est **parallèle** à \mathcal{A}_2 si $\vec{\mathcal{A}}_1 \subset \vec{\mathcal{A}}_2$.

Quelques observations à propos de cette définition :

- (1) Si \mathcal{A}_1 est parallèle à \mathcal{A}_2 , alors $\dim \mathcal{A}_1 \leq \dim \mathcal{A}_2$.
- (2) Si \mathcal{A}_1 est parallèle à \mathcal{A}_2 , on n'a pas forcément que \mathcal{A}_2 est parallèle à \mathcal{A}_1 .
- (3) Si \mathcal{A}_1 est parallèle à \mathcal{A}_2 , et \mathcal{A}_2 est parallèle à \mathcal{A}_1 , alors $\vec{\mathcal{A}}_1 = \vec{\mathcal{A}}_2$.
- (4) Si \mathcal{A}_1 est parallèle à \mathcal{A}_2 , et \mathcal{A}_2 est parallèle à \mathcal{A}_3 , alors \mathcal{A}_1 est parallèle à \mathcal{A}_3 .
- (5) Tout point est parallèle à tout sous-espace affine.
- (6) Deux droites D_1, D_2 de \mathbb{R}^n sont parallèles si et seulement si $\exists a \in \mathbb{R}^n, D_2 = a + D_1$.
- (7) Deux plans P_1, P_2 de \mathbb{R}^n sont parallèles si et seulement si $\exists a \in \mathbb{R}^n, P_2 = a + P_1$.

Théorème 1.2. *Soit V un espace vectoriel sur K , et $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ deux sous-espaces affines de V . Si $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ est non vide, alors $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ est un sous-espace affine de V .*

Preuve. Prenons $a \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ (il existe par hypothèse). On note W_1, W_2 les directions des deux sous-espaces affines, de sorte que

$$\mathcal{A}_1 = \{a + w_1 | w_1 \in W_1\}, \mathcal{A}_2 = \{a + w_2 | w_2 \in W_2\}$$

Il vient alors $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \{a + w | w \in W_1 \cap W_2\}$. Or $W_1 \cap W_2$ est un sous-espace vectoriel de V , ce qui montre bien que $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ est un sous-espace affine de V . \square

Notons que le théorème reste encore vrai pour une intersection d'un nombre quelconque (éventuellement infini) de sous-espaces affines.

1.3 APPLICATIONS AFFINES

Définition. *Soient E, F deux espaces vectoriels sur K . Une **application affine de E vers F** est une application $u : E \rightarrow F$ telle qu'il existe une application linéaire $\vec{u} : E \rightarrow F$ avec*

$$\forall v_1, v_2 \in E, u(v_1) - u(v_2) = \vec{u}(v_1 - v_2)$$

Pour une application affine u , l'application linéaire \vec{u} est unique. En effet, pour tout $v \in E$, le vecteur $\vec{u}(v) = u(v) - u(0)$ est déterminé par l'application u .

Exemples.

(1) Si $u : E \rightarrow F$ est linéaire, alors u est affine et $\vec{u} = u$. Les applications linéaires sont exactement les applications affines u avec $u(0_E) = 0_F$.

(2) Si $v_0 \in E$ est fixé, l'application $t : E \rightarrow E : v \mapsto v + v_0$ est affine, avec $\vec{t} = \text{id}_E$. Si v_0 est non nul, cette application affine n'est pas une application linéaire. L'application $v \mapsto v + v_0$ est appelée **translation de vecteur v_0 sur E** .

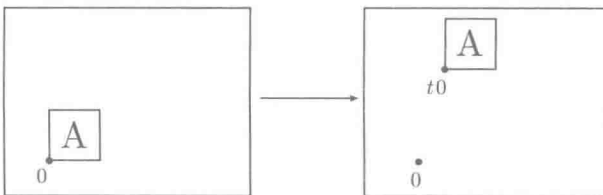


Figure 1.6 Une translation du plan comme exemple d'une application affine

(3) Toute application constante $u : E \rightarrow F$ est affine, avec $\vec{u} = 0$.

(4) Si $u : E \rightarrow F$ et $u' : F \rightarrow G$ sont affines, alors $u' \circ u : E \rightarrow G$ est affine, et $\overrightarrow{u' \circ u} = \overrightarrow{u'} \circ \overrightarrow{u}$ (utiliser le fait que la composée de deux applications linéaires est encore linéaire).

Théorème 1.3. *Soient E, F deux espaces vectoriels sur K de dimension finie, \mathcal{A} un sous-espace affine de E et $u : E \rightarrow F$ une application affine. Alors $u(\mathcal{A})$ est un sous-espace affine de F .*

Preuve. On appelle W la direction de \mathcal{A} et on écrit $\mathcal{A} = a + W$, où $a \in E$. Alors

$$\begin{aligned} u(\mathcal{A}) &= \{u(a + w) | w \in W\} \\ &= \{u(a) + \vec{u}(w) | w \in W\} = u(a) + \vec{u}(W) \end{aligned}$$

Or nous savons déjà que $\vec{u}(W)$ est un sous-espace vectoriel de F . Puisque F est de dimension finie, on peut aussi dire que $\vec{u}(W)$ est de dimension finie. Ceci montre bien que $u(\mathcal{A})$ est un sous-espace affine de F . \square

Théorème 1.4. *Soient E, F deux espaces vectoriels sur K , $u : E \rightarrow F$ une application affine. On considère des vecteurs $v_1, \dots, v_n \in E$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Alors on a l'égalité*

$$u(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 u(v_1) + \dots + \lambda_n u(v_n)$$

Preuve. C'est le fruit d'un petit calcul :

$$\begin{aligned} u(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) &= [u(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) - u(v_n)] + u(v_n) \\ &= \vec{u}[\lambda_1 v_1 + \dots + (\lambda_n - 1)v_n] + u(v_n) \\ &= \vec{u}[\lambda_1(v_1 - v_n) + \lambda_2(v_2 - v_n) \\ &\quad + \dots + \lambda_{n-1}(v_{n-1} - v_n)] + u(v_n) \\ &= \lambda_1[\vec{u}(v_1) - \vec{u}(v_n)] + \lambda_2[\vec{u}(v_2) - \vec{u}(v_n)] \\ &\quad + \dots + \lambda_{n-1}[\vec{u}(v_{n-1}) - \vec{u}(v_n)] + u(v_n) \\ &= \lambda_1 \vec{u}(v_1) + \dots + \lambda_{n-1} \vec{u}(v_{n-1}) + (\lambda_n - 1) \vec{u}(v_n) + u(v_n) \\ &= \lambda_1 [u(v_1) - u(0)] + \dots + \lambda_{n-1} [u(v_{n-1}) - u(0)] \\ &\quad + (\lambda_n - 1) [u(v_n) - u(0)] + u(v_n) \\ &= \lambda_1 u(v_1) + \dots + \lambda_n u(v_n) \end{aligned}$$

\square

Attention au piège : Si $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 1$, la formule est fausse. En particulier, si u est affine, on ne peut pas dire que $u(v_1 + v_2) = u(v_1) + u(v_2)$.

Mais il est vrai que $u\left(\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2\right) = \frac{1}{2}u(v_1) + \frac{1}{2}u(v_2)$.

1.4 REPÈRES. ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES DE DROITES ET DE PLANS

Définition. Un repère de \mathbb{R}^n est un $(n+1)$ -uplet $(\omega; e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de \mathbb{R}^n tel que (e_1, \dots, e_n) est une base de \mathbb{R}^n . Le vecteur ω est appelé l'origine du repère.

Lorsqu'on se donne un repère, on peut associer à chaque point v de \mathbb{R}^n ses **coordonnées dans le repère**. C'est par définition le n -uplet de réels $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ tel que

$$v - \omega = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n$$

Les coordonnées du point origine ω dans le repère $(\omega; e_1, \dots, e_n)$ sont toujours $(0, \dots, 0)$. Si on choisit $\omega = 0$ et $(e_1, \dots, e_n) = ((1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$ (la base canonique de \mathbb{R}^n), alors les coordonnées de $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ dans ce repère (appelé repère canonique) sont évidemment (a_1, \dots, a_n) .

Mais si on choisit l'origine du repère ω différente du vecteur nul, alors les coordonnées du vecteur nul dans le repère ne sont pas toutes nulles!

Définition. Soit $(\omega; e_1, \dots, e_n)$ un repère de \mathbb{R}^n et $j \in [[1, n]]$. On appelle **j -ème axe du repère** la droite $\{\omega + te_j | t \in \mathbb{R}\}$.

Cet ensemble est bien une droite dans \mathbb{R}^n , car c'est un sous-espace affine de dimension 1 et de direction $\mathbb{R}e_j$.

Les n axes du repère ont un seul point commun, qui est ω .

Lorsqu'on veut représenter des éléments de $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ dans une figure,

on a besoin d'un repère et de graduations sur les axes du repère.

La représentation de \mathbb{R} est la plus facile. Soit $(\omega; e_1)$ le repère choisi. On dessine une droite graduée (chaque point de la droite dessinée correspond

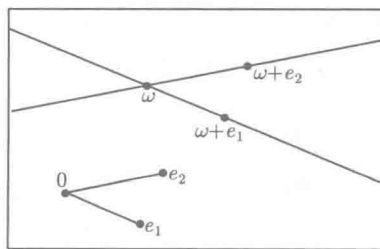


Figure 1.7 Un repère du plan et ses deux axes

à un nombre réel). Le vecteur P de coordonnée $x_1(P)$ dans le repère sera représenté par le point correspondant au nombre réel $x_1(P)$ sur la droite graduée.

Ensuite vient la représentation de \mathbb{R}^2 . Soit $(\omega; e_1, e_2)$ le repère choisi. On dessine deux droites graduées qui se coupent en un point. Ce point représente le vecteur ω , origine du repère. Il représente aussi les coordonnées $(0, 0)$. Mais il ne représente pas forcément le vecteur nul de \mathbb{R}^2 !

Le vecteur P de coordonnées $(x_1(P), x_2(P))$ dans le repère sera représenté par un point que l'on construit de la manière suivante : Sur la première droite graduée, on dessine le point correspondant au nombre $x_1(P)$ et on trace la droite passant par ce point et parallèle à la deuxième droite graduée. Sur la deuxième droite graduée, on dessine le point correspondant au nombre $x_2(P)$ et on trace la droite passant par ce point et parallèle à la première droite graduée. Les deux nouvelles droites se coupent en un point. C'est lui qui représente les coordonnées $(x_1(P), x_2(P))$.

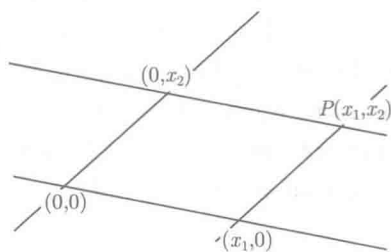


Figure 1.8 Construction pratique d'un point du plan par ses coordonnées

Bien entendu, avec cette définition, la première droite graduée sur le dessin représente le premier axe du repère, et la deuxième droite graduée sur le dessin représente le deuxième axe du repère.

Enfin, nous parlons de la représentation de \mathbb{R}^3 . Soit $(\omega; e_1, e_2, e_3)$ le repère choisi. On dessine trois droites graduées qui se coupent en un point. Ce point représente le vecteur ω , origine du repère. Il représente aussi les coordonnées $(0, 0, 0)$. Mais il ne représente pas forcément le vecteur nul de \mathbb{R}^3 !

Le vecteur P de coordonnées $(x_1(P), x_2(P), x_3(P))$ dans le repère sera représenté par un point que l'on construit de la manière suivante : Sur la droite graduée numéro i , on dessine le point correspondant au nombre $x_i(P)$ et on l'appelle P_i . On obtient ainsi trois points P_1, P_2, P_3 sur le dessin. La parallèle à la première droite passant par P_2 et la parallèle à la deuxième droite passant par P_1 se coupent en un point que nous appelons P_{12} . On dessine de la même façon les points P_{13} et P_{23} . Enfin, la parallèle à la première droite passant par P_{23} , la parallèle à la deuxième droite passant par P_{13} et la parallèle à la troisième droite passant par P_{12} sont trois droites concou-