第一部分

基　础　理　论　篇

第一章　图的基本概念

§1　引　　论

图论是一新的数学分支，也是一门很有实用价值的学科，它在自然科学、社会科学等各领域均有很多应用。近年来它受计算机科学蓬勃发展的刺激，发展极其迅速。应用范围不断拓广，已渗透到诸如语言学、逻辑学、物理学、化学、电讯工程、计算机科学以及数学的其它分支中。特别在计算机科学中，如形式语言、数据结构、分布式系统、操作系统等方面均扮演着重要的角色。

首先我们来看几个实际的问题。

一、Könisberg 七桥问题（或 Euler 回路问题）

图论所研究的问题源远流长。远在 18 世纪，著名的 Könisberg 七桥问题就是当时很有趣的问题。Könisberg 城在 18 世纪属于东普鲁士，它位于 Pregel 河畔，河中有两个小岛，河两岸和河中两岛，通过七座桥彼此相连（见图 1-1-1）。

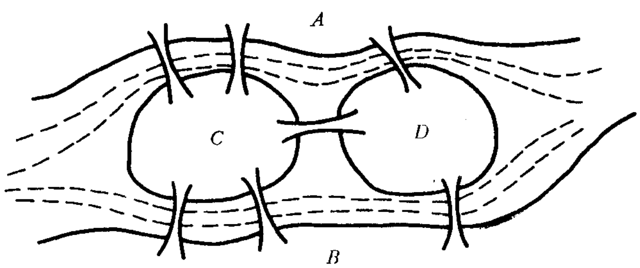

图　1-1-1

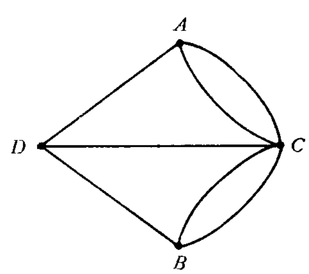

图　1-1-2

有一趣味问题：游人从两岸 A，B 或两个小岛 C，D 中任一个地方出发，要找到一条路线做到每座桥恰通过一次而最后返回原地。问题看来不复杂，但谁也解决不了，也说不出其所以然来。1736 年，当时著名的数学家 Euler 仔细研究了这个问题，他将上述四块陆地与七座桥间的关系用一个抽象图形来描述（见图 1-1-2），其中 A，B，C，D 分别用四个点来表示，而陆地之间有桥相连者则用连接两个点的连线来表示，这样上述的 Könisberg 七桥问题就变成为由点和边所组成的图 1-1-2 的

如下问题：

试求从图中的任一点出发，通过每条边一次，最后返回到该点，这样的路径是否存在？于是问题就变得简洁明了多了，同时也更一般、更深刻。这就是图论中的 Euler 问题。

关于 Könisberg 七桥问题的回答是否定的。直观上不难发现，为了要回到原来的地方，要求与每一个顶点相关联的边的数目，均应为偶数，从而可得从一条边进入，而从另一条边出去，一进一出才行。在此基础上，Euler 找到了一般的图存在这样一条回路的充分而且必要条件，详细讨论见本章第三节。

二、路径问题

如图 1-1-3 所示。顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_7$ 代表七座城市，有方向的边$\overrightarrow{v_iv_j}$表示从 v_i 城到 v_j 城的单行车道，问从 v_1 城到 v_7 城有无道路相通？

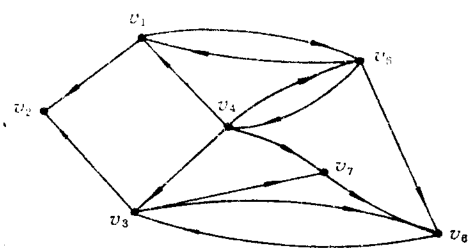

图 1-1-3

这个例子很简单，观察图 1-1-3 就不难给出解答。如果我们进一步问：若 v_1 城到 v_7 城有道路相通，共有几条不同的道路？每条道路中间经过哪几个城市？一般的这类问题就不能简单地通过观察法来解决。下面讨论的是路径问题的一般算法。

为此引进矩阵

$$A = (a_{ij})_{7\times 7},$$

其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1,\text{若从 } v_i \text{ 点到 } v_j \text{ 点有边}(v_i,v_j)\text{ 相连；} \\ 0,\text{若从 } v_i \text{ 点到 } v_j \text{ 点无边相连。} \end{cases}$$

这样我们得到

$$A = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{matrix} \end{array},$$

而且得

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (a_{ij}^{(2)}),$$

其中

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{7} a_{ik}a_{kj}。$$

同样可得到

$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A^2 = (a_{ij}^{(3)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

其中

$$a_{ij}^{(3)} = \sum_{k=1}^{7} a_{ik}^{(2)} a_{kj} = \sum_{k=1}^{7} a_{ik} a_{kj}^{(2)}。$$

一般有：

$$A^k = (a_{ij}^{(k)})_{7\times 7},$$

其中

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{h=1}^{7} a_{ih}^{(k-1)} a_{hj}。$$

现在来看看 $a_{ij}^{(k)}$ 的值具有什么实际意义。以 $a_{ij}^{(2)}$ 为例：

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{7} a_{ik}a_{kj} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \cdots + a_{i7}a_{7j},$$

$a_{il} \cdot a_{lj} \neq 0$ 当且仅当 $a_{il} = a_{lj} = 1$，换句话说，就是从 v_i 到 v_l 和从 v_l 到 v_j 都有直接道路相通，所以 $a_{ij}^{(2)}$ 的值表示从 v_i 点出发经过某一个中间点 v_l，然后到 v_j 的路径数目，或形象地说 $a_{ij}^{(2)}$ 是从 v_i 出发两步到达 v_j 的路径数目。例如，$v_{42}^{(2)} = 2$ 表示从 v_4 出发两步到达 v_2 的路径有两条，从图 1-1-3 中不难看出有 $v_4 \to v_1 \to v_2$ 和 $v_4 \to v_3 \to v_2$，而且仅有这两条。

明白了上述道理，要求从 v_1 点出发经 k 步所能到达的点，只需求矩阵 A^k 的第一行元素即可。A^k 的第一行行向量用 $A_1^{(k)}$ 表示。求 $A_1^{(k)}$ 只需 $A_1^{(k-1)}$，故若只计算 $A_1^{(k)}$，可大大减少计算量，$k = 2, 3, \cdots, n$。

同理可知 $a_{ij}^{(k)}$ 的值表示从 v_i 出发，k 步到达 v_j 的路径数目（$a_{ij}^{(k)} = 0$ 表示不存在这样的路径）若要追问这一路径是什么？它沿途经过哪几个点？只要回溯 $a_{ij}^{(k)}$ 这个数是怎么形成

的即可。

例如 $a_{17}^{(3)}=1$，我们来看看 $a_{17}^{(3)}$ 的形成过程：

图 1-1-4 中元素下标记录所经过的路径，如下标 15 即从 $v_1\rightarrow v_5$ 的道路，其它类似。

$$A_1^{(1)} = (0\ 1\ 0\ 0\ 1_{15}\ 0\ 0)$$

$$A_1^{(2)} = (0\ 1\ 0\ 0\ 1_{15}\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1_{54} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1\ 0\ 0\ 1_{154}\ 0\ 1\ 0)$$

$$A_1^{(3)} = (1\ 0\ 0\ 1_{154}\ 0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1_{47} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1\ 1\ 2\ 0\ 2\ 0\ 1_{1547})$$

图 1-1-4

从图 1-1-4 可见，$A_1^{(3)}$ 中的 $a_{17}^{(3)}$ 由 $A_1^{(2)}$ 中的 $a_{14}^{(2)}$ 与 $a_{47}^{(1)}$ 相乘而得的，即从 v_1 出发两步到达 v_4（即 $a_{14}^{(2)}=1$），再走一步可到 v_7。而 $a_{14}^{(2)}$ 是由 $A_1^{(1)}$ 中 $a_{15}^{(1)}$ 与 $a_{54}^{(1)}$ 相乘而得的，即从 v_1 出发第一步到 v_5，第二步才到 v_4。故由 $a_{15}^{(1)}\rightarrow a_{14}^{(2)}\rightarrow a_{17}^{(3)}$ 可知，这条路径是 $v_1\rightarrow v_5\rightarrow v_4\rightarrow v_7$。

假若要问从 v_7 到 v_1 是否有路相通？如上法所示，继续求 A^4，A^5，A^k，观察 $a_{71}^{(k)}$ 什么时候出现非零元素，即 k 为何值时，$a_{71}^{(k)}\neq 0$，而且 k 的值不能超过 6，即 $k<7$。七个顶点，若从其中一点出发（设为 v_1），走了六步还到不了 v_7，则再走下去也到不了。这个道理留给大家思考。

对于要证明 v_7 没有道路走到 v_1，还可以采用如此证法。若把点的次序重新排列为：$v_7, v_6, v_3, v_2, v_5, v_4, v_1$，可得

$$A=\begin{array}{c}v_7\\v_6\\v_3\\v_2\\v_5\\v_4\\v_1\\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc:ccc}0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\1&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\ \hdashline 0&1&0&0&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&1\\0&0&0&1&1&0&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&O\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{ccccccc}v_7&v_6&v_3&v_2&v_5&v_4&v_1\end{array}$$

其中

$$A_{11}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad A_{21}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$A_{22}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\qquad A_{12}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}。$$

$$A^2=\begin{pmatrix}A_{11}&O\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&O\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}^2&O\\A_{21}A_{11}+A_{22}A_{21}&A_{22}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}^{(2)}&O\\A_{21}^{(2)}&A_{22}^{(2)}\end{pmatrix}。$$

而且不难证明，对于任何整数 k 恒有

$$A^k=\begin{pmatrix}A_{11}^{(k)}&O\\A_{21}^{(k)}&A_{22}^{(k)}\end{pmatrix},k=1,2,\cdots。$$

这就证明 $a_{71}^{(k)}=0$，即从 v_7 出发不论走多少步都到不了 v_1。实际上它们之间由于 $A_{12}^{(k)}=O$，说明 v_7,v_6,v_3,v_2 点与 v_5,v_4,v_1 点不通，即没有这样的道路。

这个例子只是讨论从一点到另一点有没有道路相通？有几条道路相通？若存在几条道路相通，再进一步便是寻找其中一点到另一点的最短路径问题，这是一个很有实际意义的运筹学问题。后面将讨论它。

三、路径问题应用举例

若我方两名军事人员和敌方两名军事人员同到某一现场视察，途中要经过一条河。现只有一只小船，每次最多只能乘两个人。为了安全起见，当敌我双方人员同时在场时应避免出现我方人员少于敌方人员的情况，问渡河的方案应如何？

为方便起见，设用(m,n,l)表示河的左岸有我方人员 m 人，敌方人员 n 人的状态；(m,n,r)表示在河的右岸我方人员 m 人，敌方人员 n 人的状态。显然可见，若左岸为(m,n,l)的状态，则右岸的状态为$(2-m,2-n,r)$。

现将全部可能的状态列举如下：

$v_1=(2,2,l)$,　　　$v_7=(2,2,r)$,

$v_2=(2,1,l)$,　　　$v_8=(2,1,r)$,

$v_3=(1,1,l)$,　　　$v_9=(1,1,r)$,

$v_4=(2,0,l)$,　　　$v_{10}=(2,0,r)$,

$v_5=(0,2,l)$,　　　$v_{11}=(0,2,r)$,

$v_6=(0,1,l)$,　　　$v_{12}=(0,1,r)$。

请注意，这里不出现$(1,0,l)$，$(1,0,r)$状态。因表面上看我方人员多于敌方的情况。然而它的对岸则是$(1,2,r)$，$(1,2,l)$，这是不允许的。

渡船的全过程可以看作是状态的转移，则状态之间的关系，可用图 1-1-5 表示。其中点表示状态，状态间的转移用连线表示，比如从$v_1(2,2,l)$可以迁移到$v_{12}(0,1,r)$，只要从左岸运一敌方人员到右岸即可。(v_1,v_{12})联线上的$(0,1)$符号说明这关系。显然状态之间的关系是可逆的、对称的。也就是说v_1可以转化到v_{12}，v_{12}也可以转化为v_1。相互转化的两状态之间用一无向边相连。如连接v_1和v_{12}等等。

原问题归结为从图 1-1-5 找一条从v_1到v_7的路径。且每条路径表达一种渡船的方案。

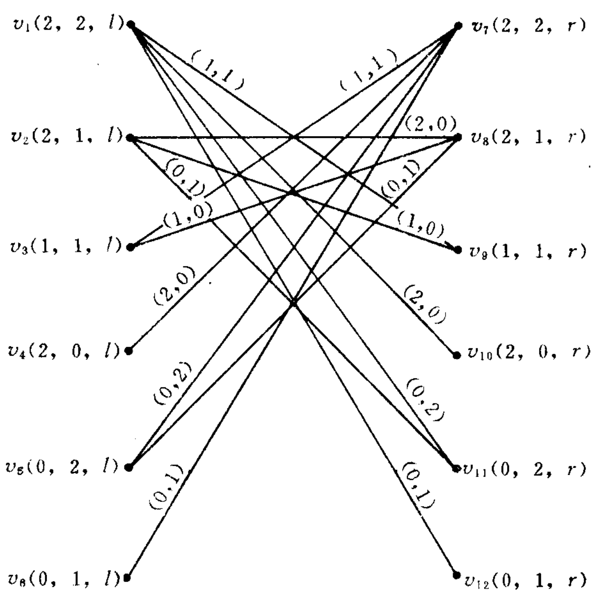

图　1-1-5

如前面例子一样可得形式如下的对称矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O & \bar{A}_1\\ \bar{A}_1 & O\end{pmatrix}_{12\times 12}$$

由于两岸状态的对称性，所以矩阵A也是对称矩阵。点的排列次序是按下标的自然次序，即$v_1,v_2,v_3,\cdots,v_{12}$，其中$A_{11}=A_{22}=O$，(转第 10 页)

$$A_1^{(1)} = (0\ 0\ \overset{v_9}{1}\ 1\ \overset{v_{11}}{1}\ 1)$$

$$A_1^{(2)} = (0\ 0\ \overset{v_9}{1}\ 1\ \overset{v_{11}}{1}\ 1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (4\ \overset{v_2}{2}\ 0\ 0\ 0\ 0)$$

$$A_1^{(3)} = (4\ \overset{v_2}{2}\ 0\ 0\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0\ \overset{v_8}{2}\ 6\ 4\ 6\ 4)$$

$$A_1^{(4)} = (0\ \overset{v_8}{2}\ 6\ 4\ 6\ 4)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (20\ 14\ \overset{v_3}{2}\ 0\ \overset{v_5}{2}\ 0)$$

$$A_1^{(5)} = (20\ 14\ \overset{v_3}{2}\ 0\ \overset{v_5}{2}\ 0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\overset{v_7}{4}\ 18\ 34\ 20\ 34\ 20)$$

图 1-1-6

$$\boldsymbol{A}_{12}=\boldsymbol{A}_{21}=\overline{\boldsymbol{A}}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\overline{\boldsymbol{A}}_1\\\overline{\boldsymbol{A}}_1&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\overline{\boldsymbol{A}}_1^1\\\overline{\boldsymbol{A}}_1&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{A}}_1^2&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\overline{\boldsymbol{A}}_1^2\end{pmatrix},$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}^3=\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{A}}_1^2&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\overline{\boldsymbol{A}}_1^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\overline{\boldsymbol{A}}_1\\\overline{\boldsymbol{A}}_1&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\overline{\boldsymbol{A}}_1^3\\\overline{\boldsymbol{A}}_1^3&\boldsymbol{O}\end{pmatrix},\cdots。$$

请读者说明上述规律的实际意义。

现在问题归结为求 $\overline{A},\overline{A}^3,\overline{A}^5,\cdots$，设 $\overline{A}^k=(\bar{a}_{ij}^{(k)})$，并注意什么时候出现 $\bar{a}_{11}^{(k)}\neq 0$。但 k 为奇数时使 $\bar{a}_{11}^{(k)}\neq 0$ 才是所求的。

令 $\boldsymbol{A}_1^{(k)}$ 表由矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}^k$ 中第一行元素组成的行向量。运算过程见第 9 页图 1-1-6。从运算结果分析，可得从 v_1 到 v_7 的四条路径如下：

1. $v_1\to v_9\to v_2\to v_8\to v_3\to v_7$，
2. $v_1\to v_9\to v_2\to v_8\to v_5\to v_7$，
3. $v_1\to v_{11}\to v_2\to v_8\to v_3\to v_7$，
4. $v_1\to v_{11}\to v_2\to v_8\to v_5\to v_7$。

或用图 1-1-7 表示。

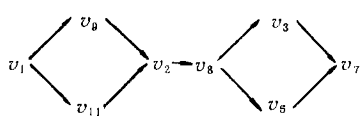

图 1-1-7

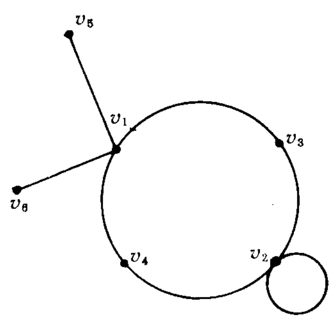

图 1-1-8

上面讨论的方法还可进一步简化。比如用一个顶点表示(h,k)状态，即我方 h 人，敌方 k 人的一种状态，不区分它究竟是左岸还是右岸，这是可行的。因为河的左岸和右岸是交替出现的，状态迁移图可用图(1-1-8)来表示。

其中 $v_1=(2,2),v_2=(2,1),v_3=(1,1),v_4=(0,2),v_5=(2,0),v_6=(0,1)$。

特别要指出的是，v_2 点有一从 v_2 点到 v_2 的自环，它表示从(2,1)状态回到(2,1)状态，但已从河的一岸的(2,1)状态迁移到河的另一岸的(2,1)状态。这样的圆环我们称为自环，或简称为环。图 1-1-8 是无向图，实际上每条边都是双向的。

同样的道理，从 $v_1(2,2)$ 点出发走一步到 $v_6(0,1)$，便是从河岸(2,2)状态转移到对岸的(0,1)状态。于是问题导致求从 v_1 出发，经过奇数步返回 v_1 的路径。

另外，由图 1-1-8 可见，从 v_1 到 v_4，v_4 只能有一种可能返回 v_1，故 v_4 可省略不考虑。v_6 也是一样。所以问题就大大地简化了，导致求图 1-1-9 中从 v_1 出发，经奇数步重返 v_1 的

路径。

只要通过观察图 1-1-9 就可以很快给出问题的解答。它应该是：

1. $v_1 \to v_4 \to v_2 \to v_2 \to v_4 \to v_1$，
2. $v_1 \to v_4 \to v_2 \to v_2 \to v_3 \to v_1$，
3. $v_1 \to v_3 \to v_2 \to v_2 \to v_4 \to v_1$，
4. $v_1 \to v_3 \to v_2 \to v_2 \to v_3 \to v_1$。

或如图 1-1-10 所示。

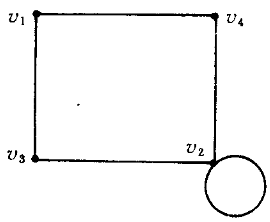

图 1-1-9

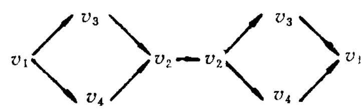

图 1-1-10

通过计算也可得出相同结果。为此令：

$$A = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \end{array},$$

计算 A^k，$k=3,5,\cdots$，直到出现 $a_{11}^{(k)}$ 不为零为止。按照前面的方法计算如图 1-1-11 所示。

四、Hamilton 回路问题

Hamilton 回路是以 1856 年 Hamilton 首先提出的所谓环球航行问题而得名。如图 1-1-13 所示，20 个顶点分别表示世界 20 个名城，两个顶点间的连线表示这两个城市间的航线。要求旅行者从某一城市出发，遍历各城市一次且仅一次，最后返回出发点。

Hamilton 回路问题，不同于 Euler 回路问题，它是求对顶点的遍历，在运筹学中有着实际意义。特别是求 Hamilton 回路中总距离最短的问题，是有名的旅行商人问题，后面将讨论它。

图 1-1-12 也可以看作是十二面体（见图 1-1-13），每一个面都是五边形。沿着十二面体的棱，到达每一个顶点时，都面临着两种道路的选择：一是向左，另一是向右。向左的道路用 L 表示，向右的道路用 R 表示。LR 表示第一步向左转，第二步向右转，其它同理类推。

这一个 Hamilton 问题的解决颇有趣味，顺序介绍如下。由于有：

(a) $(LL)R=L(LR)$；

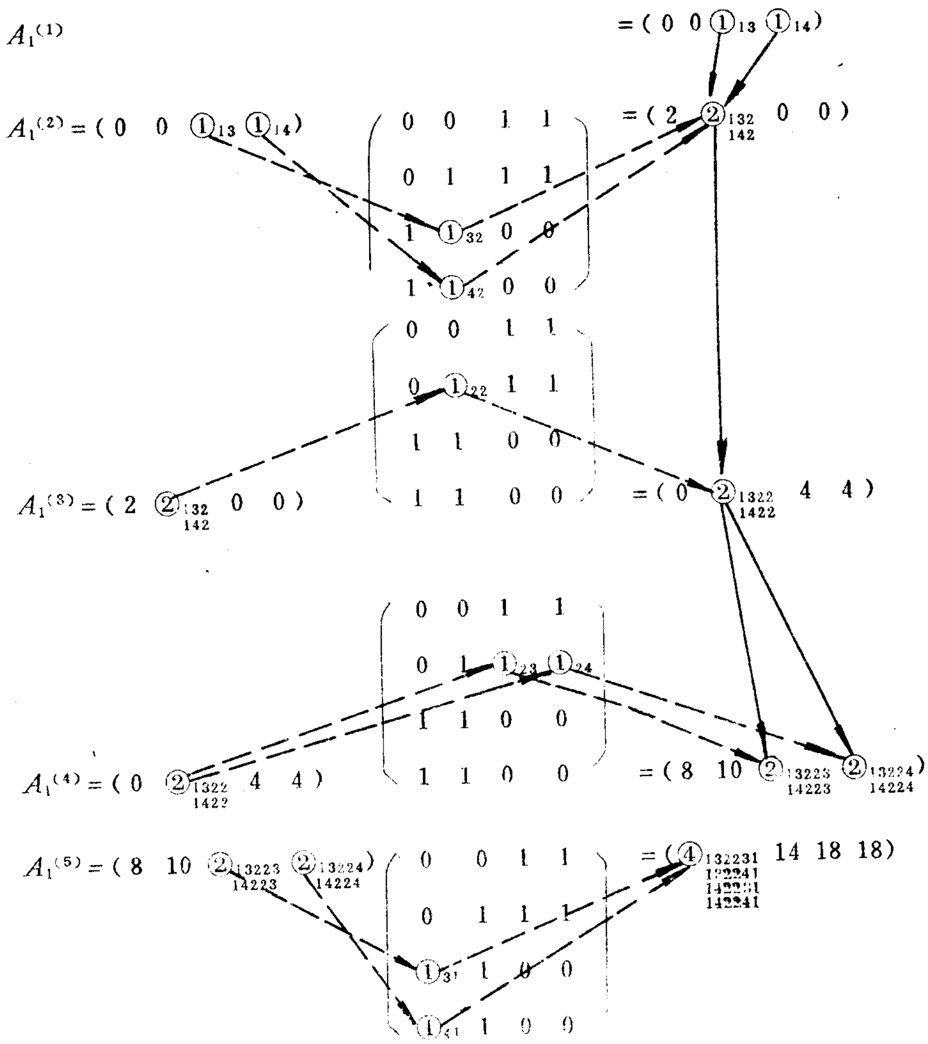

图 1-1-11

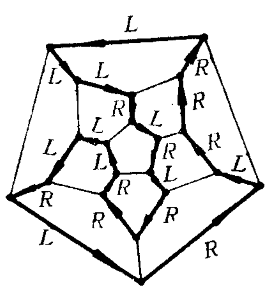

图 1-1-12

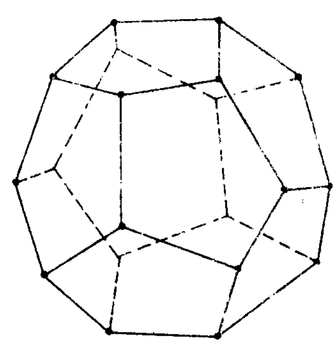

图 1-1-13

(b) $R^5=L^5=1$；

(c) $RL^2R=LRL, LR^2L=RLR$；

(d) $RL^3R=L^2, LR^3L=R^2$。

$L^5=1$ 的意义是连续向右转 5 次回到原来的出发点。不难直接验证上面等式是正确的。

依据上面的公式可得下面的推导：

$$1=R^5=R^2R^3\xlongequal{\text{由}(d)}(LR^3L)\cdot R^3=(LR^3)(LR^3)=(LR^3)^2$$
$$=(LR^2R)^2\xlongequal{\text{由}(d)}[L(LR^3L)R]^2=[L^2R^3LR]^2$$
$$\xlongequal{\text{由}(d)}[L^2(LR^3L)RLR]^2=[L^3R^3LRLR]^2$$
$$=[LLLRRRLRLR]^2$$
$$=LLLRRRLRLRLLLRRRLRLR。$$

该式右端共 20 项，左端归约为 1。说明沿右端的规律走了 20 步后回到原地，特别是右端的若干部分项没有归约为 1 的可能性，故从任一点出发沿右端的规律而遍历每一点一次返回原地。

五、计算机程序的流程图

一般编写程序以前都须先画出程序的流程图，例如用简单的办法“判定大于 1 的整数 i 是否是素数”的流程图如图 1-1-14 所示。

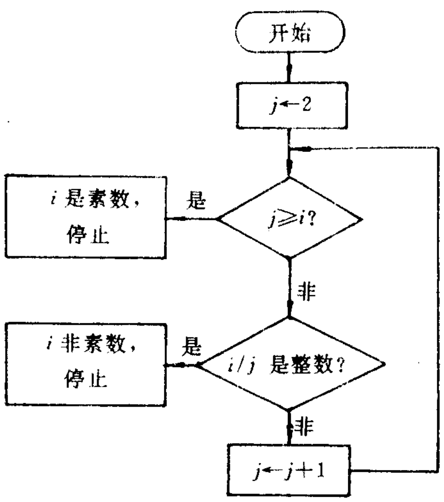

图 1-1-14

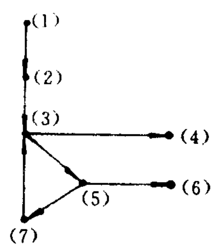

图 1-1-15

如果略去方框中的具体内容，将每个方框抽象成一个点，则流程图可抽象成图 1-1-15 的有向图。实际上任何一个程序流程图，都可用一个有向图来刻划。将程序转化为程序流程图以后，问题变成讨论流程图的性质，它形成“数据流图”一个新的分支，它的讨论超出

了本书的范围。但利用图可直观地判断程序的逻辑是否正确，是否存在死循环，对操作系统而言，则可用来判断是否存在死锁现象。总之，图论在计算机科学中扮演了非常重要的角色。

六、Ramsey 问题

问题是这样的：任意 6 个人在一起，6 人中要不是有 3 个人彼此互相认识，必然有 3 个人互相不认识；即两种情况中至少存在一种。

用图的办法很容易给 Ramsey 问题以说明。设这 6 个人分别用 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6 6 个点表示。互相认识的两个人，其对应顶点用实线相连，互不相识的两个人，其对应顶点用虚线相连。两个人要么认识，要么互不相识，两者必居其一。所以，这 6 个顶点中任何一点，与其它任何一点必有一连线（实线或虚线）。这样的图叫完全图。问题变为由此所得的 6 个顶点的完全图中，至少存在一个实线三角形或虚线三角形。

为说明结论，任取一点 v_l，它与其它 5 点的联线中，至少有 3 条同为实线或同为虚线。不妨假设同为实线，而这 3 条线的另一端点分别为 v_i,v_j,v_k。这 3 个顶点形成的三角形，若是虚线三角形，则问题得到解决。如若不然，至少有一条边设为 v_iv_j 为实线，则 $v_iv_jv_l$ 便是一实线三角形（图 1-1-16）。

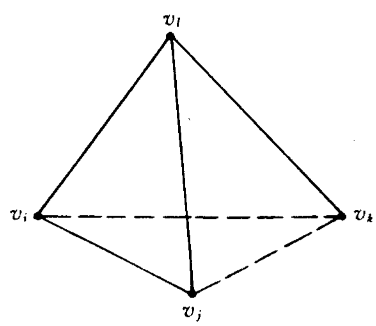

图 1-1-16

所以 Ramsey 问题得到证明。

这一节给出了一些利用图使问题变得直观简单的实例，给大家一个图论研究的直观印象，下面我们介绍图论的一些基本概念。

§2 图的概念

一般几何上将图定义成空间一些点（顶点）和连接这些点的线（边）的集合。

图论中将图定义为一个偶对 $G=(V,E)$，其中 V 表示顶点的集合，E 表示边的集合。这样如图 1-2-1 可表示为

$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\},\quad E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}。$$

我们也可以用边的两个顶点来表示边。如果边 e 的两个端点是 u 和 v，那么 e 可写成 $e=\langle u,v\rangle$，这儿 $\langle u,v\rangle$ 表示 u 和 v 的无序对。即 $\langle u,v\rangle$ 和 $\langle v,u\rangle$ 都表达了以 u,v 为端点的无向边。这样图 1-2-1 可写成：

$$G=(V,E),\quad V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\},$$
$$E=\{\langle v_1,v_2\rangle,\langle v_1,v_3\rangle,\langle v_1,v_4\rangle,\langle v_2,v_3\rangle,\langle v_2,v_4\rangle,\langle v_3,v_4\rangle\}。$$

一般图 $G=(V,E)$ 的顶点数用 $n(=|V|)$ 表示，边的数目用 $m(=|E|)$ 表示。若 $|V|$ 和 $|E|$ 都是有限的，则称图 G 是有限图，否则称为无限图。本书只讨论有限图的情况。

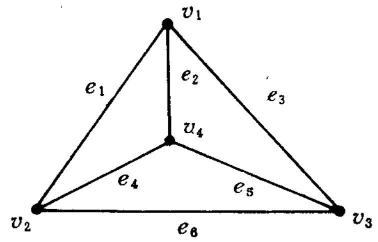

图 1-2-1

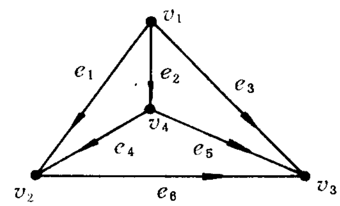

图 1-2-2

上面讨论的图 G 的边的两个顶点是无序的，一般称其为无向图，在实际应用中，将图和每条边分配一个方向是很自然的。当给图 G 的每一条边规定一个方向，则称其为有向图。对有向图 $G=(V,E)$，有向边 e 用与其关联的顶点 u,v 的有序对来表示，即 $e=(u,v)$，表示 u 为边 e 的起点，v 为边 e 的终点。那么图 1-2-2 所示的有向图可表示如下：

$$G=(V,E),\quad V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\},$$
$$E=\{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_1,v_4),(v_4,v_2),(v_4,v_3),(v_2,v_3)\}。$$

如果顶点 v 是边 e 的一个端点，则称边 e 和顶点 v 相关联(incident)；对于顶点 u 和 v，若$(u,v)\in E$，则称 u 和 v 是邻接的(adjacent)。在图 1-2-1 中，边 e_3,e_4,e_5 都与顶点 v_4 相关联，v_4 分别与 v_1,v_2,v_3 相邻接。若两条边有共同的顶点，则称这两条边是邻接的。图 1-2-1 中，边 e_1,e_2,e_3 两两相邻接。

对图 $G=(V,E)$和 $G'=(V',E')$来说，若有 $V'\subseteq V$ 和 $E'\subseteq E$，则称图 G' 是 G 的一个子图；若 $V'\subset V$ 或 $E'\subset E$，则称图 G' 是 G 的一个真子图。

对无向图 $G=(V,E)$，定义：

$$Inc(v_i)\triangleq\{e_k|e_k=\langle v_i,v_j\rangle\in E\},$$
$$Adj(vi)\triangleq\{v_j|e_k=\langle v_i,v_j\rangle\in E,v_i\neq v_j\},$$

即 $Inc(v_i)$表示以 v_i 为一顶点的边(即与 v_i 关联的边)的集合，$Adj(v_i)$表示与顶点 v_i 相邻接的顶点的集合。

对有向图 $G=(V,E)$，定义：

$$Inc^+(v_i)\triangleq\{e_k|e_k=(v_i,v_j)\in E\},$$
$$Inc^-(v_i)\triangleq\{e_k|e_k=(v_j,v_i)\in E\}。$$

即$Inc^+(v_i)$表示以 v_i 为始点的有向边的集合，

$Inc^-(v_i)$表示以 v_i 为终点的有向边的集合。

同样我们也可定义：

$$Adj^+(v_i)\triangleq\{v_j|e_k=(v_i,v_j)\in E\};$$
$$Adj^-(v_i)\triangleq\{v_j|e_k=(v_j,v_i)\in E\}。$$

例：如图 1-2-3 有

$$Inc(v_1)=\{e_1,e_2,e_3\},\quad Adj(v_1)=\{v_2,v_3\};$$
$$Inc(v_2)=\{e_1,e_4,e_5\},\quad Adj(v_2)=\{v_1,v_3\};$$
$$Inc(v_3)=\{e_2,e_4,e_5\},\quad Adj(v_3)=\{v_1,v_2\}。$$

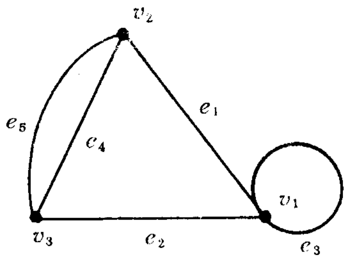

图 1-2-3

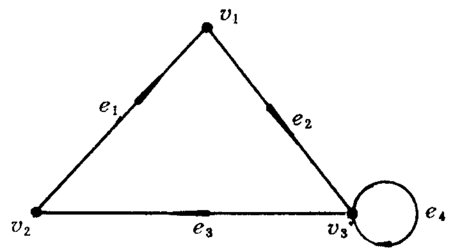

图 1-2-4

例：如图 1-2-4 有

$$Inc^+(v_1) = \{e_2\},$$
$$Inc^-(v_1) = \{e_1\},$$
$$Inc^+(v_3) = \{e_3, e_4\},$$
$$Inc^-(v_3) = \{e_2, e_4\}。$$

定义 设 $G=(V,E)$是无向图，若顶点 v_k 是 G 的一个顶点，且不存在自环。则 $d(v_k) \triangleq |Inc(v_k)|$。称为顶点 v_k 的度。这里$|Inc(v_k)|$是集合 $Inc(v_k)$中元素个数。即 $d(v_k)$表示 G 图中以 v_k 为端点的边数，或说是与 v_k 点发生关联的边数。

定义 对于有向图 $G=(V,E)$，v_k 是 G 的一顶点，则

$$d^+(v_k) \triangleq |Inc^+(v_k)|;$$
$$d^-(v_k) \triangleq |Inc^-(v_k)|。$$

分别称为顶点 v_k 的出度和入度。

$$d(v_k) \triangleq d^+(v_k) + d^-(v_k)$$

称为顶点 v_k 的度。

显然若 v_k 是有向图的顶点，而且有自环时，则此自环既从 v_k 出发，又进入 v_k，故计算了两次。为统一起见，对无向图 G 中有自环的顶点 v_k，此自环在 $d(v_k)$中也应计算两次。

如在图 1-1-13 中，$d(v_1)=4$，$d(v_2)=d(v_3)=3$。在图 1-1-14 中 $d^+(v_1)=1$，$d^-(v_1)=1$，$d(v_1)=2$。

由上面的讨论，很容易得出如下结论：

结论 1 对于图 $G=(V,E)$恒有

$$\sum_{v_i \in V} d(v_i) = 2|E|。$$

证明留给读者自己来完成。

结论 2 对于任意图 $G=(V,E)$，度为奇数的点数必为偶数。

证明 从上面结论 1 可知，各顶点度的和 $\sum_{v_i \in V} d(v_i)$ 为偶数。设度为偶数的顶点集合为 V_e，度为奇数的顶点集合为 V_o，则：

$$V = V_e \cup V_o,$$
$$\sum_{v_i \in V_e} d(v_i) + \sum_{V_j \in V_o} d(v_i) = 2|E|。$$

显然和 $\sum_{V_i \in V_e} d(v_i)$ 为偶数。因为偶数的和为偶数。若 $|V_o|$ 为奇数，则 $\sum_{v_j \in V_o} d(v_j)$ 必为奇数。因为奇数个奇数的和必为奇数，奇数与偶数的和为奇数，则与结论 $\sum_{v_i \in V_e} d(v_i) + \sum_{v_j \in V_o} d(v_j) = 2|E|$ 相矛盾。故 $|V_o|$ 必为偶数。

§3 道路与回路

一、道路与回路

定义 图 $G=(V_1E)$ 的一个顶点和边的交替序列 $\mu=v_0e_1v_1\cdots v_{k-1}e_kv_k$，且边 e_i 的端点为 v_{i-1} 和 v_i，$i=1,2,\cdots,k$，则称 μ 为一条道路(Path)，v_0 和 v_k 分别称为 μ 的起点和终点。特别如 μ 中所有的边均不相同，则称其为简单道路。以 v_0 为起点，v_k 为终点的道路称为 v_0-v_k 道路。

如果道路 μ 中 $v_0=v_k$，称 μ 为回路，回路中没有重复边时称为简单回路。

对于有向图也可类似定义道路、回路的概念，留给读者思考。

例：

在图 1-3-1 中，$S=\{v_1e_1v_2e_3v_3e_6v_4\}$ 是一道路，$C=v_1e_2v_2e_3v_3e_6v_4e_4v_1$ 是一回路。

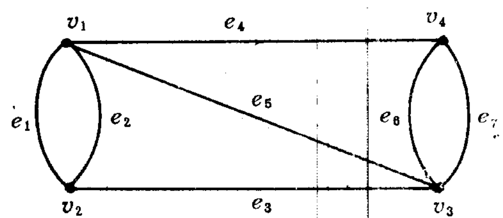

图 1-3-1

定义 对图 $G=(V_1E)$ 来说，若 G 的两顶点 u，v 之间存在一条道路；则称 u 和 v 是连通的，若图 G 的任意两顶点连通，则称图 G 是连通的；否则是非连通的。非连通图可分解为若干连通子图。

对于有向图，若边去掉方向后是连通的，则称其为连通的有向图。若对于有向图的任意两顶点 u 和 v 之间存在 u 到 v 道路和 v 到 u 道路时，称其为强连通的。

定义 没有重复边和自环的图叫做简单图。

二、欧拉(Euler)回路

定义 对于连通的无向图 G，若存在一简单回路，它通过 G 的所有边，则这回路称为 G 的(Euler)回路。

定理 若连通无向图 G 的所有顶点的度都是偶数，则存在一条图 G 的 Euler 回路。

证明 不失一般性，设从 v_0 出发，边数最多的一条回路为

$$C=\{e_1=\langle v_0,v_1\rangle, e_2=\langle v_1,v_2\rangle,\cdots,e_m=\langle v_{m-1},v_0\rangle,\}。$$