

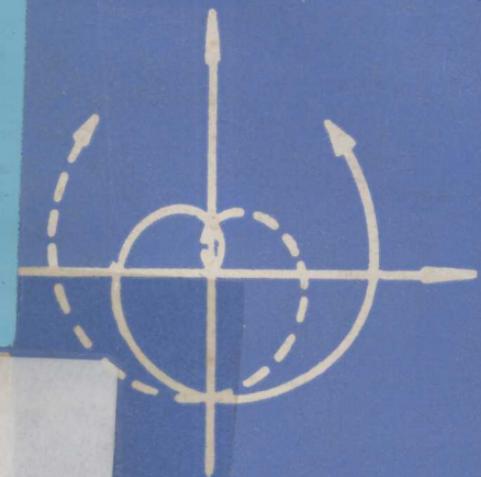
686293

92.11.16

刘义循 徐军民

新编高等数学

线性代数部分



兰州大学出版社

013
921
3

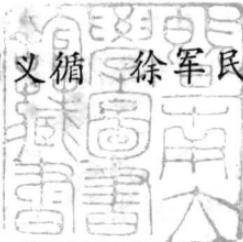
686293

新编高等数学

(线性代数部分)

第三册

刘义循 徐军民



90044172



兰州大学出版社

山西農業大學植物土壤學系編輯室編著

兰州大学出版社

1890·兰州

1990 · 三川 50

cesa3

内 容 提 要

《新编高等数学》共三册，第一册主要为一元函数微积分、级数和简单微分方程；第二册是空间解析几何、多元函数微积分、微分方程（续）；第三册是线性代数。另编有配合微积分部分（第一、二册）用的《新编高等数学习题课教材》，书中有许多各种类型的例题和习题。全套教材可供理、工、农、医、文等专业使用，也可以作为大专有关师生和科技工作者的参考书。

本书是第三册，内容有矩阵、行列式、向量空间、矩阵的秩与线性方程组、线性映射与线性变换、欧几里得空间等六章，60学时讲完。

新 编 高 等 数 学

（线性代数部分）

第三册

刘义循 徐军民

兰州大学出版社出版

（兰州大学校内）

甘肃省静宁县印刷厂印刷 甘肃省新华书店发行

开本：850×1168毫米1/32 印张：7.625

1990年6月第1版 1990年6月第1次印刷

字数：202千字 印数：1—3000册

ISBN7-311-00298-2/O·46 定价：2.00元

前　　言

本教材是为大学物理类专业二年级第一学期线性代数课编写的。其内容基本符合综合大学物理学专业《高等数学教学大纲》关于线性代数方面的规定，但注意到下列几个方面：

一、在教材内容的取舍与安排上，既考虑到线性代数自身的公理化体系，又注意了理论与实际的联系。

二、矩阵论是线性代数中重要的不可缺少的部分，它在提出和解决线性代数的问题中起着工具的作用。本教材以矩阵贯穿全书，正是为了强调矩阵在线性代数理论与计算中作为主要工具的作用。

三、为了减少初学者理解上的困难，提出问题力求直观、自然，抽象概念尽可能采用几何类比的方法引进，题目依例题、问题（供课堂讨论或习题课使用）和习题三个层次编排，以利学生逐步加深对课文的理解，促进讲练结合，从而培养和提高学生的动手能力。

本书编写过程中查阅了大量国内外现行教材，并结合我们多年教学经验，作了如上提到的一些改进。由于水平所限，谬误之处实属难免，敬请读者批评指正。

编　者

1989. 11

。 (圆空千指质量圆质圆质) 圆空圆质圆质 (下)。
。 (圆空千指质量圆质圆质) 圆空圆质圆质 (上)。

K 数域, α, β, \dots , 表示数 (与向量同时出现时), 其他场合也用 $a, b, c, t, i, j, k, \lambda, \mu \dots$ 表示数。

$K^{m \times n}$ 数域 K 上全体 $m \times n$ 矩阵。

A, B 矩阵, 其元素相应表成 a_{ij}, b_{ij}, \dots

A^T 矩阵 A 的转置矩阵。

\bar{A} 矩阵 A 的共轭矩阵。

E 单位矩阵, 0 零矩阵。

M_{ij} 矩阵单位 [即 (i, j) 处为 1, 其余为 0 的 $m \times n$ 矩阵]。

δ_{ij} 克罗奈克 (Kronecker) δ : $i \neq j$ 时为 0, $i = j$ 时为 1。

A^{-1} 矩阵 A 的逆矩阵。

$t_r A$ 方阵 A 的迹, $t_r A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

$E_i(t), E_{ij}(t), P_{ij}$ 三种初等矩阵。

$A \begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_r \\ j_1 j_2 \dots j_r \end{pmatrix}$ 矩阵 A 的 i_1, i_2, \dots, i_r 行与 j_1, j_2, \dots, j_r 列交界

处的元素作成的子行列式。

$diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 对角矩阵。

$|A| (\det A)$ 矩阵 A 的行列式。

K^n K 中元组成的 n 维列向量的全体。

K_n K 中元组成的 n 维行向量的全体。

V, W, \dots 向量空间, 子空间。

$L(V, U)$ 向量空间 V 到 U 的线性映射的全体。

f, g, \dots 线性映射或线性变换。

x, y, z, \dots 向量空间的向量。

$r(A)$ 矩阵 A 的秩。

$R(A)$ 矩阵 A 的列空间 (矩阵 A 的列向量生成的子空间)。

$N(A)$ 矩阵 A 的核空间 ($Ax=0$ 的全体 x 组成的子空间)。

$V+W$ 子空间 V 与 W 的和。

$V \oplus W$ 子空间 V 与 W 的直和。

$U \cong V$ 向量空间的同构。

$A \sim B$ 矩阵的相似。

$Im f$ 映射 (变换) 的值域。

$Ker f$ 线性映射 (变换) 的核空间。

{0} 零元素组成的向量空间。

$S = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ e_1, e_2, \dots, e_n 组成的有序基, e_i 为基的向量。简记作 S, T, S', T', \dots 。

(x, y) x, y 的内积。

$x \perp y$ x 与 y 正交。

W^\perp 子空间 W 的正交补子空间。

$\|x\|$ 向量 x 的范数 (模, 长度)。

$d(x, y)$ 向量 x 与 y 间的距离 (即 $\|x-y\|$)。

$E_f(\lambda), E_A(\lambda)$ 线性变换 f 或方阵 A 的特征值 λ 所对应的特征子空间。

f^* 线性变换 f 的关联变换。

$\det(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为列的行列式。

□ 标志定理证完毕的符号。

(138)	· · · · ·	目 录
(138)	· · · · ·	第一章 矩阵
(141)	· · · · ·	第二章 行列式
(144)	· · · · ·	第三章 向量空间
(147)	· · · · ·	第四章 矩阵的秩与线性方程组
(150)	· · · · ·	第五章 线性变换与特征值
(153)	· · · · ·	第六章 二次型
(156)	· · · · ·	第七章 矩阵的对角化
(159)	· · · · ·	第八章 矩阵论初步
(162)	· · · · ·	第九章 矩阵论的应用
(165)	· · · · ·	第十章 矩阵论的进阶
(168)	· · · · ·	第十一章 矩阵论的进阶
(171)	· · · · ·	第十二章 矩阵论的进阶
(174)	· · · · ·	第十三章 矩阵论的进阶
(177)	· · · · ·	第十四章 矩阵论的进阶
(180)	· · · · ·	第十五章 矩阵论的进阶
(183)	· · · · ·	第十六章 矩阵论的进阶
(186)	· · · · ·	第十七章 矩阵论的进阶
(189)	· · · · ·	第十八章 矩阵论的进阶
(192)	· · · · ·	第十九章 矩阵论的进阶
(195)	· · · · ·	第二十章 矩阵论的进阶
(198)	· · · · ·	第二十一章 矩阵论的进阶
(201)	· · · · ·	第二十二章 矩阵论的进阶
(204)	· · · · ·	第二十三章 矩阵论的进阶
(207)	· · · · ·	第二十四章 矩阵论的进阶
(210)	· · · · ·	第二十五章 矩阵论的进阶
(213)	· · · · ·	第二十六章 矩阵论的进阶
(216)	· · · · ·	第二十七章 矩阵论的进阶
(219)	· · · · ·	第二十八章 矩阵论的进阶
(222)	· · · · ·	第二十九章 矩阵论的进阶
(225)	· · · · ·	第三十章 矩阵论的进阶
(228)	· · · · ·	第三十一章 矩阵论的进阶
(231)	· · · · ·	第三十二章 矩阵论的进阶
(234)	· · · · ·	第三十三章 矩阵论的进阶
(237)	· · · · ·	第三十四章 矩阵论的进阶
(240)	· · · · ·	第三十五章 矩阵论的进阶
(243)	· · · · ·	第三十六章 矩阵论的进阶
(246)	· · · · ·	第三十七章 矩阵论的进阶
(249)	· · · · ·	第三十八章 矩阵论的进阶
(252)	· · · · ·	第三十九章 矩阵论的进阶
(255)	· · · · ·	第四十章 矩阵论的进阶
(258)	· · · · ·	第四十一章 矩阵论的进阶
(261)	· · · · ·	第四十二章 矩阵论的进阶
(264)	· · · · ·	第四十三章 矩阵论的进阶
(267)	· · · · ·	第四十四章 矩阵论的进阶
(270)	· · · · ·	第四十五章 矩阵论的进阶
(273)	· · · · ·	第四十六章 矩阵论的进阶
(276)	· · · · ·	第四十七章 矩阵论的进阶
(279)	· · · · ·	第四十八章 矩阵论的进阶
(282)	· · · · ·	第四十九章 矩阵论的进阶
(285)	· · · · ·	第五十章 矩阵论的进阶
(288)	· · · · ·	第五十一章 矩阵论的进阶
(291)	· · · · ·	第五十二章 矩阵论的进阶
(294)	· · · · ·	第五十三章 矩阵论的进阶
(297)	· · · · ·	第五十四章 矩阵论的进阶
(300)	· · · · ·	第五十五章 矩阵论的进阶
(303)	· · · · ·	第五十六章 矩阵论的进阶
(306)	· · · · ·	第五十七章 矩阵论的进阶
(309)	· · · · ·	第五十八章 矩阵论的进阶
(312)	· · · · ·	第五十九章 矩阵论的进阶
(315)	· · · · ·	第六十章 矩阵论的进阶
(318)	· · · · ·	第六十一章 矩阵论的进阶
(321)	· · · · ·	第六十二章 矩阵论的进阶
(324)	· · · · ·	第六十三章 矩阵论的进阶
(327)	· · · · ·	第六十四章 矩阵论的进阶
(330)	· · · · ·	第六十五章 矩阵论的进阶
(333)	· · · · ·	第六十六章 矩阵论的进阶
(336)	· · · · ·	第六十七章 矩阵论的进阶
(339)	· · · · ·	第六十八章 矩阵论的进阶
(342)	· · · · ·	第六十九章 矩阵论的进阶
(345)	· · · · ·	第七十章 矩阵论的进阶
(348)	· · · · ·	第七十一章 矩阵论的进阶
(351)	· · · · ·	第七十二章 矩阵论的进阶
(354)	· · · · ·	第七十三章 矩阵论的进阶
(357)	· · · · ·	第七十四章 矩阵论的进阶
(360)	· · · · ·	第七十五章 矩阵论的进阶
(363)	· · · · ·	第七十六章 矩阵论的进阶
(366)	· · · · ·	第七十七章 矩阵论的进阶
(369)	· · · · ·	第七十八章 矩阵论的进阶
(372)	· · · · ·	第七十九章 矩阵论的进阶
(375)	· · · · ·	第八十章 矩阵论的进阶
(378)	· · · · ·	第八十一章 矩阵论的进阶
(381)	· · · · ·	第八十二章 矩阵论的进阶
(384)	· · · · ·	第八十三章 矩阵论的进阶
(387)	· · · · ·	第八十四章 矩阵论的进阶
(390)	· · · · ·	第八十五章 矩阵论的进阶
(393)	· · · · ·	第八十六章 矩阵论的进阶
(396)	· · · · ·	第八十七章 矩阵论的进阶
(399)	· · · · ·	第八十八章 矩阵论的进阶
(402)	· · · · ·	第八十九章 矩阵论的进阶
(405)	· · · · ·	第九十章 矩阵论的进阶
(408)	· · · · ·	第九十一章 矩阵论的进阶
(411)	· · · · ·	第九十二章 矩阵论的进阶
(414)	· · · · ·	第九十三章 矩阵论的进阶
(417)	· · · · ·	第九十四章 矩阵论的进阶
(420)	· · · · ·	第九十五章 矩阵论的进阶
(423)	· · · · ·	第九十六章 矩阵论的进阶
(426)	· · · · ·	第九十七章 矩阵论的进阶
(429)	· · · · ·	第九十八章 矩阵论的进阶
(432)	· · · · ·	第九十九章 矩阵论的进阶
(435)	· · · · ·	第一百章 矩阵论的进阶

练习 4	(133)
第五章 线性映射与线性变换	(137)
§ 5. 1 映射	(137)
§ 5. 2 线性映射	(140)
§ 5. 3 线性映射的矩阵表示	(148)
§ 5. 4 线性变换的特征值与特征向量	(158)
练习 5	(177)
第六章 欧几里得空间	(181)
§ 6. 1 内积	(181)
§ 6. 2 标准正交基	(186)
§ 6. 3 欧氏空间的线性变换	(200)
§ 6. 4 实二次型	(210)
§ 6. 5酉空间的线性变换	(221)
练习 6	(229)

第一章 矩阵

从函数的观点来讲，线性代数学是以线性函数和它们的集合的理论为研究对象的。而矩阵在提出与解决线性代数的问题中起着工具的作用，因此，矩阵概念及其基本理论是线性代数中首要的不可缺少的组成部分。

§1.1 矩阵概念的引入

这一节里我们由各种不同的实际问题来引出矩阵概念，同时我们还会从中发现矩阵的一些应用。

例题 1 设某三个不同的付食商场 S_1, S_2, S_3 供应四种不同价格（单位：元）的罐头食品 F_1, F_2, F_3, F_4 。如下表所示：

	F_1	F_2	F_3	F_4
S_1	17	7	11	21
S_2	15	9	13	19
S_3	18	8	15	19

表 1.1

在商场 S_1 把每种罐头各买一瓶则总共需花费 $17 + 7 + 11 + 21 = 56$ (元)，同样地，在 S_2, S_3 分别要花费 56 元与 60 元。

表 1.1 中数字的长方形排列就叫做矩阵。这里分别有 3 行和 4 列。象这样的一个排列总是发生在两个集合（上例中是食品和付食商场）的元素通过一个数字集合（上例中是价格）相联接的时候。

例题 2 表 1.2 给出了甲、乙、丙、丁四个城市之间的距离（公里）。

	甲	乙	丙	丁
甲	0	841	2212	704
乙	841	0	3033	224
丙	2212	3033	0	2835
丁	704	224	2835	0

表1.2

我们注意到，这个排列中的行和列具有相同的数目，故被称作正方矩阵。零元素所在的那条线叫作这个矩阵的主对角线。也注意到阵列中的数字是关于这条主对角线对称的。以后我们将看到如此的对称矩阵具有一些有趣的性质。

例题3 图1.1是一个网。表示第一个国家的机场 A_1, A_2 与第二个国家的机场 B_1, B_2, B_3 之间的航空路线。每一连线上的数字给出了相应两机场之间的飞行里程（千公里）。用列表的形式表示成

$$(1.1) \quad \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & 4 & 1 & 3 \\ A_2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

这里，把这个排列用圆括号括起来，也是矩阵的一种表示符号。

例题4 电流 i_1, i_2, i_3 在电路中可以表示成图1.2的样子，且满足方程组

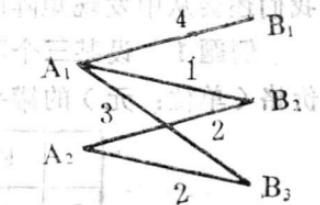


图1.1

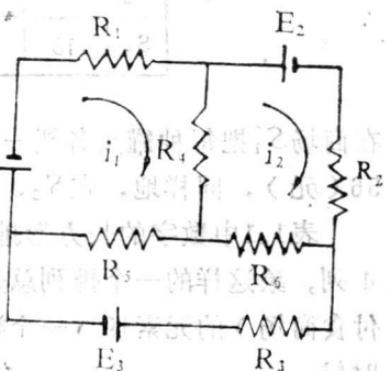


图1.2 一个简单的串联-并联电路示意图。

$$(R_1 + R_4 + R_5) i_1 - R_4 i_2 - R_5 i_3 = E_1 \quad (1.1)$$

$$(1.2) \quad -R_4 i_1 + (R_2 + R_4 + R_6) i_2 - R_6 i_3 = E_2$$

$$-R_6 i_1 - R_6 i_2 + (R_3 + R_5 + R_6) i_3 = E_3$$

这些方程中，作为三个未知量要求解的是 i_1, i_2, i_3 ，其余参数的值为已知。方程组 (1.2) 的关系能够以一个更加简明的方式用矩阵符号表示如下：

$$(1.3) \quad \begin{pmatrix} R_1 + R_4 + R_6 & -R_4 & -R_5 \\ -R_4 & R_2 + R_4 + R_6 & -R_6 \\ -R_5 & -R_6 & R_3 + R_5 + R_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

这里，我们把 (1.3) 仅仅看作是 (1.2) 的一种写法，它的优越性就在于把系数和未知数分离开来，这样，不但节省符号，而且便于研究。这一点我们将会逐渐体会到。因为，作为线性代数的主要研究对象的形如 (1.2) 的这种线性方程组，其性质只依赖于系数的数值。所以，我们通过对系数 (矩阵) 的研究来研究线性方程组。由此看出：从线性代数的对象本身自然引起研究矩阵的必要性。

例题 5 设 P 是笛卡儿坐标 x_1, x_2 的平面上的一点， O 为原点，如图 1.3a 所示。设 OP 绕 O 逆时针方向旋转一个角 θ ，由 P 变到 $P' = (x'_1, x'_2)$ ，如图 1.3b 所示。因为 $OP = OP' = r$ ，所以我们有

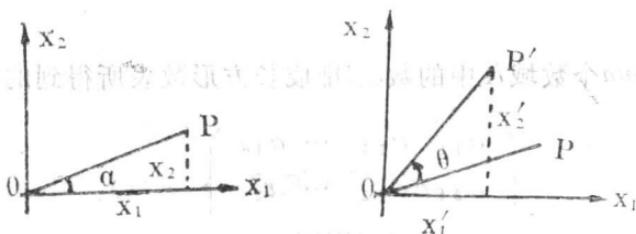


图 1.3 a

图 1.3 b

$$x_1 = r \cos \alpha, \quad x_2 = r \sin \alpha, \quad (1.1)$$

以及

$$\begin{aligned} x'_1 &= r \cos (\alpha + \theta) = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta \\ &= (\cos \theta) x_1 - (\sin \theta) x_2. \end{aligned}$$

同理

$$x'_2 = (\sin \theta) x_1 + (\cos \theta) x_2.$$

写成矩阵的形式，就是

$$(1.4) \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

由坐标 x_1, x_2 向 x'_1, x'_2 的变换是变换（或映射）的一个例子。这在几何学中是很有用处的。

为了从上述实例得到矩阵概念的一般数学描述，我们还必须引入数域的概念。

定义1.1.1 设 K 是一个含有 0 与 1 的数集，如果 K 中任意两个数的和、差、积、商（除数不能为零）仍然是 K 中的数，那么，就称 K 为一个数域。

显然，全体有理数组成的集合，全体实数组成的集合，全体复数组成的集合都是数域，分别叫做有理数域，实数域和复数域。我们常用 Q, R, C 来分别表示这三个数域。全体整数组成的集合不是一个数域，因为任意两个整数的商不一定是整数。

把 mn 个数域 K 中的数 α_{ij} 排成长方形数表所得到的

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做数域 K 上的一个 $m \times n$ 矩阵，或 $m \times n$ 矩阵，简记作 $A = (a_{ij})$ ， a_{ij} 叫作 A 的 (i, j) 元素。

矩阵的横排叫作行，纵排叫作列。从上往下数称为第 1 行，第 2 行，……；从左往右数称为第 1 列，第 2 列，……。

实数域上的矩阵叫实矩阵，复数域上的矩阵叫复矩阵。以下讲到矩阵时，如果没有说明，一般都指某个数域 K 上的矩阵。

当 $m = n$ 时， $n \times n$ 矩阵叫做 n 阶方阵。 n 阶方阵中，由 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 所构成的对角线叫主对角线，其中的元素叫对角元素。

一阶方阵 $A = (a)$ 和 a 一样看待。

$1 \times n$ 矩阵叫作 n 维行向量， $m \times 1$ 矩阵叫作 m 维列向量。特别地，由 A 的行作成的

$$a'_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

叫 A 的行向量；由 A 的列作成的

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

叫 A 的列向量。用这些可以把矩阵 A 表示成

$$A = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_m \end{pmatrix} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \quad (n = 1)$$

并分别叫作 A 的行向量表示和列向量表示。

§1.2 矩阵的运算

数域 K 上全部 $m \times n$ 矩阵记作 $K^{m \times n}$ 。矩阵运算的实质就是把 $K^{m \times n}$ 中的矩阵当作一个“量”来进行运算，使普通数的运算得到很大扩充。而矩阵之间的基本运算又是由线性方程组之间的运算自然地导出的。

(I) 矩阵的相等 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ 同为 $m \times n$ 矩阵, 且 $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) 时, A 和 B 称为相等的。记作 $A = B$ 。

(II) 矩阵的加法 对于 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, 规定 A 和 B 的和为

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

这时, 下列式子成立:

(1) $A + B = B + A$ (交换律);

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (结合律);

(3) $A + 0 = 0 + A$ (零元存在)。

象这样对所有 A 成立的 0 存在 (只一个), 它是全部元素为 0 的 $m \times n$ 矩阵, 叫作零矩阵。有时也形式地写作 $0_{m \times n}$ 。

(4) $A + X = 0 = X + A$ (负元存在)

这样的 X 对于各个 A 是唯一存在的。就是 $X = (-a_{ij})$, 且把这个 X 表成 $-A$ 。由此, $A + (-A) = A - A = 0$, $A + (-B)$ 就写作 $A - B$:

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij}).$$

(III) 数乘矩阵 设 a 为一个数, 规定

$$aA = (a a_{ij}) = Aa.$$

这时, 下列式子成立:

(5) $a(A + B) = aA + aB;$

(6) $(a + b)A = aA + bA;$

$$(7) \quad a(bA) = (ab)A;$$

$$(8) \quad 1 \cdot A = A.$$

设

$$A = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_m \end{pmatrix} = (a_1 a_2 \cdots a_n), \quad B = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_m \end{pmatrix} = (b_1 b_2 \cdots b_n),$$

则有

$$A + B = \begin{pmatrix} a'_1 + b'_1 \\ a'_2 + b'_2 \\ \vdots \\ a'_m + b'_m \end{pmatrix} = (a_1 + b_1 \ a_2 + b_2 \ \cdots \ a_n + b_n),$$

$$aA = \begin{pmatrix} a & a'_1 \\ a & a'_2 \\ \vdots \\ a & a'_m \end{pmatrix} = (aa_1 \ aa_2 \ \cdots \ aa_n).$$

问题 1 证明：

(1) $0A = 0$, (2) $a0 = 0$, (3) $(-a)A = -(aA) = a(-A)$, (4) $aA = 0$ 成立时，则有 $a = 0$ 或 $A = 0$ 。

问题 2 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 计算 (1) } A + B + C,$$

$$(2) 2A + 3C, \quad (3) 3B - 2A \quad (4) 2A - B + 3C.$$

(IV) 矩阵的乘法 设 $A_{ij} = (a)$ 为 $m \times n$ 矩阵, $B = (b_{ij})$ 为 $n \times l$ 矩阵。对于

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad i\text{行}$$

和

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1e} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2e} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{ne} \\ & & & j\text{列} & & \end{pmatrix}$$

由

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{t=1}^n a_{it}b_{tj}$$

$$(i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, t)$$

作(i, j)元素而构成的(m, l)矩阵 $C = (c_{ij})$, 叫做矩阵 A 和 B 的积, 表示为 AB :

$$AB = (a_{ij})(b_{ij}) = (\sum_{t=1}^n a_{it}b_{tj})$$

积 AB 只有当 A 的列数与 B 的行数相等时才有意义。即
 $(m \times n \text{矩阵}) \times (n \times l \text{矩阵}) = m \times l \text{矩阵}$ 。

问题3 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

计算下列乘积：

- (1) AD , (2) CB , (3) DC , (4) $(AD)C$, (5) $A(DC)$,
(6) $(AD)(CB)$, (7) $[A(DC)]B$ 。

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

由

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可知， $AB \neq BA$ 。

一般说来，即使 AB 有意义，但 BA 却有时不存在。另外，即使二者都存在，但有时也有如上所述的 $AB \neq BA$ 的情形。

$AB = BA$ 时， A 和 B 称作可(交)换的。

问题4 求与下列矩阵可换的所有矩阵：

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

问题5 AB , BA 同时存在，那么 A , B 是什么型的矩阵？又 AB 和 BA 是同一型时， A , B 又分别是什么型的？

定理1.2.1 关于矩阵的乘法、加法以及数乘，有下列等式成立：

- (1) $(AB)C = A(BC)$ (结合律)；
(2) $(A+B)C = AC + BC$ (右分配律)；
 $C(A+B) = CA + CB$ (左分配律)；
(3) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$ 。

证明 这些等式的意思是，在等式两端均有意义的前提下等号成立。设