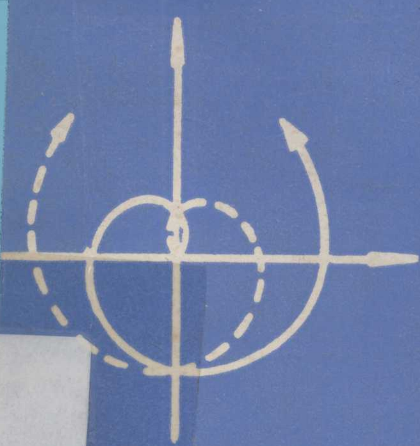
92.11.16

刘义循　徐军民

新编高等数学

线性代数部分

第三册



兰州大学出版社

新编高等数学

（线性代数部分）

第三册

刘义循　徐军民

兰州大学出版社

1990・兰州

内 容 提 要

《新编高等数学》共三册，第一册主要为一元函数微积分、级数和简单微分方程；第二册是空间解析几何，多元函数微积分，微分方程（续）；第三册是线性代数。另编有配合微积分部分（第一，二册）用的《新编高等数学习题课教材》，书中有许多各种类型的例题和习题。全套教材可供理、工、农、医、文等专业使用，也可以作为大专有关师生和科技工作者的参考书。

本书是第三册，内容有矩阵、行列式、向量空间、矩阵的秩与线性方程组、线性映射与线性变换、欧几里得空间等六章，60学时讲完。

新编高等数学

（线性代数部分）

第三册

刘义循　徐军民

兰州大学出版社出版

（兰州大学校内）

甘肃省静宁县印刷厂印刷	甘肃省新华书店发行
开本：850×1168毫米1/32	印张：7.625
1990年6月第1版	1990年6月第1次印刷
字数：202千字	印数：1—3000册

ISBN7-311-00298-2/O·46　　定价：2.00元

前　　言

本教材是为大学物理类专业二年级第一学期线性代数课编写的。其内容基本符合综合大学物理学专业《高等数学教学大纲》关于线性代数方面的规定，但注意到下列几个方面：

一、在教材内容的取舍与安排上，既考虑到线性代数自身的公理化体系，又注意了理论与实际的联系。

二、矩阵论是线性代数中重要的不可缺少的部分，它在提出和解决线性代数的问题中起着工具的作用。本教材以矩阵贯穿全书，正是为了强调矩阵在线性代数理论与计算中作为主要工具的作用。

三、为了减少初学者理解上的困难，提出问题力求直观、自然，抽象概念尽可能采用几何类比的方法引进，题目依例题、问题（供课堂讨论或习题课使用）和习题三个层次编排，以利学生逐步加深对课文的理解，促进讲练结合，从而培养和提高学生的动手能力。

本书编写过程中查阅了大量国内外现行教材，并结合我们多年的教学经验，作了如上提到的一些改进。由于水平所限，谬误之处实属难免，敬请读者批评指正。

编　者

1989。11

本 书 符 号

K　数域，α，β，…，表示数（与向量同时出现时），其他场合也用$a,b,c,t,i,j,k,\lambda,\mu$…表示数。

$K^{m\times n}$　数域K上全体$m\times n$矩阵。

A,B　矩阵，其元素相应表成a_{ij}，b_{ij}，…。

A^T　矩阵A的转置矩阵。

$\overline{A}$　矩阵A的共轭矩阵。

E　单位矩阵，0　零矩阵。

M_{ij}　矩阵单位〔即（i,j）处为1，其余为0的$m\times n$矩阵〕。

δ_{ij}　克罗奈克（Kronecker）δ：$i\neq j$时为0，$i=j$时为1。

A^{-1}　矩阵A的逆矩阵。

t_rA　方阵A的迹，$t_rA=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$。

$E_i(t)$，$E_{ij}(t)$，P_{ij}　三种初等矩阵。

$A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_r \\ j_1 j_2\cdots j_r \end{pmatrix}$　矩阵A的$i_1,i_2,\cdots,i_r$行与$j_1,j_2,\cdots,j_r$列交界处的元素作成的子行列式。

$diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$　对角矩阵。

$|A|$（$\det A$）　矩阵A的行列式。

K^n　K中元组成的n维列向量的全体。

K_n　K中元组成的n维行向量的全体。

$V,W,\cdots$　向量空间，子空间。

$L(V,U)$　向量空间V到U的线性映射的全体。

$f,g,\cdots$　线性映射或线性变换。

$x,y,z,\cdots$　向量空间的向量。

$r(A)$　矩阵A的秩。

$R(A)$ 矩阵A的列空间（矩阵A的列向量生成的子空间）。

$N(A)$ 矩阵A的核空间（$Ax=0$的全体x组成的子空间）。

$V+W$ 子空间V与W的和。

$V\oplus W$ 子空间V与W的直和。

$U\cong V$ 向量空间的同构。

$A\sim B$ 矩阵的相似。

Imf 映射（变换）的值域。

$Kerf$ 线性映射（变换）的核空间。

$\{0\}$ 零元素组成的向量空间。

$S=\langle e_1,e_2,\cdots,e_n\rangle$ $e_1,e_2,\cdots,e_n$组成的有序基，e_i为基的向量。简记作$S,T,S',T',\cdots$。

(x,y) x,y的内积。

$x\perp y$ x与y正交。

$W^{\perp}$ 子空间W的正交补子空间。

$\|x\|$ 向量x的范数（模，长度）。

$d(x,y)$ 向量x与y间的距离（即$\|x-y\|$）。

$E_f(\lambda)$，$E_A(\lambda)$ 线性变换f或方阵A的特征值λ所对应的特征子空间。

f^* 线性变换f的关联变换。

$det(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为列的行列式。

□ 标志定理证完毕的符号。

目　　录

第一章 矩 阵

从函数的观点来讲，线性代数学是以线性函数和它们的集合的理论为研究对象的。而矩阵在提出与解决线性代数的问题中起着工具的作用，因此，矩阵概念及其基本理论是线性代数中首要的不可缺少的组成部分。

§1.1 矩阵概念的引入

这一节里我们由各种不同的实际问题来引出矩阵概念，同时我们还会从中发现矩阵的一些应用。

例题 1 设某三个不同的付食商场S_1, S_2, S_3供应四种不同价格（单位：元）的罐头食品F_1, F_2, F_3, F_4。如下表所示：

	F_1	F_2	F_3	F_4
S_1	17	7	11	21
S_2	15	9	13	19
S_3	18	8	15	19

表 1.1

在商场S_1把每种罐头各买一瓶则总共需花费$17+7+11+21=56$（元），同样地，在S_2，S_3分别要花费56元与60元。

表1.1中数字的长方形排列就叫做矩阵。这里分别有3行和4列。象这样的一个排列总是发生在两个集合（上例中是食品和付食商场）的元素通过一个数字集合（上例中是价格）相联接的时候。

例题 2 表1。2给出了甲、乙、丙、丁四个城市之间的距离（公里）。

	甲	乙	丙	丁
甲	0	841	2212	704
乙	841	0	3033	224
丙	2212	3033	0	2835
丁	704	224	2835	0

表1.2

我们注意到，这个排列中的行和列具有相同的数目，故被称作正方矩阵。零元素所在的那条线叫作这个矩阵的主对角线。也注意到阵列中的数字是关于这条主对角线对称的。以后我们将看到如此的对称矩阵具有一些有趣的性质。

例题 3 图1.1是一个网。表示第一个国家的机场A_1，A_2与第二个国家的机场B_1，B_2，B_3之间的航空路线。每一连线上的数字给出了相应两机场之间的飞行里程（千公里）。用列表的形式表示成

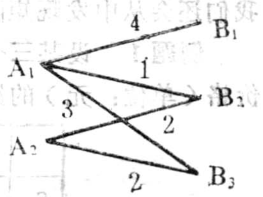


图1.1

$$
(1.1)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}
$$

这里，把这个排列用圆括号括起来，也是矩阵的一种表示符号。

例题 4 电流i_1，i_2，i_3在电路中可以表示成图1.2的样子，且满足方程组

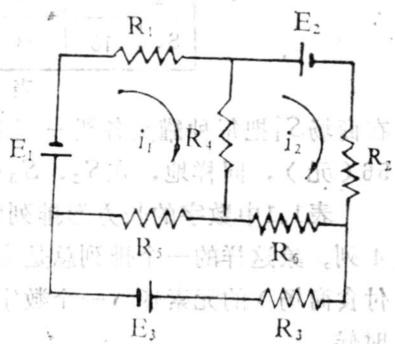


图1.2

$$(R_1+R_4+R_5)i_1-R_4i_2-R_5i_3=E_1$$

$$(1.2)\quad \begin{aligned} -R_4i_1+(R_2+R_4+R_6)i_2-R_6i_3&=E_2\\ -R_5i_1-R_6i_2+(R_3+R_5+R_6)i_3&=E_3。\end{aligned}$$

这些方程中，作为三个未知量要求解的是i_1，i_2，i_3，其余参数的值为已知。方程组（1.2）的关系能够以一个更加简明的方式用矩阵符号表示如下：

$$(1.3)\quad \begin{pmatrix} R_1+R_4+R_5 & -R_4 & -R_5 \\ -R_4 & R_2+R_4+R_6 & -R_6 \\ -R_5 & -R_6 & R_3+R_5+R_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1\\ i_2\\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1\\ E_2\\ E_3 \end{pmatrix}$$

这里，我们把（1.3）仅仅看作是（1.2）的一种写法，它的优越性就在于把系数和未知数分离开来，这样，不但节省符号，而且便于研究。这一点我们将会逐渐体会到。因为，作为线性代数的主要研究对象的形如（1.2）的这种线性方程组，其性质只依赖于系数的数值。所以，我们可以通过对系数（矩阵）的研究来研究线性方程组。由此看出：从线性代数的对象本身自然引起研究矩阵的必要性。

例题5　设P是笛卡儿坐标x_1,x_2的平面上的一点，O为原点，如图1.3a所示。设OP绕O逆时针方向旋转一个角θ，由P变到$P_1'=(x_1',\ x_2')$，如图1.3b所示。因为$OP=OP'=r$，所以我们有

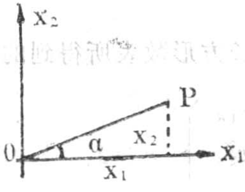


图1.3 a

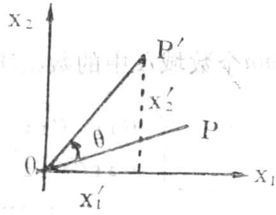


图1.3 b

$$x_1 = r\cos\alpha, \qquad x_2 = r\sin\alpha,$$

以及

$$\begin{aligned} x_1' &= r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\ &= (\cos\theta)x_1 - (\sin\theta)x_2。\end{aligned}$$

同理

$$x_2' = (\sin\theta)x_1 + (\cos\theta)x_2。$$

写成矩阵的形式，就是

$$(1.4)\qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}。$$

由坐标x_1，x_2向 x_1'，x_2'的变换是变换（或映射）的一个 例子。这在几何学中是很有用处的。

为了从上述实例得到矩阵概念的一般数学描述，我们还必须引入数域的概念。

定义1.1.1 设K是一个含有0与1的数集，如果K中 任 意两个数的和、差、积、商（除数不能为零）仍然 是K中 的 数，那么，就称K为一个数域。

显然，全体有理数组成的集合，全体实数组成的集合，全体复数组成的集合都是数域，分别叫做有理数域，实数域 和 复 数域。我们常用Q，R，C来分别表示这三个 数 域。全 体 整 数 组成的集合不是一个数域，因为任意两个整数的 商 不 一 定 是 整数。

把mn个数域K中的数a_{ij}排成长方形数表所得到的

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做数域K上的一个m行n列矩阵，或$m\times n$矩阵，简记作$A=(a_{ij})$，a_{ij}叫作A的$(i，j)$元素。

矩阵的横排叫作行，纵排叫作列。从上往下数称为第1行，第2行，……；从左往右数称为第1列，第2列，……。

实数域上的矩阵叫实矩阵，复数域上的矩阵叫复矩阵。以下讲到矩阵时，如果没有说明，一般都指某个数域K上的矩阵。

当$m=n$时，$n\times n$矩阵叫做n阶方阵。n阶方阵中，由a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}所构成的对角线叫主对角线，其中的元素叫对角元素。

一阶方阵$A=(a)$和a一样看待。

$1\times n$矩阵叫作n维行向量，$m\times 1$矩阵叫做m维列向量。特别地，由A的行作成的

$$a_i'=(a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})\ (i=1,2,\cdots,m)$$

叫A的行向量；由A的列作成的

$$a_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

叫A的列向量。用这些可以把矩阵A表示成

$$A=\begin{pmatrix}a_1'\\a_2'\\\vdots\\a_m'\end{pmatrix}=(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)$$

并分别叫作A的行向量表示和列向量表示。

§1.2 矩阵的运算

数域K上全部$m\times n$矩阵记作$K^{m\times n}$。矩阵运算的实质就是把$K^{m\times n}$中的矩阵当作一个“量”来进行运算，使普通数的运算得到很大扩充。而矩阵之间的基本运算又是由线性方程组之间的运算自然地导出的。

（Ⅰ） 矩阵的相等 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$同为$m\times n$矩阵，且

$$a_{ij}=b_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

时，A和B称为相等的。记作$A=B$。

（Ⅱ） 矩阵的加法 对于$m\times n$矩阵$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，规定A和B的和为

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})。$$

这时，下列式子成立：

（1） $A+B=B+A$ （交换律）；

（2） $(A+B)+C=A+(B+C)$ （结合律）；

（3） $A+0=0+A$ （零元存在）。

象这样对所有A成立的0存在（只一个），它是全部元素为0的$m\times n$矩阵，叫作零矩阵。有时也形式地写作$0_{m\times n}$。

（4） $A+X=0=X+A$ （负元存在）

这样的X对于各个A是唯一存在的。就是$X=(-a_{ij})$，且把这个X表成$-A$。由此，$A+(-A)=A-A=0$，$A+(-B)$就写作$A-B$：

$$A-B=(a_{ij}-b_{ij})$$

（Ⅲ） 数乘矩阵 设a为一个数，规定

$$aA=(a\ a_{ij})=Aa。$$

这时，下列式子成立：

（5） $a(A+B)=aA+aB$；

（6） $(a+b)A=aA+bA$；

（7） $a(bA)=(ab)A$；

（8） $1\cdot A=A$。

设

$$A=\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_m \end{pmatrix}=(a_1a_2\cdots a_n),B=\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_m \end{pmatrix}=(b_1b_2\cdots b_n),$$

则有

$$A+B=\begin{pmatrix} a'_1+b'_1 \\ a'_2+b'_2 \\ \vdots \\ a'_m+b'_m \end{pmatrix}=(a_1+b_1\ \ a_2+b_2\ \cdots\ a_n+b_n),$$

$$aA=\begin{pmatrix} a\ a'_1 \\ a\ a'_2 \\ \vdots \\ a\ a'_m \end{pmatrix}=(aa_1\ \ aa_2\ \cdots\ aa_n)。$$

问题 1 证明：

（1） $0A=0$，（2）$a0=0$，（3） $(-a)A=-(aA)=a(-A)$，（4）$aA=0$成立时，则有$a=0$或$A=0$。

问题 2 $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$，

$C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$，计算（1）$A+B+C$，

（2）$2A+3C$，（3）$3B-2A$ （4）$2A-B+3C$。

（Ⅳ） 矩阵的乘法 设$A_{ij}=(a)$为$m\times n$矩阵，$B=(b_{ij})$为$n\times l$矩阵。对于

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

和

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix}$$
$$j\text{列}$$

由

$$c_{ij}=\alpha_{i1}b_{1j}+\alpha i_2b_2j+\cdots+\alpha_{in}b_{nj}=\sum_{t=1}^{n}\alpha_{it}b_{tj}$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ \ j=1,2,\cdots,t)$$

作（i，j）元素而构成的（m，l）矩阵$C=(c_{ij})$，叫做矩阵A和B的积，表示为AB：

$$AB=(\alpha_{ij})(b_{ij})=(\sum_{t=1}^{n}\alpha_{it}\ b_{tj})。$$

积AB只有当A的列数与B的行数相等时才有意义。即

$$(m\times n\text{矩阵})\times(n\times l\text{矩阵})=m\times t\text{矩阵}。$$

问题 3　设　$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

计算下列乘积：

(1)AD，(2)CB，(3)DC，(4)$(AD)C$，(5)$A(DC)$，(6)$(AD)(CB)$，(7)$[A(DC)]B$。

设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

由

$$AB=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

可知，$AB\neq BA$。

一般说来，即使AB有意义，但BA却有时不存在。另外，即使二者都存在，但有时也有如上所述的$AB\neq BA$的情形。

$AB=BA$时，A和B称作可（交）换的。

问题 4　求与下列矩阵可换的所有矩阵：

$$(1)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ (2)\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\ (3)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

问题 5　AB，BA同时存在，那么A，B是什么型的矩阵？又AB和BA是同一型时，A，B又分别是什么型的？

定理1.2.1　关于矩阵的乘法、加法以及数乘，有下列等式成立：

（1）$(AB)C=A(BC)$　　（结合律）；

（2）$(A+B)C=AC+BC$　　（右分配律）；

　　$C(A+B)=CA+CB$　　（左分配律）；

（3）$(\alpha A)B=A(\alpha B)=\alpha(AB)$。

证明　这些等式的意思是，在等式两端均有意义的前提下等号成立。设