21世纪高等学校本科数学规划教材

高等数学学习辅导

（理工类）上册

Advanced Mathematics Guidance

東北大學出版社
Northeastern University Press

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习辅导（理工类）上册/熊静宜，李友国，王学理主编．—沈阳：东北大学出版社，2007.8

ISBN 978-7-81102-379-4

Ⅰ．高…　Ⅱ．①熊…　②李…　③王…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 129831 号

出 版 者：东北大学出版社
　　地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
　　邮编：110004
　　电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
　　传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
　　E-mail：neuph @ neupress.com
　　http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂书画彩印中心
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：184mm × 260mm
印　　张：12.25
字　　数：366 千字
出版时间：2007 年 8 月第 1 版
印刷时间：2007 年 8 月第 1 次印刷
责任编辑：刘乃义　刘宗玉　　　责任校对：文　浩
封面设计：唐敏智　　　　　　　责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-379-4　　　　定　价：20.00 元

目 录

第一章 函数的极限与连续 …… 1
一、内容精要 …… 1
二、归类解析 …… 4
三、习题详解 …… 16
四、同步测试 …… 28
第二章 导数与微分 …… 31
一、内容精要 …… 31
二、归类解析 …… 32
三、习题详解 …… 45
四、同步测试 …… 59
第三章 微分中值定理与导数的应用 …… 62
一、内容精要 …… 62
二、归类解析 …… 64
三、习题详解 …… 73
四、同步测试 …… 87
第四章 不定积分 …… 90
一、内容精要 …… 90
二、归类解析 …… 92
三、习题详解 …… 103
四、同步测试 …… 115
第五章 定积分及其应用 …… 119
一、内容精要 …… 119
二、归类解析 …… 123
三、习题详解 …… 140
四、同步测试 …… 161
第六章 向量代数与空间解析几何 …… 164
一、内容精要 …… 164

二、归类解析 …… 166
三、习题详解 …… 172
四、同步测试 …… 188

第一章　函数的极限与连续

一、内容精要

(一) 主要定义

1. 具有某种特定性质的事物的总体称为集合(简称集)，组成这个集合的事物称为该集合的元素(简称元).

2. 设 X，Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作 $f: X\rightarrow Y$，其中 y 称为元素 x(在映射 f 下)的象，并记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$，而元素 x 则称为元素 y(在映射 f 下)的一个原象.

3. 设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则称映射 $f: D\rightarrow\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为 $y=f(x)$，$x\in D$.

4. 如果存在 $M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$ 对一切 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在，就称 $f(x)$ 在 X 上无界.

5. 如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使得当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限 (也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a)，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

极限不存在时，则称 $\{x_n\}$ 发散.

6. 如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\rightarrow x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

注　在此定义中，若将 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$，则 A 称为 $f(x)$ 当 $x\rightarrow x_0-0$ 时的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A$.

类似地可以定义右极限 $f(x_0+0)$.

7. 如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\rightarrow\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

读者可以自己给出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义.

8. 如果 $\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 是当 $x\rightarrow x_0$ 时的无穷大量，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$. 无穷大量简称为无穷大.

读者可以自己给出 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 等的定义.

注　当 $x\rightarrow x_0$ 和 $x\rightarrow\infty$ 结论都成立时，以后简记作“lim”. 以 0 为极限的量称为无穷小量. 无穷小量简称为无穷小.

9. 若 $\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=0$，且 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小，记作

$\alpha(x)=o(\beta(x))$. 若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$是 $\beta(x)$的低阶无穷小. 若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$ $(c\neq0)$，则称 $\alpha(x)$是 $\beta(x)$的同阶无穷小，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$；当 $c=1$ 时，称 $\alpha(x)$是 $\beta(x)$的等价无穷小，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

10. 函数最简单性态

(1) 若 $f(x)=f(-x)$，$x\in(-l,\ l)$，则称 $f(x)$为偶函数.

(2) 若 $f(x)=-f(-x)$，$x\in(-l,\ l)$，则称 $f(x)$为奇函数.

(3) 若 $f(x+T)=f(x)$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$，则称 $f(x)$为周期函数，使等式成立的最小的正 T 值称为周期.

(4) 若 $\forall x_1,\ x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$为 D 上的单调增加函数. 类似地可以定义单调减少函数.

(5) 如果存在 $M>0$，对任何 $x\in D$，均有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在 D 上有界，否则称为无界.

11. 若 $y=f(x)$在 x_0 处有 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$，此处 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，则称 $f(x)$在 x_0 处连续.

若记 $\Delta x=x-x_0$，则连续定义可以写成 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 不连续时称为间断.

12. 若 $f(x)$在 x_0 的某邻域内有定义（x_0 可以除外)，则具有下列条件之一者即为间断：

(1) $f(x)$在 x_0 处无定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

x_0 称为间断点. 具有左、右极限的间断点称为第一类间断点，否则称为第二类间断点. 极限存在的间断点称为可去间断点.

13. 符号函数：$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

14. 邻域 $U(a,\ \delta)=\{x\mid |x-a|<\delta,\ \delta>0\}$；

去心邻域 $\mathring{U}(a,\ \delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta,\ \delta>0\}$.

15. 基本初等函数与初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数称为基本初等函数；由常数和基本初等函数经过有限次四则运算及复合而得到的，且可用一个式子表示的函数称为初等函数.

16. 取整函数：设 x 为任一实数，则不超过 x 的最大整数称为 x 的取整函数，记为$[x]$.

17. 双曲函数：双曲正弦函数为 $\mathrm{sh}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$，双曲余弦函数为 $\mathrm{ch}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$，双曲正切函数为 $\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

(二) 主要结论

1. 若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则有

$$\lim[f(x)+g(x)]=A+B,$$

$$\lim[f(x)g(x)]=AB,$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0).$$

2. 极限存在准则

准则Ⅰ　单调有界数列必有极限.

准则Ⅱ　若 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

注　准则Ⅱ亦称夹逼准则，对于函数也成立.

3. 在同一变化过程中的有界变量与无穷小的乘积是无穷小；有限个无穷小的和是无穷小.

注　(1) 等价无穷小具有传递性：设 α，β，γ 为同一变化过程的无穷小，若 $\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$；

(2) 等价无穷小在求极限过程中可以进行如下替换：在同一极限过程中，若 $\alpha\sim\tilde{\alpha}$，$\beta\sim\tilde{\beta}$，且 $\lim\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}$ 存在，则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}$.

4. $\lim f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，此处 $\lim\alpha(x)=0$.

5. 两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

6. 若在 $\mathring{U}(x_0,\ \delta)$ 内 $f(x)\geqslant 0$ $(f(x)\leqslant 0)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么 $A\geqslant 0$ $(A\leqslant 0)$.

7. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$ $(A<0)$，则必有 $\mathring{U}(x_0,\ \delta)$，使在此邻域中 $f(x)>0$ $(f(x)<0)$.

注　若 $A=f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续，此时结论亦真.

8. 若极限存在，则其值必然唯一.

9. 初等函数在其定义区间上连续.

10. 闭区间上连续函数必然有下列性质：

(1) 有最大值与最小值；

(2) 有界；

(3) 满足介值定理，即任取介于最大值与最小值之间的数，必有与之相等的函数值；

(4) 满足零点定理，即若 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则必有 $\xi\in(a,\ b)$，使 $f(\xi)=0$.

(三) 结论补充

1. 若 $\lim\varphi(x)=0$，则 $\lim\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$.

2. 若 $\lim\varphi(x)=\infty$，则 $\lim\left[1+\frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$.

3. 若 $\lim\varphi(x)=0$，则 $\lim[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$.

注　以上三条中的 $\varphi(x)\neq 0$.

4. 当 $a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

6. 当 $x\to 0$ 时

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^{x}-1\sim\ln(1+x)\sim\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x},$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2},\quad \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x,\quad x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^{3},\quad a^{x}-1\sim x\ln a\ (a>0,\ a\neq 1).$$

注 由 $x\to 0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$ 立刻得到 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}$.

7. 若
$$\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=\lim A(x)=\lim B(x)=0,$$
且
$$\alpha(x)\sim A(x),\ \beta(x)\sim B(x),$$
则有
$$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{A(x)}{B(x)}$$
和
$$\lim[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\beta(x)}}=\lim[1+A(x)]^{\frac{1}{B(x)}}=e^{\lim\frac{A(x)}{B(x)}}.$$

注 分母 $\beta(x)$，$B(x)$ 不能取 0.

8. 不为零的无穷小的倒数为无穷大，无穷大的倒数为无穷小.

9. $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^{m}+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m}{b_0x^{n}+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n>m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$$

10. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right)^{hx+k}=e^{\frac{(b-c)h}{a}}.$$

11. 设 $\lim g(x)=B\neq 0$，则有
$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=B\lim f(x),\quad \lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{B}\lim f(x).$$

12. **海涅(Heine)定理** $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ 的充要条件是对任意数列 $\{u_n\}$ $(u_n\neq a,\ n=1,2,\cdots)$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(u_n)=b$.

13. 在同一极限过程中，若 $f(x)=o(g(x))$，则 $f(x)+g(x)\sim g(x)$.

14. 设 $y=f(x)$ 是连续函数，则 $y=|f(x)|$ 也是连续函数.

15. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是连续函数，则
$$\varphi(x)=\min\{f(x),\ g(x)\},\quad \psi(x)=\max\{f(x),\ g(x)\}$$
也都是连续函数.

二、归类解析

(一) 函数的简单性态

1. 函数的定义域

【例 1-1】 求 $f(x)=\sqrt{x+3}-\frac{1}{x^{2}-1}$ 的定义域.

【解】 $\begin{cases}x+3\geqslant 0,\\ x^{2}-1\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant -3,\\ x\neq\pm 1,\end{cases}$ 所以函数的定义域为 $x\geqslant -3$ 且 $x\neq\pm 1$.

【例 1-2】 求 $f(x)=\sqrt{x^{2}-4}+\arcsin\frac{x}{2}$ 的定义域.

【解】 $\begin{cases} x^2-4\geqslant 0, \\ -1\leqslant \dfrac{x}{2}\leqslant 1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x\geqslant 2 \text{ 或 } x\leqslant -2, \\ -2\leqslant x\leqslant 2, \end{cases}$ 所求函数的定义域为 $x=\pm 2$.

【例 1-3】 求 $f(x)=\arcsin\dfrac{x+2}{3}+\sqrt{\sin\pi x}$ 的定义域.

【解】 $\begin{cases} \left|\dfrac{x+2}{3}\right|\leqslant 1, \\ \sin\pi x\geqslant 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5\leqslant x\leqslant 1, \\ 2k\pi\leqslant \pi x\leqslant (2k+1)\pi \quad (k\in \mathbf{Z}) \end{cases}$, 故 $f(x)$ 的定义域为 $\{-5\}\cup[-4,-3]\cup[-2,-1]\cup[0,1]$.

2. 函数的求法

【例 1-4】 设 $f(t)=2t^2+\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{5}{t}+5t$, 证明 $f(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

【证】 $f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{2}{t^2}+2t^2+5t+\dfrac{5}{t}=f(t)$.

【例 1-5】 若 $f(x)=(x-1)^2$, $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$, 求

(1) $f(g(x))$; (2) $g(f(x))$; (3) $f(x^2)$; (4) $g(x-1)$.

【解】 (1) $f(g(x))=\left(\dfrac{1}{x+1}-1\right)^2=\left(\dfrac{1-x-1}{x+1}\right)^2=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2$;

(2) $g(f(x))=\dfrac{1}{(x-1)^2+1}=\dfrac{1}{x^2-2x+2}$;

(3) $f(x^2)=(x^2-1)^2$;

(4) $g(x-1)=\dfrac{1}{(x-1)+1}=\dfrac{1}{x}$.

【例 1-6】 设 $f(x)$ 满足关系式

$$2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{x+1}, \qquad ①$$

求 $f(x)$.

【解】 在所给方程中以 $\dfrac{1}{x}$ 替代 x, 得

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{1+2x}{x+x^2}, \qquad ②$$

以 $x^2\times$② $-2\times$①, 得 $$-3f(x)=\frac{-3x}{x+1},$$

从而 $$f(x)=\frac{x}{x+1}.$$

【例 1-7】 已知 $f(x)=\begin{cases} 1+x, & x<0, \\ 1, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

【解】 $$f(f(x))=\begin{cases} 1+f(x), & f(x)<0, \\ 1, & f(x)\geqslant 0. \end{cases}$$

先求 $f(x)\geqslant 0$ 及 $f(x)<0$ 的区域. 由 $f(x)\geqslant 0$, 得 $1+x\geqslant 0$, 于是 $x\geqslant -1$; 由 $f(x)<0$, 得 $1+x<0$, 于是 $x<-1$. 所以

$$f(f(x))=\begin{cases} 1+f(x), & x<-1, \\ 1, & x\geqslant -1. \end{cases}$$

又当 $x<-1$ 时, $f(x)=1+x$, 故

$$f(f(x))=\begin{cases}2+x, & x<-1,\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

【例 1-8】 欲做一容积为 $300\mathrm{m}^3$ 的无盖金属圆柱筒，筒底单位造价是筒壁单位造价的 2 倍，给出筒的总造价与半径的函数关系.

【解】 设周围单位造价为 a，则底面单位造价为 $2a$．设底面半径为 r，高为 h，则由已知条件有 $\pi r^2h=300$．设总造价为 y，则

$$y=2a\pi r^2+a\cdot 2\pi rh=2a\pi r^2+2a\pi r\cdot\frac{300}{\pi r^2}=2a\pi r^2+\frac{600a}{r}\quad (r\in(0,\ +\infty)).$$

3．函数的最简单性态

【例 1-9】 证明 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数.

【证】 $f(-x)=\log_a[-x+\sqrt{(-x)^2+1}]=\log_a\dfrac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}$,

化简后得
$$f(-x)=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x),$$
证毕.

【例 1-10】 证明 $f(x)=2^{x-1}$是单调增加函数.

【证】 取 $h>0$，有
$$f(x+h)-f(x)=2^{x+h-1}-2^{x-1}=2^{x-1}(2^h-1),$$
故
$$f(x+h)-f(x)>0,$$
即
$$f(x+h)>f(x),\quad x+h>x,$$
故 $f(x)=2^{x-1}$是单调增加函数.

【例 1-11】 求函数 $y=1+\cos\pi x$ 的周期.

【解】 余弦函数的周期为 2π，故 $\cos(\pi x+2\pi)=\cos\pi x$，即 $\cos\pi(x+2)=\cos\pi x$，从而函数 $y=1+\cos\pi x$ 的周期为 2.

(二) 函数的连续性

1．函数间断点的判定

【例 1-12】 讨论下列函数的连续性，如有间断点，指出其类型：

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x^2-x+1, & x>0.\end{cases}$$

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(2x+1)=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2-x+1)=1$，

而 $f(0)=0$，即$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1\neq f(0)$，故 $x=0$ 为函数的间断点，属于第一类间断点，可去型.

【例 1-13】 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}$的间断点类型.

【解】 当 $x=1$ 时，函数无定义，当 $x=0$ 时，函数也无定义，而函数在 $x=0$，$x=1$ 附近有定义，故 $x=0$，$x=1$ 是函数的间断点．因为

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}=+\infty,$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$的无穷间断点，属于第二类间断点．又因为

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}} = 0, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}} = 1,$$

故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点，属于第一类间断点.

【例 1-14】 求函数 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\leqslant 1,\\ |x-1|, & |x|>1\end{cases}$ 的连续区间.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}|x-1|=2$，$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0$，
故 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点，属于第一类间断点. 又因为

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\cos\frac{\pi x}{2}=0, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}|x-1|=0, \quad f(1)=\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续. 因此，函数的连续区间是 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

2. 利用连续性确定常数

【例 1-15】 当 a 取何值时，$f(x)=\begin{cases}a+x, & x\leqslant 0,\\ \cos x, & x>0\end{cases}$ 为连续函数?

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(a+x)=a$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1$，$f(0)=a$，
故 $a=1$ 时 $f(x)$ 连续.

【例 1-16】 设
$$f(x)=\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(a+b\sin x)}{\sin^2 x},$$
若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，试求 a，b 的值.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x=0$，若要函数在 $x=0$ 处有极限，必有

$$\lim_{x\to 0}[\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(a+b\sin x)]=0,$$

则 $1-a=0$，即 $a=1$. 将 $f(x)$ 的分子有理化，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x})^2-(1+b\sin x)^2}{\sin^2 x[\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}+(1+b\sin x)]}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(1-2b)\sin x+(1-b^2)\sin^2 x}{\sin^2 x[\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}+(1+b\sin x)]},\end{aligned}$$

若要极限存在，必有 $1-2b=0$，即 $b=\dfrac{1}{2}$.

【例 1-17】 设
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2}, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0,\end{cases}\quad (a>0)$$
问 a 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的连续点.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x}{x+2}=\dfrac{1}{2}$，

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})}=\frac{1}{2\sqrt{a}},$$

$$f(0)=\frac{1}{2},$$

故若要 $f(x)$ 连续，应有 $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2}$，即 $\sqrt{a}=1$，而 $a>0$，故 $a=1$.