国家工科数学课程教学基地系列改革教材

GUOJIA GONGKE SHUXUE KECHENG JIAOXUE JIDI XILIE GAIGE JIAOCAI

高等数学

GAODENG SHUXUE

上册

傅英定 钟守铭 主编

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据
高等数学. 上册 / 傅英定，钟守铭主编. —成都：电子科技大学出版社，2007.1 （2010.7 重印）
（国家工科数学课程教学基地系列改革教材）
ISBN 978－7－81114－382－9
Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①傅…②钟 …　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. 013
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 015110 号

国家工科数学课程教学基地系列改革教材

高 等 数 学

（上册）

傅英定　钟守铭　主编

出　　版：电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦 邮编：610051）
策划编辑：谢晓辉
责任编辑：谢晓辉　袁　野
主　　页：www.uestcp.com.cn
电子邮件：uestcp@uestcp.com.cn
发　　行：新华书店经销
印　　刷：成都金龙印务有限责任公司
成品尺寸：185mm×230mm　　印张　22.75　　字数　382 千字
版　　次：2008 年 2 月第 1 版
印　　次：2010 年 7 月第 7 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-81114-382-9
定　　价：29.80 元

内 容 提 要

本书是根据教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会于2004年最新颁发的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，按照电子科技大学“国家工科数学课程教学基地”系列改革教材《高等数学》的内容并遵循一般本科院校的特点而编写的。

本书分上、下两册。上册包括函数、极限与连续；一元函数微分学及其应用；一元函数积分法及其应用；微分方程。下册包括空间解析几何；多元函数微分学及其应用；多元函数积分学及其应用；无穷级数。每节配有A、B两类习题，每章后配有综合复习题，书末附有习题答案。

本书结构严谨，论证简明，叙述清晰，例题典型，便于自学。本书可作为一般本科院校学生使用的高等数学课程教材，也可作为大专层次和网络本科以及工科各类成人教育的高等数学课程教材或参考书。

前　言

本书是电子科技大学“国家工科数学课程教学基地”系列改革教材之一，是“基地”教学改革项目“关于提高大学数学课程的教学质量的研究”成果之一。

本书按照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会于 2004 年最新颁发的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，由电子科技大学长期工作在基础数学课程教学第一线且具有丰富教学经验的教师集体编写而成。本书的特色是：注重课程体系结构与教学内容的整体优化，着力于数学素质与能力的培养；充分重视培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力；以育人为本、学生为本、质量为本；突出数学思想与方法，适当淡化运算技巧；注重教学的适用性。

本书分为上、下两册，上册包括函数、极限与连续；一元函数微分学及其应用；一元函数积分法及其应用；微分方程。下册包括空间解析几何；多元函数微分学及其应用；多元函数积分学及其应用；无穷级数。每节配有 A、B 两类习题，每章后配有综合复习题，书末附有习题答案。

高等数学是大学理工科各专业的公共基础课程，在培养高素质科学技术人才中具有独特的、不可替代的重要作用。高等数学课程教学的基本要求，是工科院校本科生学习本课程应当达到的合格要求。根据近几年一般本科院校学生的特点，本书严格按照课程的基本要求编写，其高等数学的基础理论以必需、够用为度，以理解概念、强化应用、培养能力为重点。

本书知识的覆盖面在保持高等数学自身的系统性、逻辑性的基础上，与其他要求较高的本科高等数学相比，对难点作了一定的削减，尤其是对难度较大的部分基础理论，不作过多的严密证明。加强与实际应用联系较多的基础知识和基本方法。注重基本概念和运算的训练，不追求太多复杂的计算和较高技巧。

本书根据一般本科院校学生的实际情况，着重处理好如何理解一些本课程中的基本理论、重点和难点之间的关系。精选例题和习题，难易适度，具有启发性和典型性。文字叙述通俗易懂，深入浅出，详略得当，清晰流畅，便于自学。

本书学时数为 130～150 学时，少量带*号的内容可根据需要进行取舍。

本书可作为一般本科院校学生使用的高等数学课程教材，也可作为大专层次和网络本科以及各类成人教育的高等数学课程教材或参考书。

对于每节后的 A、B 两大类习题的使用，编者建议对大专层次和各类成人大专的学生，至少应完成 A 类习题及部分综合复习题；对一般本科院校学生及网络本科学生，应完成 A、B 两大类习题及各章综合复习题。

本书第一章、第四章、第五章由陈良均编写；第二章、第三章、第八章由傅英定编写；第六章、第十章由钟守铭编写；第七章、第九章由吕恕编写。

本书由傅英定、钟守铭主编。

本书经谢云荪教授主审，并认为这是一本适合一般本科院校学生、大专层次和网络本科以及各类成人教育学生使用的好教材。同时谢云荪教授也对本书提出了十分宝贵的意见和建议。本书的编写得到了电子科技大学应用数学学院、继续教育学院领导和应用数学学院全体老师的大力支持和帮助，在此编者一并表示衷心的感谢！

限于编者水平，书中难免有不妥之处，敬请批评指正。

编者

2007 年 2 月

目　录

第一章　函数、极限、连续

高等数学课程研究的内容包括一元函数及多元函数的微积分学、空间解析几何、无穷级数和微分方程. 因为主要内容为一元及多元函数的微积分学, 所以, 有时高等数学也称为微积分学.

初等数学研究的对象基本上是不变的量, 而高等数学研究的对象基本上都是变量, 贯穿高等数学的基本观点是变化的观点, 用变化的观点考虑问题, 认识事物. 函数是高等数学研究的基本对象, 它反映了变量之间的依赖关系. 极限理论是研究高等数学的基本工具. 本章主要讨论函数的概念、函数的极限和函数的连续性.

§1.1　函　　数

一、集合、区间与邻域

集合是近代数学最基本的概念之一, 读者在中学已经学过. 集合的创始人康托 (G. Gantor) 1897 年指出: "把一定的并且彼此可以明确识别的事物 (这种事物可以是直观的对象) 放在一起, 称为一个集合. " 比如, 一个教室里的学生构成一个集合, 某一批产品构成一个集合, 满足某种条件的全体实数构成一个集合等等. 一般地, 具有某种特定性质的, 并且可以彼此区别的事物的总体, 称为集合 (简称为集). 集合中的每一个事物称为集合的元素. 对于一个给定的集合, 集合中的元素是确定的、互异的. 任意取定一个事物, 对于某一集合, 我们能够判定它是否属于该集合, 即是否为该集合的元素.

集合通常用英文大写字母表示, 集合的元素通常用英文小写字母表示. 若某个元素 x 属于集合 A, 则记作 $x \in A$; 若某个元素 x 不属于集合 A, 则记作 $x \notin A$ 或 $x \overline{\in} A$.

全体自然数的集合记作 N，全体整数的集合记作 Z，全体有理数的集合记作 Q，全体实数的集合记作 R.

集合有两种表示法：

(1) 列举法：在大括号内列出全体元素，每个元素之间用逗号隔开. 例如，由有限个元素 a_1，a_2，…，a_n 组成的集合 A，可记作

$$A = \{ a_1, a_2, \cdots, a_n \}$$

只有一个元素 x_0 的集合称为单元素集，记成 $\{ x_0 \}$.

(2) 描述法：无法一一列举或者不需要一一列举它的元素的集合，可以在大括号内的左边写出元素的记号，右边写出元素满足的条件，中间用一直线隔开.

例　设集合 A 为方程 $x^2-5x+6 = 0$ 的全体实根所组成的集合，用列举法表示为 $A = \{ 2, 3 \}$，用描述法表示为

$$A = \{ x / x \in R, x^2-5x+6 = 0 \}.$$

例　xOy 平面上坐标适合方程 $x^2+4y^2 = 1$ 的点 (x, y) 的全体所组成的集合 M，可记作

$$M = \{ (x, y) \mid x, y \text{为实数}, x^2+4y^2 = 1 \}.$$

本书中常用的集合为数集，即元素是数的集合，除特别声明外，以后提到的数总是指实数. 常用的集合还有点集，即直线上、平面上或空间内具有某种性质的全体点所成的集合.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x\in A$，必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$（读作 A 包含于 B）或 $B\supset A$（读作 B 包含 A）.

如果集合 A、B 的元素相同，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

不含任何元素的集合称为空集，记作 ϕ. 例如

$$\{ x \mid x\in R, x^2+1 = 0 \} = \phi.$$

常用的实数集合是区间及邻域.

若实数 $a<b$，满足条件 $a<x<b$ 的全体实数所成的集合称为开区间，记作 (a, b)，即

$$(a, b) = \{ x \mid a<x<b \}.$$

满足条件 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数所成的集合称为闭区间，记作 $[a, b]$，即

$$[a, b] = \{ x \mid a\leqslant x\leqslant b \}.$$

类似地可以定义半开区间

$$[a,\ b)=\{\ x\mid a\leqslant x<b\ \},$$

$$(a,\ b]=\{\ x\mid a<x\leqslant b\ \}.$$

以上这些区间称为有限区间，数 $b-a$ 是这些区间的长，从数轴上看，$(a,\ b)$ 表示由点 a 到点 b 但不包括端 a，b 在内的线段.

还可以定义无限区间 $(-\infty,\ +\infty)$，$[a,\ +\infty)$，$(a,\ +\infty)$，$(-\infty,\ b)$，$(-\infty,\ b]$.

$$(-\infty,\ +\infty)=\{\ x\mid x\in R\ \},$$

$$[a,\ +\infty)=\{\ x\mid x\geqslant a\ \},$$

$$(a,\ +\infty)=\{\ x\mid x>a\ \},$$

$$(-\infty,\ b)=\{\ x\mid x<b\ \},$$

$$(-\infty,\ b]=\{\ x\mid x\leqslant b\ \}.$$

符号“∞”读作“无穷大”，“$+\infty$”读作“正无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷大”，它们都仅仅是记号，后面将会讲到.

有时我们要考虑一点 x_0 附近的所有点的集合，设 $\delta>0$，以 x_0 为中心的开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $N(x_0,\ \delta)$，点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径．即

$$N(x_0,\ \delta)=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)=\{\ x\mid |x-x_0|<\delta\ \}$$

有时需要考虑一点 x_0 的附近但不包括 x_0 在内的所有点的集合，即将 x_0 的邻域去掉中心，称为 x_0 的空心邻域，点 x_0 的空心邻域可以表示成

$$N(x_0,\delta)-\{x_0\}\ \text{或}\ \{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\},$$

$$\text{或}\ (x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta),$$

简记为

$$0<|x-x_0|<\delta.$$

二、函数的概念

我们在观察、研究某一现象或某一运动过程时，会遇到许多量，有的量保持不变，称为常量；有的量是变化的，称为变量．变量之间往往不是孤立的，而是相互依赖、相互制约的．相互依赖的变量之间的确定关系，在数学上就称为函数关系，下面先举三个例子.

例 1　观察一物体以初速度为零从 h 的高度自由落下到地面这一运动过程.

物体下落的时间 t 与下落的路 s 是两个变量，由物理学知道，s 与 t 满足下列关系，即

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$，称为重力加速度.

上式刻画了变量 t 与 s 之间的相互关系，其中 t 视为主动地变化，而 s 是由于 t 的变化而引起的变化. 当 $s=h$ 时，运动终止，终止时刻由上式可求得 $T=\sqrt{\frac{2h}{g}}$.
由此可见，当 t 从时刻 $t = 0$ 到时刻 $t = T$ 之间取某一值 t 时，路程 s 按照上式有确定值和它对应. t 的变化范围为 $0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{2h}{g}}$，$s$ 的变化范围为 $0\leqslant s\leqslant h$.

例 2　在每天下午定时观察仓库的某种规格的产品库存量，表 1.1 给出观察一周的结果.

表 1.1

第 t 天	1	2	3	4	5	6	7
库存量 W/吨	23.5	20	18	12	40	38	35.5

此表反映了变量 t 与库存量 W 的对应关系. 对于表中给出的 t 值（t 只能取 1，2，…，7），都有一个确定的 W 值与之对应. 例如 $t = 4$ 时，$W = 12$ 吨.

例 3　温度记录仪描绘了某地某天气温 T（℃）随时间 t（h）的变化范围是 $0\leqslant t\leqslant 24$. 对于这个范围内的每一时刻 t，都可以在图形上量出对应的气温 T 的值. 例如当 $t=3.5$h 时，$T=8$℃；当 $t=15$h 时，$T = 18$℃.

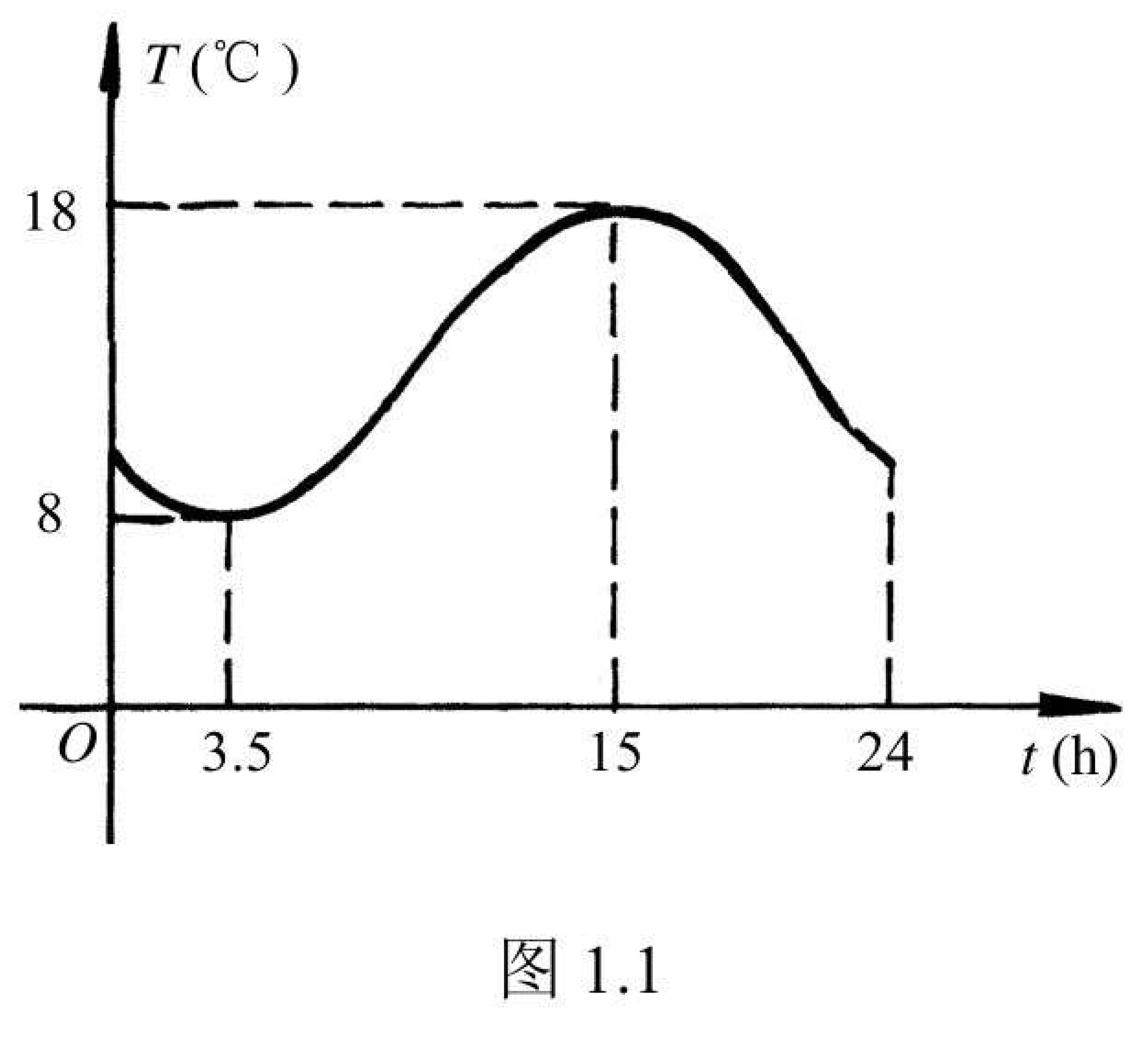

图 1.1

抽出上面例子中所考虑的量的实际意义，从数量关系的角度看，它们都有着共同的本质东西，即在变化过程中都有两个变量，变量之间存在某种对应关系，

当一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就按照同一规则有唯一确定的数值与之对应．因此，我们引入函数的定义．

定义 1　设 X 和 Y 为两个非空实数集，若存在某一对应规律（或法则）f，使得对于 X 中的任意一个数 x，Y 中都有唯一确定的实数 y 与它对应，则称 f 为定义在 X 上的函数，记为 f：$X \to Y$ 或简记为 $y = f(x)$．

x 称为自变量，y 称为因变量，习惯上也称 y（或 $f(x)$）为 x 的函数．自变量所能取值的范围 X，称为函数的定义域，记为 D_f，当 $x_0 \in D_f$ 时，与 x_0 对应的数值 $y_0 = f(x_0)$，称为函数值，所有函数值构成的集合 $Z_f = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\} \subset Y$，称为函数的值域．

在函数定义中，要求 x 有明确的取值范围 D_f，还要有确定的对应规律 f，通过它能唯一确定 y 的值，此时 x 和 y 之间才能构成一个函数关系．因此，定义域 D_f 和对应规律 f 是确定函数关系的两大要素，考查两个函数是否相等，只需研究定义域 D_f 和对应规律 f 是否相同即可．

例如　$f(x) = 1,\ x \in (-\infty, +\infty)$ 与 $g(x) = \dfrac{x}{x},\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 是不相同的函数；而 $f(x) = 1,\ x \in (-\infty, +\infty)$ 与 $h(x) = \sin^2 x + \cos^2 x,\ x \in (-\infty, +\infty)$ 是相同的函数．

在函数定义中，对 D_f 内任取一个确定数值 x 时，由 f 有唯一确定的 y 与之对应，这里强调“唯一确定”．如果对某一 $x \in D_f$，有两个 y 或两个以上的 y 与之对应，按照我们的定义就不是函数．但是为了方便起见，有时我们也称为多值函数，多值函数可以分成若干单值支来研究．例如反三角函数如 $y = \mathrm{Arcsin}\,x$ 就是多值的，若限定取主值（如 $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$）便是单值函数．在本书范围内，我们只讨论单值函数．

三、函数的表示法

1．表格法

在测量数据、实验结果、生产报表等实际应用中，变量之间的关系常把自变量的一系列值和对应函数值列成表格，表示变量之间的对应关系，这种方法称为

表格法．上面例 2 中的表，初等数学中的平方根表、三角函数表、对数表等等就是用表格法表示函数．它的优点是使用方便，便于查找，但是对应数值不完全，不便对函数的性态作进一步研究．

2．图示法

如果把 D_f，Z_f分别置于平面直角坐标系的横轴 Ox，纵轴 Oy 上，则称平面上点的集合

$$\{(x,y)\,|\,x\in D_f\subset R,\ y=f(x)\in Z_f\subset R\}$$

为函数 $y=f(x)$ 的图形．

这样表示函数的方法称为图示法．上面例 3 中的温度记录仪、气压记录仪、心电图等等就是把温度、气压、电位差记录成时间的函数．其优点是直观明显，能直接看出函数的变化情况，但不能进行准确的计算，也不便进行理论研究和推导．

3．公式法

变量之间的对应规律由公式直接给出，这样表示函数的方法称为公式法，也称为解析表示法．本书所讨论的函数，一般是用公式法表示的，它便于理论分析、推导与运算．

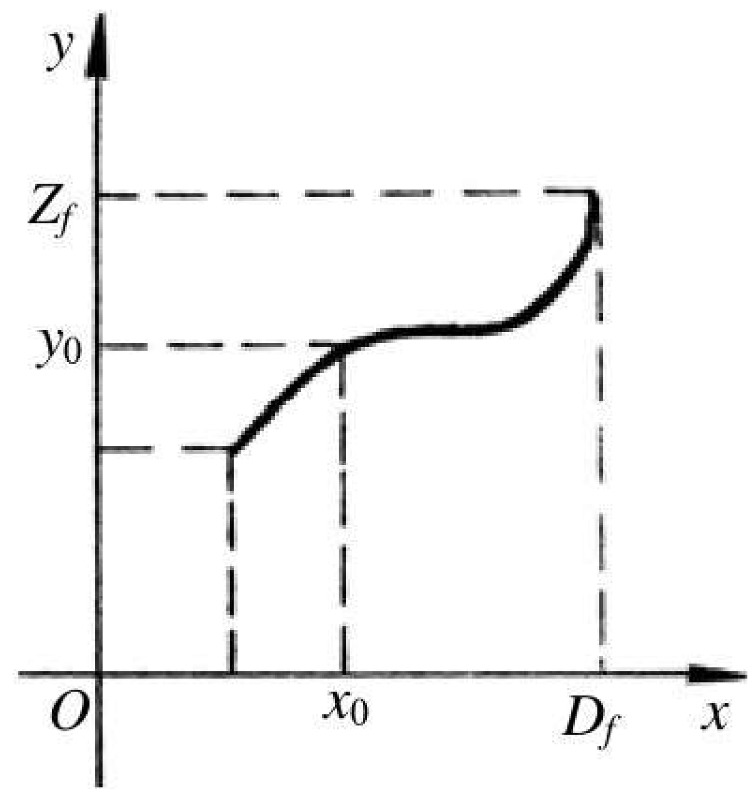

图 1.2

例 4　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

$D_f=(-\infty,\ +\infty)$，$Z_f=[0,\ +\infty)$，如图 1.3 所示．

如果一个函数在其定义域的不同子集上，用不同的解析式表示，这样的函数称为分段函数．如例 4．分段函数是一种很重要的函数，以后常常用到，下面再举几个分段函数的例子．

例 5　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$