數理統計問題詳解

曉園出版社
世界图书出版公司

3911 75/2 7

前　　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精徵的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

内 容 简 介

本书是 R. V. 霍格所著的《Int-oduction to Maihematical Statistics (4th-ed)》一书的习题详解. 本书思路清晰, 非常适合于自学.

数 理 统 计 问 题 详 解

R.V 霍格　原著

骆效宗　译著

晓　园　出　版　社　　　出版

世界图书出版公司北京分公司重印

(北京朝阳门内大街 137 号)

北 京 中 西 印 刷 厂 印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

1992 年 4 月　重印　　　开本　850×1168　1/32

1992 年 4 月第一次印刷　　印张　15.25

印数: 0,001—2,300

ISBN: 7-5062-1157・2/O・16

定价: 10·30 元

數理統計問題詳解

（目　錄）

第一章　隨機變數之分配

1.1 敍述下列各題隨機實驗的樣本空間$\mathscr{C}$，並由經驗（或直覺）上決定每一C事件的P值。

(a) 投一正常錢幣，C事件表出現反面。

(b) 擲一骰子,C事件表出現5點或6點。

(c) 從一組紙牌中抽一張，若抽出的是黑桃，則C事件發生。

(d) 在區間$(0,1)$中取一數，若此數小於$1/3$則C事件發生。

(e) 正方形之相對頂點爲$(1,1)$、$(-1,-1)$在正方形取一點。C事件爲此點之坐標和小於$1/2$。

解：(a) $C=\{H,T\}$,　　$P=\dfrac{1}{2}$

(b) $C=\{1,2,3,4,5,6\}$,　　$P=\dfrac{1}{3}$

(c) $C=\{S,H,D,C\}$,　　$P=\dfrac{1}{4}$

(d) $C=\{x;0\leq x\leq 1\}$,　　$P=\dfrac{1}{3}$

(e) $C=\{(x,y);-1\leq x\leq 1,-1\leq y\leq 1\}$,　$P=\dfrac{23}{32}$

1.2 由一固定圓的內部以隨意的方式取出點。問取出的點落在另一圓內的機率P應定爲多少？而此圓半徑爲第一個圓半徑之半且完全落於第一個圓內。

解：此二圓面積比爲$\pi\cdot(\frac{r}{2})^2:\pi\cdot r^2=1:4$。第一個圓爲樣本空間，依題意點的取出係隨意的，故機率P可定爲$\dfrac{1}{4}$。

1.3 一公正銅幣投擲兩次。試指定第一次投擲出現正面，第二次投

擲出現反面的事件的機率 P_1，試定在二次投擲中出現一次正面，一次反面的機率 P_2。

解：投擲出現正面記為"+"，出現反面記為"－"。
則投擲二次出現的狀況可為（+，－），（+，+），（－，－），（－，+）。

得知可定 $P_1=\dfrac{1}{4}$ ， $P_2=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$。

1.4 求下列兩集合 A_1 及 A_2 的交集 $A_1\cap A_2$ 與聯集 $A_1\cup A_2$

(a) $A_1=\{x\,;\,x=0,1,2\}$，$A_2=\{x\,;\,x=2,3,4\}$

(b) $A_1=\{x\,;\,0<x<2\}$，$A_2=\{x\,;\,1\leq x<3\}$

(c) $A_1=\{(x,y)\,;\,0<x<2,\ 0<y<2\}$，$A_2=\{(x,y)\,;\,1<x<3,\ 1<y<3\}$

解：(a) $A_1\cap A_2=\{x\,;\,x=2\}$

$A_1\cup A_2=\{x\,;\,0,1,2,3,4\}$

(b) $A_1\cup A_2=\{x\,;\,0<x<3\}$

$A_1\cap A_2=\{x\,;\,1\leq x<2\}$

(c) $A_1\cup A_2=\{(x,y)\,;\,0<x<3,\ 0<y<3\}$

$A_1\cap A_2=\{(x,y)\,;\,1<x<2,\ 1<y<2\}$

1.5 對全集 $\mathscr{A}$ 而論，求 A 集合的補集 A^*

(a) $\mathscr{A}=\{x\,;\,0<x<1\}$，$A=\{x\,;\,5/8\leq x<1\}$

(b) $\mathscr{A}=\{(x,y,z)\,;\,x^2+y^2+z^2\leq 1\}$，$A=\{(x,y,z)\,;\,x^2+y^2+z^2=1\}$

(c) $\mathscr{A}=\{(x,y)\,;\,|x|+|y|\leq 2\}$，$A=\{(x,y)\,;\,x^2+y^2<2\}$

解：(a) $A^*=\{x\,;\,0<x<\dfrac{5}{8}\}$

(b) $A^*=\{(x,y,z)\,;\,x^2+y^2+z^2<1\}$

(c) $A^*=\{(x,y)\,;\,|x|+|y|\leq 2,\ x^2+y^2\geq 2\}$

1.6 寫出m，a，r，y四字母的所有排列情形，並設A_1為y排末位的集合，A_2為m排首位的集合，求$A_1 \cup A_2$與$A_1 \cap A_2$

解：$A_1 = \{mary,\ mray,\ amry,\ army,\ ramy,\ rmay\}$

$A_2 = \{mary,\ mray,\ mayr,\ myra,\ myar,\ mrya\}$

$A_1 \cup A_2 = \{mary,\ mray,\ amry,\ mayr,\ army,\ myra,\ ramy,\ myar,\ rmay,\ mrya\}$

$A_1 \cap A_2 = \{mary,\ mray\}$

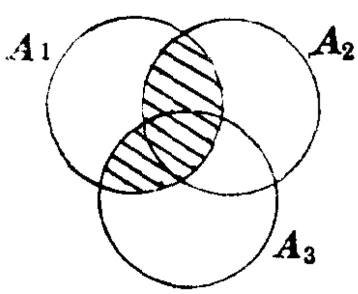
1.7 用$VENN$圖解比較下列集合。

(a) $A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$與$(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$

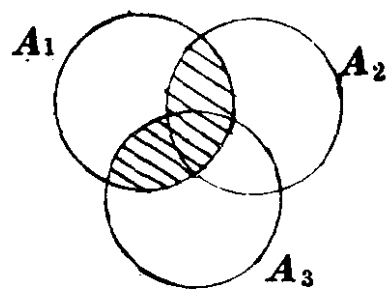
(b) $A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$與$(A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3)$

(c) $(A_1 \cup A_2)^*$與$A_1^* \cap A_2^*$　(d) $(A_1 \cap A_2)^*$與$A_1^* \cup A_2^*$

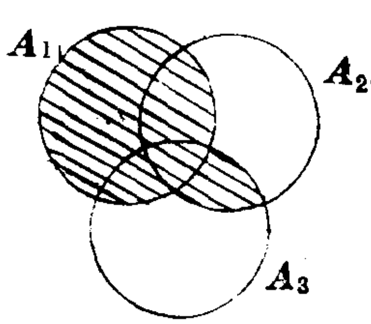
解：(a) $A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$



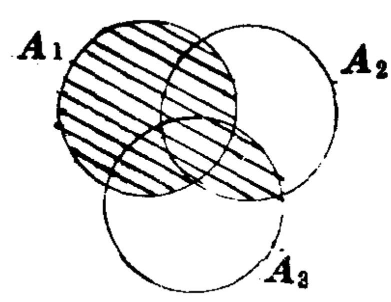
$(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$



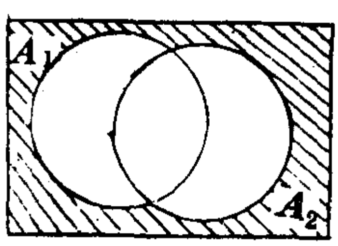
(b) $A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$



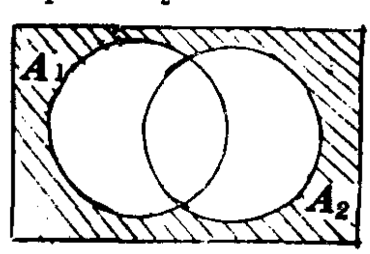
$(A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3)$



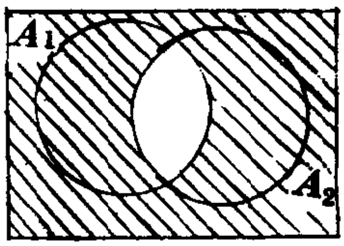
(c) $(A_1 \cup A_2)^*$

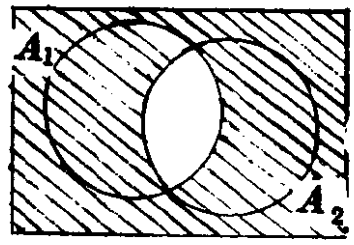


$A_1^* \cap A_2^*$



(d) $(A_1 \cap A_2)^*$ $A_1^* \cup A_2^*$





1.8 若集合序列 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots$ 滿足 $A_k \subset A_{k+1}$，$K=1, 2, 3, \cdots\cdots$，則此序列稱爲非遞減序列。試給一個此種集合序列的例子。

解：令 $A_n = \{x ; x \leq n, x \in N\}$ 此即爲所求。

1.9 若集合序列 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots$ 滿足 $A_k \supset A_{k+1}$，$K=1, 2, 3, \cdots\cdots$，則此序列稱爲非遞增序列。試給一個此種集合序列的例子。

解：令 $A_n = \{x ; x \geq n, x \in N\}$ 此即爲所求。

1.10 設 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots$ 爲集合而 $A_k < A_{k+1}$，$k=1, 2, 3, \cdots\cdots$ 並定 $\lim_{k\to\infty} A_k$ 爲 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots\cdots$，求 $\lim_{k\to\infty} A_k$ 若

(a) $A_k = \{x ; 1/k \leq x \leq 3 - 1/k\}$，$k=1, 2, 3, \cdots\cdots$

(b) $A_k = \{(x, y) ; 1/k \leq x^2 + y^2 \leq 4 - 1/k\}$，$k=1, 2, 3$

解：(a) $\{x ; 0 < x < 3\}$

(b) $\{(x, y) ; 0 < x^2 + y^2 < 4\}$

1.11 設 $A_1, A_2, A_3 \cdots\cdots$ 爲集合，而且 $A_k \supset A_{k+1}$，$k=1, 2, 3, \cdots$ 定 $\lim_{k\to\infty} A_k$ 爲 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots$ 求 $\lim_{k\to\infty} A_k$ 若

(a) $A_k = \{x ; 2 - 1/k < x \leq 2\}$，$k=1, 2, 3, \cdots\cdots$

(b) $A_k = \{x ; 2 < x < 2 + 1/k\}$，$k=1, 2, 3, \cdots\cdots$

(c) $A_k = \{(x, y) ; 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1/k\}$，$k=1, 2, 3, \cdots\cdots$

解：(a) $\{x ; x = 2\}$

(b) Null Set ϕ

(c) $\{(x, y); x^2+y^2=0\}$

1.12 對每個一度空間集合 A，設 $Q(A)=\sum_A f(x)$，其中 $f(x)=(\frac{2}{3})(\frac{1}{3})^x$，$x=0, 1, 2, \cdots\cdots$ 其他為 0，若 $A_1=\{x; x=0, 1, 2, 3\}$ 與 $A_2=\{x; x=0, 1, 2, \cdots\cdots\}$ 求 $Q(A_1)$ 與 $Q(A_2)$ 之值。

解：$Q(A_1)=\sum_{A_1} f(x)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=\frac{80}{81}$

$$Q(A_2)=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{2}{3})(\frac{1}{3})^k=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=1$$

1.13 設對每個一度空間集合 A，其積分為存在，設 $Q(A)=\int_A f(x)dx$，

其中 $f(x)=6x(1-x) \qquad 0<x<1$

$\qquad\quad =0 \qquad\qquad$ 其他

若 $A_1=\{x; \frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}\}$，$A_2$ $\{x; x=\frac{1}{2}\}$ 與 $A_3=\{x; 0<x<10\}$ 求 $Q(A_1)$，$Q(A_2)$ 與 $Q(A_3)$

解：$Q(A_1)=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 6x(1-x)\,dx$

$$=6\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} x\,dx-x^2\,dx=6\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}=\frac{11}{16}$$

$$Q(A_2)=d(6x-6x^2)/\ x=\frac{1}{2}=6-12x\ |\ x=\frac{1}{2}=0$$

$$Q(A_3)=\int_0^1 6x(1-x)\,dx=6\cdot\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=1$$

1.14 A 為一度空間集合，設 $Q(A)$ 等於集合 A 中正整數的個數，若 $A_1=\{x; x$ 為 3 的倍數而小於或等於 $50\}$ 與 $A_2=\{x; x$ 為 7

的倍數而小於或等於 $50\}$，求 $Q(A_1)$, $Q(A_2)$, $Q(A_1 \cup A_2)$ 與 $Q(A_1 \cap A_2)$ 並證明 $Q(A_1 \cup A_2) = Q(A_1) + Q(A_2) - Q(A_1 \cap A_2)$

解：$Q(A_1) = 16$, $\quad Q(A_2) = 7$

$Q(A_1 \cup A_2) = 21$, $Q(A_1 \cap A_2) = 2$

$Q(A_1) + Q(A_2) - Q(A_1 \cap A_2) = 16 + 7 - 2 = 21$

故 $Q(A_1 \cup A_2) = Q(A_1) + Q(A_2) - Q(A_1 \cap A_2)$

1.15 A 爲二度空間集合，設 $Q(A)$ 等於 A 中點 (x, y),其 x，y 均爲正整數的個數，若 $A_1 = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 4\}$ 與 $A_2 = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 9\}$，求 $Q(A_1)$ 與 $Q(A_2)$ 之值，注意 $A_1 \subset A_2$ 及 $Q(A_1) \leq Q(A_2)$。

解：$Q(A_1) = 1$

$Q(A_2) = 4$

1.16 設 $Q(A) = \int_A \int (x^2 + y^2)\, dx dy$，並其中 A 爲二度空間集合且其積分存在。若 $A_1 = \{(x, y); -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$，$A_2 = \{(x, y); -1 \leq x = y \leq 1\}$ 與 $A_3 = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$ 求 $Q(A_1)$, $Q(A_2)$ 與 $Q(A_3)$ 之值。

解：$Q(A_1) = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (x^2 + y^2)\, dx dy$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{3} + 2y^2\right) dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{2}{3}\, dy + 2y^2\, dy$$

$$= \frac{2}{3}\left[y\right]_{-1}^{1} + 2\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

$Q(A_2) = 0$

$Q(A_3) = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \int_{c}^{\sqrt{1-n^2}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi.$$

1.17 $\mathscr{A}$係落在對頂爲（0，0），（1，1）的正方形的內部或邊界的點所成集合。令 $Q(A) = \int_A \int dy\,dx$

(a)若 $A \subset \mathscr{A}$，用 $A = \{(x, y);\ 0 < x < y < 1\}$，計算 $Q(A)$。

(b)若 $A \subset \mathscr{A}$ 而 $A = \{(x, y);\ 0 < x = y < 1\}$，計算 $Q(A)$。

(c)若 $A \subset \mathscr{A}$ 而 $A = \{(x, y);\ 0 < x/2 \le y \le 3x/2 < 1\}$，計算 $Q(A)$。

解：(a) $A = \{(x, y);\ 0 < x < y < 1\}$

$$\text{則 } Q(A) = \int_0^1 \int_0^y dx\,dy = \int_0^1 y\,dy$$

$$= \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

(b) $A = \{(x, y);\ 0 < x = y < 1\}$

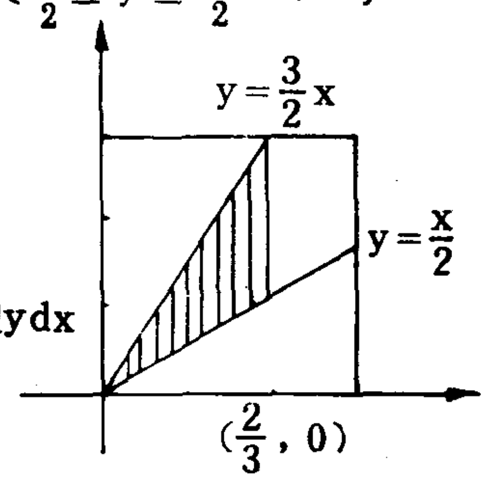
$$\text{則 } Q(A) = \int_0^1 \int_y^y dx\,dy$$

$$= \int_0^1 0\,dy = 0$$

(c)．$A = \{(x, y);\ 0 < \frac{x}{2} \le y \le \frac{3x}{2} < 1\}$

A集合的圖示如右

$\left(\frac{3}{2}x < 1 \Rightarrow x < \frac{2}{3}\right)$



$$\text{則 } Q(A) = \int_0^{\frac{2}{3}} \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{3x}{2}} dy\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{2}{3}} x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{9}$$

1.18 $\mathscr{A}$係落在正方體內部或邊界上的點所成集合。該正方體位於第一卦限，一頂點爲（0，0，0）及其對頂爲（1，1，1）。令 $Q(A) = \iiint\limits_A dxdydz$ 。

(a)若 $A \subset \mathscr{A}$，而 $A = \{(x, y, z); 0 < x < y < z < 1\}$，計算 $Q(A)$

(b)令 A 爲部分集合 $\{(x, y, z); 0 < x = y = z < 1\}$，計算 $Q(A)$

解：(a) $A = \{(x, y, z); 0 < x < y < z < 1\}$

$$Q(A) = \int_0^1 \int_0^z \int_0^y dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^z y\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1 \frac{z^2}{2}\,dz$$

$$= \frac{z^3}{6} \int_0^1 = \frac{1}{6}$$

(b) $A = \{(x, y, z); 0 < x = y = z < 1\}$

$$Q(A) = \int_0^1 \int_z^z \int_y^y dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1 \int_z^z 0\,dy\,dz = 0$$

1.19 令A表示集合 $\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$，計算 $Q(A) = \iiint\limits_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz$ 提示：用球座標來變換變數。

解：令 $z=\gamma\cos\varphi$ ，$0\leq\varphi\leq\pi$ ，$0\leq\theta<2\pi$ ，

$0\leq\gamma\leq 1$ ，

$$y=\gamma\sin\varphi\cos\theta$$

$$x=\gamma\sin\varphi\sin\theta$$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\gamma \quad , \quad |J|=\gamma^2\sin\varphi$$

$$Q_A=\iiint_A\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r\cdot r^2\sin\varphi\,d\gamma\,d\varphi\,d\theta$$

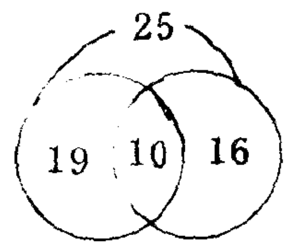
$$=\int_0^1 r^3dr^3\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\left(\frac{\gamma^4}{4}\Bigg|_0^1\right)\left(-\cos\varphi\Bigg|_0^{\pi}\right)\left(\theta\Bigg|_0^{2\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times 2\times 2\pi=\pi$$

1.20 設某一個俱樂部，其中會員爲統計學家、數學家，或二者兼有，今有一個 *25* 人組成的俱樂部其中有 *19* 位統計學家，*16* 位數學家，請問有多少位是數學家兼統計學家。

解： 16＋19－25＝10（位）



1.21 在一次苦戰足球賽後，有下列報告，在十一位與賽者中，八位傷及臀部，六位傷及手臂，五位傷及膝部，其中三位臂與臀均傷，兩位傷及臀與膝，一位傷及臂與膝，而無人各部分均受傷。用集合符號表示上面之報告。

解：A 表傷及臀部之人　所成之集合

B 表傷及手臂之人　所成之集合

C 表傷及膝部之人　所成之集合

則 $n(A)=8$　$n(B)=6$　$n(C)=5$

且 $n(A\cap B)=3$ $n(A\cap C)=2$

$n(B\cap C)=1$ $n(A\cap B\cap C)=0$

未受傷者爲 N(全體人數)$-n(A)-n(B)-n(C)$

$+n(A\cap B)+n(B\cap C)$

$+n(A\cap C)-n(A\cap B\cap C)$

$=11-8-6-5+3+2+1=-2$(矛盾)

所以此報告不正確

1.22 投一骰子則可能結果爲正整數 1 至 6 中之一數，因此其樣本空間 $\mathscr{C}$ 中元素爲 $1,2,3,4,5,6$, 設 $C_1=\{c;c=1,2,3,4\}$ $C_2=\{c;c=3,4,5,6\}$ 若每一元素 C 的機率 $P=\frac{1}{6}$，求 $P(C_1)$ $P(C_2)$ 與 $P(C_1\cap C_2)$，$P(C_1\cup C_2)$ 之值。

解：$P(C_1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$， $P(C_2)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$P(C_1\cap C_2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$， $P(C_1\cup C_2)=1$

1.23 從一副牌 52 張中抽一張爲一隨機實驗，設機率集合函數 P 每一可能結果之機率爲 $\frac{1}{52}$, 若 C_1 表 13 張紅心的集合，C_2 表 4 張 K 的集合。求 $P(C_1)$, $P(C_2)$, $P(C_1\cap C_2)$ 與 $P(C_1\cup C_2)$ 之值。

解：$P(C_1)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$， $P(C_2)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$

$P(C_1\cap C_2)=\frac{1}{52}$， $P(C_1\cup C_2)=\frac{16}{52}=\frac{4}{13}$

1.24 若重複投一錢幣直到出現正面爲止，則樣本空間 $\mathscr{C}$ 中元素 C 爲 H, TH, TTH, $TTTH$, 等等，其機率依次設爲 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，…… 證明 $P(\mathscr{C})=1$, 若 $C_1=\{c;c$ 是 H, TH, TTH 或 $TTTH\}$ 求 $P(C_1)$ 之值，若 $C_2=\{c;c$ 是 $TTTTH$ 或 $TTTTTH\}$ 求 P

(C_2)，$P(C_1\cap C_2)$與$P(C_1\cup C_2)$之值。

解：$P(c)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

$$P(C_1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$$

$$P(C_2)=\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{3}{64}$$

$$P(C_1\cap C_2)=\frac{1}{32}$$

$$P(C_1\cup C_2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$$

1.25 若$\mathscr{C}=C_1\cup C_2$，且$P(C_1)=0.8$，$P(C_2)=0.5$，求$P(C_1\cap C_2)$之值。

解：因$P(C_1\cup C_2)=P(C_1)+P(C_2)-P(C_1\cap C_2)$

$$1=0.8+0.5-x$$

$\therefore x=0.3$

$P(C_1\cap C_2)=0.3$

1.26 樣本空間爲$\mathscr{C}=\{C;0<C<\infty\}$。$C\subset\mathscr{C}$而$C=\{C;4<C<\infty\}$且取$P(C)=\int_c e^{-x}dx$。計算$P(C)$，$P(C^*)$，$P(C\cup C^*)$

解：(1) $P(C)=\int_4^\infty e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_4^\infty=e^{-4}$

(2)由定理1知 $P(C)=1-P(C^*)$

$$e^{-4}=1-P(C^*)$$

$$\therefore P(C^*)=1-e^{-4}$$

(3)由定理2知 $P(C\cap C^*)=P(\phi)=0$

由定理5知 $P(C\cup C^*)=P(C)+P(C^*)$

$$
\begin{aligned}
&-P(C\cap C^{*})\\
&=e^{-4}+(1-e^{-4})-0\\
&=1
\end{aligned}
$$

1.27 樣本空間爲 $\mathscr{C}=\{C\,;-\infty<C<\infty\}$，若 $C\subset\mathscr{C}$ 且 $\int_{C}e^{-|x|}dx$ 積分存在，試證此集合函數不爲機率集合函數。我們該在此積分乘上何常數使其爲機率集合函數。

解：(i) $\int_{\mathscr{C}}e^{-|x|}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}dx$

$$
\begin{aligned}
&=\int_{-\infty}^{0}e^{x}\,dx+\int_{0}^{\infty}e^{-x}\,dx\\
&=e^{x}\Big|_{\infty}^{0}-e^{-x}\Big|_{0}^{\infty}=1-(-1)\\
&=2
\end{aligned}
$$

若此集合函數爲機率集合函數，則 $P(\mathscr{C})=1$，和上式矛盾，知其不爲機率函數。

(ii)於此積分乘上 $\frac{1}{2}$ 即爲機率集合函數，$\frac{1}{2}\int_{C}e^{-|x|}dx=P(C)$

(1) $e^{-|x|}>0$，由積分性質知 $P(C)=\frac{1}{2}\int_{C}e^{-|x|}dx\geq 0$

(2)若 $C_i\cap C_j=\phi$，$i\neq j$ 時，由積分性質知
$P(C_1\cup C_2\cup C_3\cup\cdots\cdots)=P(C_1)+P(C_2)+P(C_3)+\cdots\cdots\cdots$

(3) $P(\mathscr{C})=\frac{1}{2}\int_{\mathscr{C}}e^{-|x|}dx=1$

知如此定義的 $P(C)$ 爲機率集合函數。

1.28 若 C_1, C_2 爲 $\mathscr{C}$ 之子集，證明 $P(C_1\cap C_2)\leq P(C_1)\leq P(C_1\cup C_2)\leq P(C_1)+P(C_2)$

證：$C_1 \subset \mathscr{C}$，$C_2 \subset \mathscr{C}$

因 $(C_1 \cap C_2) \subset C_1 \subset (C_1 \cup C_2)$

故 $P(C_1 \cap C_2) \leq P(C_1) \leq P(C_1 \cup C_2)$ (1)

又 $P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2)$

因 $P(C_1 \cap C_2) \geqslant 0$

故 $P(C_1) + P(C_2) \geqslant P(C_1 \cup C_2)$ (2)

由(1)(2)得 $P(C_1 \cap C_2) \leqslant P(C_1) \leqslant P(C_1 \cup C_2)$

$\leq P(C_1) + P(C_2)$

1.29 設 C_1, C_2, C_3 爲 $\mathscr{C}$ 中三個互離子集，求 $P[(C_1 \cup C_2) \cap C_3]$ 與 $P(C_1^* \cup C_2^*)$ 之値。

解：因 $(C_1 \cup C_2) \cap C_3 = (C_1 \cap C_3) \cup (C_2 \cap C_3)$

由假設知 $P[(C_1 \cup C_2) \cap C_3]$

$= P[(C_1 \cap C_3) \cup (C_2 \cap C_3)]$

$= P(C_1 \cap C_3) + P(C_2 \cap C_3) = 0$

$\because C_1 \cap C_3 = \phi$

$C_2 \cap C_3 = \phi$

因 $C_1^* \cup C_2^* = (C_1 \cap C_2)^*$

故 $P(C_1^* \cup C_2^*) = P[(C_1 \cap C_2)^*]$

$= 1 - P(C_1 \cap C_2)$

$= 1 - P(\phi) = 1$

1.30 設 C_1, C_2, C_3 爲 $\mathscr{C}$ 之三子集，證明

$P(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) - P(C_1 \cap C_2) - P(C_1 \cap C_3) - P(C_2 \cap C_3) + P(C_1 \cap C_2 \cap C_3)$

並求 $\mathscr{C}$ 的四個或更多子集之聯集之機率爲何？

〔提示：$P(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = P[(C_1 \cup C_2) \cup C_3)]$，並利用定理5〕

解：$P[(C_1 \cup C_2) \cup C_3]$

$= P(C_1 \cup C_2) + P(C_3) - P[(C_1 \cup C_2) \cap C_3]$