

中心解題
算術辭典

薛德炯 吳毅耀 編譯

上海科學技術出版社

中国书画函授大学

美术专业

函授教材

0

50

001363610

题解中心

算 术 辞 典

〔日本〕长泽龟之助 原著
薛德炯 吴载耀 编译

贵阳学院图书馆



GYXY1363610

0013838100

02

内 容 提 要

本书为“数学辞典”的第一册，内容分解法之部，名词之部，算术小史三门，解法门又分为数，数的应用，数性，比例，成数算法，开方，类聚一，类聚二，类聚三，理化学应用等十部，分门别类，载有题解 5、284 题，附录英汉名词对照表，平方立方表，对数表，复利表，度量衡表，货币表等等，全书约计 1,659 千字。

本书出版于 1935 年，内容不尽正确，但为了目前各方面有需要，仍以旧版重印，供各地中小学教师作备课时的参考。

题 解 中 心

算 术 辞 典

〔日本〕长泽龟之助 原著

薛德炯 吴载耀 编译

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 43.5 插页 4 字数 1,650,000

1959 年 11 月新 1 版 1981 年 8 月第 3 次印刷

印数：21,001—236,000

统一书号：17119·7 定价：(科五) 5.55 元

限 国 内 发 行

目 录

第一门 解法之部.....1—1123

部 I. 数1—106

- 类 1. 整数1—53
- 类 2. 分数53—84
- 类 3. 小数84—101
- 类 4. 杂题101—106

部 II. 数之应用107—247

- 类 1. 整数之应用107—172
- 类 2. 分数之应用172—242
- 类 3. 小数之应用242—247

部 III. 类聚一.....248—338

- 类 1. 还元248—253
- 类 2. 和与差253—268
- 类 3. 和一定268—271
- 类 4. 差一定271—279
- 类 5. 年龄279—286
- 类 6. 龟鹤算法286—298
- 类 7. 过不足298—308
- 类 8. 车轮308—310
- 类 9. 正方形310—320
- 类10. 矩形320—330
- 类11. 正方形与矩形330—332
- 类12. 历332—338

部 IV. 数性339—437

- 类 1. 整数之性质339—382
- 类 2. 整数性质之应用382—387

类 3. 公约数387—392

类 4. 公约数之应用392—395

类 5. 公倍数396—400

类 6. 公倍数之应用400—412

类 7. 公约数公倍数杂题412—418

类 8. 数字418—437

部 V. 类聚二438—579

- 类 1. 相遇及追及438—488
- 类 2. 時計488—513
- 类 3. 竞走, 竞漕513—521
- 类 4. 环行521—533
- 类 5. 工作533—551
- 类 6. 水管551—558
- 类 7. 寒暑表558—560
- 类 8. 牛顿问题560—565
- 类 9. 诸等数565—575
- 类 10. 标准时576—579

部 VI. 比例580—746

- 类 1. 比580—602
- 类 2. 单比例602—635
- 类 3. 复比例635—662
- 类 4. 连锁法662—673
- 类 5. 配分法673—714
- 类 6. 混合法714—746

部 VII. 成数算法747—893

- 类 1. 成数747—760
- 类 2. 损益760—798

类 3. 佣钱	798—802
类 4. 保险	802—808
类 5. 租税	808—816
类 6. 利息	816—847
类 7. 分期偿还	847—857
类 8. 折扣	857—863
类 9. 公债, 股票	863—884
类10. 汇兑	884—888
类11. 平均日期	888—891
类12. 年金	891—893

部 VIII. 开方894—920

类 1. 开平方	894—896
类 2. 开平方应用	896—902
类 3. 直角三角形	902—914
类 4. 和与积等	914—916
类 5. 开立方	916—920
类 6. 开方杂题	920

部 IX. 类聚三921—1060

类 1. 级数	921—945
类 2. 求积	945—985
类 3. 记数法	985—994
类 4. 式题	994—1004
类 5. 省略算	1005—1051
类 6. 对数	1051—1055
类 7. 计子术	1055—1058
类 8. 思维问题	1058—1060

部 X. 理化学应用 ...1061—1123

类 1. 物理算术	1061—1106
类 2. 化学算术	1106—1123

第二门 名词之部1125—1232

附录一 英汉名词对照	1233—1247
------------	-----------

第三门 算术小史之部1249—1302

A. 总论	1249—1251
B. 第一期 (由古代诸种族至阿剌伯时代之算术)	1251—1260
C. 第二期 (由第八世纪至第十四世纪)	1260—1268
D. 第三期 (由第十五世纪至第十九世纪)	1268—1282
E. 算学家年表	1282—1302

附录二1303—1360

某月至某月间之日数表	1303
阶乘·海面上之 G 值	1304
平方立方表	1305—1322
对数表	1323—1340
复利表	1341—1342
复利现价表	1343
复利年金终价表	1314
复利年金现价表	1345
复利年赋金表	1346
日给月计表·圆周与圆面积	1347
日息年利比较表·正多角形	1348
正多面体·数字之读法 I—II	1349
度量衡	1350—1357
各国货币	1357
英尺与米突尺(公尺)比较	1359
75至10000之非质数之因数	1359—1360
经度一度之哩数表	1360

算 術 辭 典

第 一 門 解 法 之 部

部 I. 數

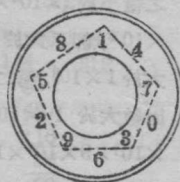
類 I. 整 數

A. 加 減

1. 由 1000 減 175, 加 172, 再減 175, 加 172, 如是連續行之, 則自始計之, 減至幾回後, 不能再減?

【圖】減以 175, 加 172, 其結果即減以 $175 - 172 = 3$. 如是每行一回, 即以 3 減一回. 據此, 省去最後之減數 175, 得 $1000 - 175 = 825$, 除以 3, 得商 275, 無剩餘. 故減以 175, 加 172, 行至 275 回, 則得餘數 175. 因此減至 $275 + 1$, 即 **276** 回, 則全盡.

2. 試藉所示圖之助, 由 100 迅速累減 7, 以求最後之結果. 又試由 1000 分別累減 9, 8, 6, 及 5 時, 如何? [此圖之效用, 乃在累加較 9 小之同數時, 可徑知所得數之末位數字. 例如累加 3 於 12 時, 得 12, 15, 18, 21, 24,



27, …… , 其末位數字, 可依順時計向由此圖形取得之. 又如累加 4 於 12, 則得 12, 16, 20, 24, 28, 32, …… , 其末位數字可依反時計向, 由此圖形一間一取得之. 總之, 在累加或累減同數之際, 其所得第三, 第四, 等數之末位數字, 可準照所得最初二數, 依順時計向或反時計向, 由此圖形, 間若干字而求得之.]

【圖】由某數減 7 時所得之末位數字, 等於加 3 時所得之末位數字; 何則, 減以 7, 等於減以 10 而更加 3 故也. 據此, 因 100 之末位為 0, 故可由 0 處始, 依順時計向計之. 即為 93, 86, 79, 72, 65, 58, 51, 44, 37, 30, 23, 16, 9, 2. 但單求最後之結果時, 則因由 100 減 7×10 得 30, 故可由 30 始, 由 100 累減 9 時, 則可由 $100 - 9 \times 10 = 10$ 始, 而得 1; 累減 8 時, 則因等於加 2, 故可由 0 始, 依順時計向就外部一間一取之, 而得 $100 - 8 \times 10 = 20$, 12, 4; 累減 6 時, 可由 0 始依反時計向就外部依次取之, 而得 $100 - 6 \times 10 = 40$, 34, 28, 22, 16, 10, 4; 累減 5 時, 極為簡單, 不必用此圖. 但若特別須用此圖, 則因此圖依次各數, 係依次加 3 而得者, 故由 $3 \times 5 = 15$ 可知

5 爲 0 下第 5 數字，即 0 下隔去四字取得者，故所求末位數字爲 $100 - 5 \times 10 = 50$, 45, 40, 35, ……，0。

3. 被減數或減數，加以任意數或減以任意數，則差之變動如何？

圖 被減數增以任意數或減以任意數，則差亦以同數增減，又若減數增以任意數或減以任意數，則差亦以同數減增。何則，因兩數之差者，乃被減數超過減數之數，故被減數若有增減，則其超過減數之數，亦生同數之增減，反之，減數若有增減，則減數較被減數不足之數，亦生同數之減增。故如前述。

例題 本題若以代數記號表之，則更簡明。即設 $a - b = d$ ，則 $(a \pm x) - b = (a - b) \pm x$ 及 $a - (b \pm x) = (a - b) \mp x$ 。

B. 乘積

4. 設以 14 及 25 爲甲乙二因數作積，若甲因數加 3，乙因數加 7，則積生若何之變化？

圖 二因數之積爲 14×25 ，今 $(14 + 3) \times (25 + 7) = (14 + 3) \times 25 + (14 + 3) \times 7$ [分配律] $= (14 \times 25 + 3 \times 25) + (14 \times 7 + 3 \times 7) = 14 \times 25 + (14 \times 7 + 25 \times 3 + 3 \times 7)$ ，即甲乙二因數之積增加，所增加者爲甲因數之 7 倍，乙因數之 3 倍，與 3×7 之和。

5. 設以 12 及 27 爲甲乙二因數作積，若由甲因數減 3，由乙因數減 7，則積發生若何之變化？

圖 甲乙二因數之積爲 12×27 ，今 $(12 - 3) \times (27 - 7) = (12 - 3) \times 27 - (12 - 3) \times 7$ [分配律] $= (12 \times 27 - 3 \times 27) - (12 \times 7 - 3 \times 7)$

$\times 7) = 12 \times 27 - 3 \times 27 - 12 \times 7 + 3 \times 7$ [組合律] $= 12 \times 27 - (27 \times 3 + 12 \times 7 - 3 \times 7)$ ，即甲乙二因數之積減小，所減小者爲乙數之 3 倍，甲數之 7 倍之和與 3×7 之差。

6. 右圖示乘法之演算，△處

之數字未明，然則△處之數字

如何？

圖 乘數中之未明數字須

爲 8 或 9。何則，若命之爲 7，則縱令 $500 \times 7 = 3500$ ，亦小於 3600 故也。茲先命之爲 8。因 $400 \times 8 = 3200$ ， $5 \times 8 = 400$ ，故被

(1) (2) 乘數之十位數字當爲 5 以

上。命之爲 5，則 50×30

$= 1500$ ， $7 \times 30 = 210$ ，故

被乘數之末位，須爲 7 以

上。故如上得 (1) 式爲解答

之一。又設被乘數之末位數字爲 8，則得

(2) 式。次，設被乘數之十位數字爲 6，而以

0 或 9 爲其末位數字，則 $460 \times 30 = 13800$ ，

或 $469 \times 30 = 14070$ ，又 46×30 之各種百

位數字，不能外於 8, 9 或 0。故所求之解

答爲 (1) 式。

7. $123456789 \times 987654321 \times 192837465$ 爲幾位數？

圖 第一因數小於 2×10^8 ，第二因數小於 99×10^7 ，第三因數小於 2×10^8 ，故三因數之積小於 $2 \times 10^8 \times 99 \times 10^7 \times 2 \times 10^8 = 396 \times 10^{23}$ ，即不大於 26 位之數。又第一因數大於 1×10^8 ，第二因數大於 9×10^7 ，第三因數大於 19×10^7 。故三因數之積大於 $1 \times 10^8 \times 9 \times 10^7 \times 19 \times 10^7 = 171 \times 10^{23}$ ，即不小於 26 位之數。故所求之位數爲 26。

3. 785626 乘以 85672 時,得部分積五個,若欲令其成三個部分積,當用何法?

圖 因 $56 = 8 \times 7$, $72 = 8 \times 9$, 故欲求被乘

$$\begin{array}{r} 785626 \\ 85672 \\ \hline 6285093 \\ 43995056 \\ 56565072 \\ 67306150672 \end{array}$$

數與 72 之積,可求被乘數與 8 之積之 9 倍。又欲求被乘數與 56 之積可求被乘數與 8 之積之 7 倍。故其運算,如上所示。

C. 除 商

9. 除法中若剩餘較商大,則其除數增 1,而商不變。試證之。

圖 今設‘剩餘 = 商 + 甲’,則‘被除數 = 除數 $\times$ 商 + 剩餘 = 除數 $\times$ 商 + 商 + 甲 = (除數 + 1) $\times$ 商 + 甲’,而剩餘較除數小,故較剩餘小之甲,小於較除數大之‘除數 + 1’。故加 1 於除數而除時,其商等於原商。

10. 除法中以同數乘除數及被除數時,其商不變,而剩餘等於原剩餘乘以同數所得之積。試證之。

圖 1. 例如設除法 (1) 及 (2) 中,除法 (2) 之除數及被除數為以同數 4 乘除法 (1) 之除數及被除數所得者。茲比較之,即可知各部分除法中之除數,被除數,及部分積,在 (2) 中者俱為在 (1) 中者之 4 倍,從而剩餘亦增大 4 倍,而商無變化。

(1)

(2)

$$\begin{array}{r} 3749 \overline{) 12} \\ 36 \underline{12} \\ 14 \underline{12} \\ 29 \underline{28} \\ 14 \underline{12} \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14996 \overline{) 48} \\ 144 \underline{48} \\ 59 \underline{48} \\ 116 \underline{112} \\ 96 \underline{96} \\ 20 \end{array}$$

圖 2. 設某數 N , 以除數 a 除時,得商 Q , 剩餘 R , 則 $N = a \times Q + R$. 此式之兩邊,以他任意數,例如 m 乘之,得 $N \times m = a \times m \times Q + R \times m$. 然 R 為除以 a 時之剩餘,故 $a > R$, 故 $a \times m > R \times m$. 因此 $N \times m$ 除以 $a \times m$ 時,得商 Q , 剩餘 $R \times m$, 即如題所言。

圖 1. 由本題之結果反考之,可知除法中以同數除被除數及除數,則商不變,而剩餘等於以同數除原剩餘時之商。

圖 2. 由注意 1, 可知施行除法時,被除數及除數之尾端,若有若干個 0, 則可就此二數,自末尾起,削去同數個 0, 而商不變。然若不能整除,則所得之剩餘後,必須附加前所削去之 0, 始可得原剩餘。

圖 3. 小數之除法 [除數被除數皆為小數者] 中,化除數為整數時,亦以本題之理為依據。

11. 設一數能整除各數,則此數除各數之和時所得之商,等於此數一一除各數時所得商之和。試證之。

圖 例如 $(27 + 18 + 15) \div 3 = 27 \div 3 + 18 \div 3 + 15 \div 3$. 何則, $(27 \div 3 + 18 \div 3 + 15 \div 3) \times 3 = 27 \div 3 \times 3 + 18 \div 3 \times 3 + 15 \div 3 \times 3 = 27 + 18 + 15$, 故 $(27 + 18 + 15) \div 3 = 27 \div 3 + 18 \div 3 + 15 \div 3$ 也。

圖 除數若不能整除各數,而用分數時,則本定數恆真。

12. 設一數能整除二數,則此數除二數之差時所得之商,等於其一一除此二數時所得商之差。試證之。

圖 例如 $(35 - 15) \div 5 = 35 \div 5 - 15 \div 5$.

何則, $(35 \div 5 - 15 \div 5) \times 5 = 35 \div 5 \times 5 - 15 \div 5 \times 5 = 35 - 15$ 故也。

註 參照 11 題注意。

13. 若干因數之積, 除以是等因數之一時所得之商, 等於此因數外之其餘諸因數之連乘積。試證之。

圖 例如 $2 \times 4 \times 7 \times 9 \div 7 = 2 \times 4 \times 9$ 。何則, 以 7 乘 $2 \times 4 \times 9$, 得 $2 \times 4 \times 9 \times 7 = 2 \times 4 \times 7 \times 9$ 故也。

14. 若干因數之連乘積除以他數時, 若此諸因數中有為除數之倍數者, 則可將此因數改之為除以除數時所得之商, 即得所求之商。試證之。

圖 例如 $3 \times 12 \times 8$ 除以 6 時, 因 12 為 6 之倍數, 故所求之商等於 $3 \times (12 \div 6) \times 8$, 即 $3 \times 2 \times 8$ 。何則, $3 \times 12 \times 8 \div 6 = 3 \times 2 \times 6 \times 8 \div 6 = 3 \times 2 \times 8$ [13 題] 故也。

圖 由此可知, 若干因數之連乘積除以某數時, 可單除其中之一因數。

15. 以若干因數之連乘積除某數時所得之商, 等於以此若干因數, 逐一除此數時最後所得之商。試證之。

圖 (I) 逐次除法中無剩餘時。例如因 $168 = 2 \times 3 \times 4 \times 7 \cdots (1)$, 故 $168 \div (2 \times 3 \times 4) = 7$ 。又 (1) 之兩邊除以 2, 則由 13 題, $168 \div 2 = 3 \times 4 \times 7$, 同理, $168 \div 2 \div 3 = 4 \times 7$, $168 \div 2 \div 3 \div 4 = 7$ 。因此, $168 \div (2 \times 3 \times 4) = 168 \div 2 \div 3 \div 4$ 。

(II) 逐次除法中有剩餘時。例如以 $3 \times 5 \times 9$, 即 135, 除 1199 時, 因 $1199 = 3 \times 399 + 2$, $399 = 5 \times 79 + 4$, $79 = 9 \times 8 + 7$, 故 $5 \times 79 = 5 \times (9 \times 8 + 7) = 5 \times 9 \times 8 + 5 \times 7$, 因

此 $399 = 5 \times 79 + 4 = 5 \times 9 \times 8 + 5 \times 7 + 4$, 從而 $3 \times 399 = 3 \times (5 \times 9 \times 8 + 5 \times 7 + 4) = 3 \times 5 \times 9 \times 8 + 3 \times 5 \times 7 + 3 \times 4$, 故 $1199 = 3 \times 399 + 2 = 3 \times 5 \times 9 \times 8 + 3 \times 5 \times 7 + 3 \times 4 + 2 = (3 \times 5 \times 9) \times 8 + [(3 \times 5) \times 7 + (3 \times 4 + 2)]$ 。此式中最後之 2 為某數除以 3 時所得之剩餘, 故 $3 > 2$, 又 4 為除以 5 時所得之剩餘, 故 $5 > 4$, 從而 $3 \times 5 > 3 \times 4 + 2$ 。次, 7 為某數除以 9 時所得之剩餘, 故 $9 > 7$, 因此 $3 \times 5 \times 9 > 3 \times 5 \times 7 + 3 \times 4 + 2$ 。是以 1199 為 $3 \times 5 \times 9$ 之 8 倍加小於 $3 \times 5 \times 9$ 之數所得之和。故 1199 除以 $3 \times 5 \times 9$ 時所得之整數商為 8; 而 1199 除以 3 時所得之整數商為 399, 399 除以 5 時所得之整數商為 79, 79 除以 9 時所得之整數商亦為 8。故如題所言 [參照 34 題]。

16. 以甲數除某數, 更以乙數除其商, 與以乙數除某數, 更以甲數除其商所得之結果相等。試證之。

圖 某數無論先除以甲數, 或交換除數, 而先除以乙數, 其結果皆等於某除數以 '甲 $\times$ 乙' 時所得之商 [15 題] 故除數雖交換, 而商不變。

圖 本題中之除數並不限於二數, 不論其為幾數, 本題皆能成立。

17. 設某數 b 得為他數 c 所整除, 則以其商除一數 a 時所得之商, 等於以 b 除 $a \times c$ 時所得之商。試證之。

圖 設 $a \div (b \div c) = x$, 則由除法之定義, $a = x \times (b \div c) = x \times b \div c$ [組合律], 故 $a \times c = x \times b$, 從而 $a \times c \div b = x$, 故 $a \div (b \div c)$

$$= a \times c \div b.$$

例 18 若用分數，則雖不能整除時，本定理亦能成立甚明。

18. 設某數 b 得為 c 所整除，且他數 a 得為 b 所整除，則 a 除以 $b \div c$ 時所得之商，等於 a 除以 b 時所得之商乘以 c 所得之積。試證之。

證 設 $a \div (b \div c) = x$ ，則由除法之定義， $a = x \times (b \div c) = x \times b \div c$ [組合律] $= x \div c \times b$ [交換律]。故 $a \div b = x \div c$ ，故 $a \div b \times c = x$ ，故 $a \div (b \div c) = a \div b \times c$ 。

例 19 若用分數，則雖不能整除時，本定理亦能成立。

19. 設某數 a 得為 b 所整除，又他數 c 得為 d 所整除，則 $a \div b$ 與 $c \div d$ 之相乘積，等於 $a \times c$ 除以 $b \times d$ 時所得之商。試證之。

證 $(a \div b) \times (c \div d) = a \div b \times c \div d$ [組合律] $= a \times c \div b \div d$ [交換律] $= a \times c \div (b \times d)$ [組合律]。

例 20 若用分數，則雖不能整除時，本定理亦能成立。

20. 設 a, b, c, d 為四數， $a \div b, c \div d$ 之各除算皆為整除算，則 $(a \div b) \div (c \div d) = a \times d \div (b \times c)$ 。試證之。

證 $(a \div b) \div (c \div d) = a \div b \times d \div c$ [組合律] $= a \times d \div b \div c$ [交換律] $= a \times d \div (b \times c)$ [組合律]。

例 21 同 19 題之注意。

21. 右之除算中，在 $\cdot$ 處 $7 \cdot 51 \cdot 1 \cdot 2$ 之數字為何？

證 將所設除算式，改書成右下形。此時 $l=1$ ，

$$\begin{array}{r} \cdot 1 \cdot \\ 1 \cdot 1 \cdot \\ \dots \\ 1 \cdot 9 \end{array}$$

$q=11-9=2$ ，因而 $b \times 2$ 7ab)51cd1(e2 之末位 $= q = 2$ ，故知 $\frac{fglh}{1k1l}$ $b=1$ ，或 6。又因 $7a1 \times e$ $\frac{mnpq}{1r9}$ $< 51cd$ ，故 $e < 8$ ，及因

$800 \times 6 < 51cd$ ，故 $e \geq 6$ ，故 $e=6$ ，或 7。

設 $e=7$ ，則 $7a1 \times e = fg17 = 4900 + (fg10 - 4900) + 7$ ，故 $fg10 - 4900 = a \times 70$ ，故知非 $a \times 70 = 210$ ，因而 $a=3$ 不可。然此

時 $fg1h = 5117$ ，因而生不合理之結果 $1k1 = cd - 17$ 。故 $e \neq 7$ ，因此 $e=6$ 。於是 $7a1$

$\times 6 = 4200 + a \times 60 + 6 = fg1h$ ，故 $f=4$ ，

$h=6$ ，然縱命 $a=9$ ，則 $791 \times 6 = 4746$ ，而亦不能得 $51cd - 4746 = 1k1$ ，故 $b=1$ 錯

誤。因此 $b=6$ 。將此式與 $e=6$ 組合，則

$7ab \times 6 < 4800$ ，故 $51cd - 7a6 \times 6 > 51cd - 4800$ ，即 $1k1 > 300$ ，而不合理。故此假定不可能，是以最後所得推考者，惟 $e=7$ 。

此時 $7a6 \times 7 = 4900 + a \times 70 + 42 = fg1h$ ，

由此得 $h=2$ ， $a=1$ ， $f=5$ ， $g=0$ 。又由

$716 \times 2 = 1432 = mnpq$ ，得 $m=1$ ， $n=4$ ，

$p=3$ 。由 $r=11-(p+1)=7$ ，得 $r=7$ 。故

$1k1l = mnpq + 1r9 = 1611$ ，故 $k=6$ 。又

由 $fg1h0 + 1k1l = 51731 = 51cd1$ ，得

$c=7$ ， $d=3$ 。至此問題全告解決。

例 22 試不用省略算，而求 38927 與 67198

之積除以 74213 與 4738 之積所得之商，至

小數第四位。

證 $716)51731(72$

$\frac{5012}{1611}$

$\frac{1432}{179}$

22. 試不用省略算，而求 38927 與 67198

之積除以 74213 與 4738 之積所得之商，至

小數第四位。

38927	74213
67198	4738
311416	
350343	593704
38927	222639
272489	519491
233562	296852
2615816546	351621194
2461348358	7.4393...
1544681880	
1406484776	
1381971040	
1054863582	
3271074580	答 7.4393
3164590746	
1064838340	
1054863582	
9974758	

23. 以 93 除 4020, 得商為 4, 剩餘為 38, 此答數正否, 試還原法以驗. 若為錯誤者, 試改正之.

解 4020 除以 93, 得商為 4, 剩餘為 38, 則等式 $4020 = 93 \times 4 + 38$ 應能成立, 然因 $93 \times 4 + 38 = 410$, 與被除數絕不相等, 故所設之答為錯誤者. 正確之運算, 應如右

4020	93
372	43
300	
279	
21	

方所示, 因知所得之商應為 43, 剩餘應為

21.

24. 一除法, 運算後得商為 15, 今僅使其除數改變, 再施除算, 而得商為 20. 問對於除數應與以若何之變化?

解 1. 設被除數為 a , 除數為 b , 依題意, 可知 $a = b \times 15 = b \times 3 \times 5$, 次設後一除數為 b' , 則知 $a = b' \times 20 = b' \times 4 \times 5$. 故 $b \times 3 = b' \times 4$. 即始除數之 3 倍等於後除數之 4 倍, 因知後除數即由始除數之 3 倍除以 4 而得也.

解 2. 設被除數為 a , 除數為 b , 則依題意, $a = b \times 15$. 如可變化除數與商, 而欲被除數保持不變, 若設商已變化, 則非以其反對變化施之於除數不可. 然本題中, 商已乘上 $20 \div 15 = \frac{4}{3}$, 因知除數應除以 $\frac{4}{3}$ 也. 即 $a = (b \div \frac{4}{3}) \times (15 \times \frac{4}{3}) = b \div \frac{4}{3} \times 20$.

25. 某除法中, 商得 13, 剩餘為 26, 其除數與被除數之和為 404. 求除數及被除數.

解 404 既為除數與被除數之和, 則 404 除以除數所得之商應為 $13 + 1 = 14$, 而剩餘仍為 26. 故除數為 $(404 - 26) \div 14 = 27$, 因而被除數為 $404 - 27 = 377$.

26. 以某數除 11011, 求得之商為二位數, 並已知得商之第一數字時之剩餘為 84, 得第二數字時之剩餘為 50. 試求除數之值.

解 商既為二位數, 則商之第一數字與除數之乘積之末位相當於被除數之十位. 因其時之剩餘為 84, 故除數定為 $1101 - 84 = 1017$ 之約數, 同理, 因求得第二數字時之剩餘為 50, 故知除數又為 $841 - 50 = 791$ 之約數. 因而求 1017 與 791 之最大公約數, 得為 113. 若以 113 作除數, 則得商為二位數中之 97, 故知 113 為所求之除數.

27. 一除法中, 其被除數, 除數, 商之和為 73; 除數, 商, 剩餘之和為 17; 若設商為 8, 則被除數為何?

解 被除數與除數之和, 即除數與商之積加上剩餘與除數之和, 為 $73 - 8 = 65$. 但除數與剩餘之和為 $17 - 8 = 9$, 故除數與商之積為 $65 - 9 = 56$. 是以除數等於 $56 \div 8 = 7$, 故所求之被除數為 $73 - 7 - 8 = 58$.

28. 一除法中,商等於除數之 6 倍,除數又等於剩餘之 6 倍,而此三數之和為 516. 求被除數.

圖 除數為剩餘之 6 倍,商為除數之 6 倍,是以商即為剩餘之 $6 \times 6 = 36$ 倍. 故三數之和為剩餘之 $36 + 6 + 1 = 43$ 倍,以是求得剩餘為 $516 \div 43 = 12$, 從而除數為 $12 \times 6 = 72$, 商為 $72 \times 6 = 432$. 由此求得所需之被除數為 $432 \times 72 + 12 = 31116$.

29. 某數為 17 除時,所得之整數商等於剩餘之 5 倍,而被除數與整數商之和為 182. 試求被除數.

圖 被除數等於商之 17 倍加剩餘,然商為剩餘之 5 倍,商之 17 倍即等於剩餘 5 倍之 17 倍,或 85 倍,因而被除數即為剩餘之 85 倍與剩餘之和,即等於剩餘之 86 倍. 依題意,被除數與商之和等於 182, 故剩餘之 86 倍與 5 倍之和,即 91 倍,等於 182, 是以知剩餘為 $182 \div 91 = 2$, 因而求得被除數為 $2 \times 86 = 172$.

30. 某數除以 7 時,得商 8 與剩餘若干,次加 6 於其剩餘而復以 7 除,照此法進行,歷五回而剩餘始無,求某數.

圖 某數除以 7 時,所得之剩餘決不超乎 1, 2, 3, 4, 5, 6 六數之外,故此類剩餘加 6 後,必等於 7, 或大於 7 而小於 7 之 2 倍,其理甚明. 故剩餘加 6 後而為 7 除,歷 5 回而始整除,關於每回之除算得商始終為 1. 以此,前之商 8 加上後之商 5 後乘之以 7, 即等於某數與 5 回加入之 6 之和,是故可知所求之數為 $(8+5) \times 7 + (6 \times 5) = 61$.

D. 剩 餘

31. 於除法中,剩餘必小於被除數之半,分,試證之.

圖 於除法中, '除數 $\times$ 商 + 剩餘 = 被除數', 故若 '剩餘 = 被除數 $\div 2$ ', 或 '剩餘 $>$ 被除數 $\div 2$ ' 時, 則 '除數 $\times$ 商 = 被除數 $\div 2$ ', 或 '除數 $\times$ 商 $<$ 被除數 $\div 2$ ', 因而 '除數 $\times$ 商 = 剩餘' 或 '除數 $\times$ 商 $<$ 剩餘'. 於是, 設商為整數, 則此二式即表示 '除數 = 剩餘', 或 '除數 $<$ 剩餘', 是乃不合理者. 若商為小數時, 則被除數得以 10 之某次幂乘之, 使商成整數. 於是因被除數及除數, 俱以同數倍之, 故其倍數之大小關係, 與原來之被除數, 除數之關係同. 是以無論在何款中, 若 '剩餘 = 被除數 $\div 2$ ', 或 '剩餘 $>$ 被除數 $\div 2$ ', 則生不合理之結果, 故如題所言.

32. 某整數除以 2 時,得剩餘 1, 次以 5 除其商, 則得剩餘 3, 再以 6 除此時所得之商, 則得剩餘 4. 然則某整數若以 $2 \times 5 \times 6 = 60$ 除時,其剩餘如何?

圖 設某整數 N 除以 2 時所得之商為 P 則 $N = P \times 2 + 1$; 設 P 為 5 除時所得之商為 Q , 則 $P = Q \times 5 + 3$; 故 $N = (Q \times 5 + 3) \times 2 + 1 = Q \times 5 \times 2 + 3 \times 2 + 1$, 設 Q 除以 6 時之商為 R , 則 $Q = R \times 6 + 4$, 故 $N = (R \times 6 + 4) \times 5 \times 2 + 3 \times 2 + 1 = R \times 6 \times 5 \times 2 + 4 \times 5 \times 2 + 3 \times 2 + 1$. 因而以 60 除 N 時所得之剩餘為 $4 \times 5 \times 2 + 3 \times 2 + 1 = 47$. (參照 15 題)

普徧言之, 最後之剩餘 乘以其前

之諸除數，又其前一之剩餘，乘以此剩餘前之諸除數，如是以往，則加此種種積與最先之剩餘，即得全剩餘。

33. 某整數除以 24，此除數乃可分為 2, 3, 4 三因數者，並已知某整數最初以 2 除之，得剩餘 1，復以 3 除其商，則得剩餘 2，再以 4 除此時所得之商，則得剩餘 2，然則若最初除以 4，次以 3 除其商，再以 2 除其商時，於此之各除法中所得之剩餘如何？

圖 某整數為 (第三商) $\times 4 \times 3 \times 2 + 2 \times 3 \times 2 + 1 \times 2 + 1$ [32 題]，即等於 (第三商) $\times 24 + 15$ ，因此某整數除以 4 時，則得商為 (第三商) $\times 6 + 3$ ，並得剩餘 3，又以 3 除 (第三商) $\times 6 + 3$ 時，則得商為 (第三商) $\times 2 + 1$ 而無剩餘，最後此商為 2 除時，則得商仍為第三商而得剩餘 1。

34. 以甲數之因數逐次除乙數，捨棄每次之剩餘，則最後之商與以甲數除乙數所得之商相等，試證之。

圖 因以甲之因數逐次除乙數時，捨棄每次之剩餘，故以甲數除乙數所得之商決不小於逐次以甲數之因數除乙數最後所得之商，其理甚明，故祇須證明前商決不大於後商即可。在次之除法中，所捨之數小於逐次之除數。例如設除數為 60，分解之為 $3 \times 4 \times 5$ ，則逐次之剩餘決不大於 2, 3, 4。今即設剩餘為最大之 2, 3, 4，則依 32 題，全剩餘為 $2 + 3 \times 3 + 4 \times 3 \times 4 = (3-1) + (4-1) \times 3 + (5-1) \times 3 \times 4 = (3-1) + (3 \times 4 - 3) + (3 \times 4 \times 5 - 3 \times 4) = 3 \times 4 \times 5 - 1 = 60 - 1$ ，故不行逐次除法，而以 $3 \times 4 \times 5$ ，即 60 除之，商亦不增加，故以甲數除

乙數所得之商，決不大於以甲數之因數逐次除乙數所得之商，即如題所言。

圖 本題歸於 15 題，但題言及證法相異，故另揭之。

35. 保持除數不變，而被除數乘以某數時，則商及剩餘亦將乘以同數，試證之。

圖 設被除數為 31，除數為 7，則得商 4 與剩餘 3，然則 $31 = 7 \times 4 + 3$ ，但相等之二數，各以同數乘之，其結果仍相等，故 $31 \times 2 = (7 \times 4 + 3) \times 2 = 7 \times 4 \times 2 + 3 \times 2 = 7 \times (4 \times 2) + 3 \times 2$ ，由是可知被除數乘 2 時而除數不變，則商及剩餘亦均 2 倍其值。

圖 在本題中，被除數所乘之數與剩餘之積必須小於除數。何則，例如設 125 除以 30 時，得商 4 與剩餘 5，即 $125 = 30 \times 4 + 5$ ，而等式之兩邊設均乘 7，則 $125 \times 7 = 30 \times 4 \times 7 + 5 \times 7$ ，故被除數乘以 7 時，得商為 4×7 ，剩餘為 $5 \times 7 = 35$ 。然以剩餘 35 大於除數 30 故，則剩餘決非 35 也，於是與題言不合。

36. 保持除數不變，被除數除以某數，商及剩餘亦均除以同數。試證之。

圖 設被除數為 a ，除數為 b ，商為 q ，剩餘為 r ，則 $a = b \times q + r$ 。設以 n (n 為得整除 a, q, r 之任何數) 除此等式之兩邊，則 $a \div n = (b \times q + r) \div n = (b \times q) \div n + (r \div n)$ [配分定則] $= b \times (q \div n) + (r \div n)$ ，故 $a \div n = b \times (q \div n) + (r \div n)$ 。由是可知保持除數之不變，被除數設除以某數 n ，則商及剩餘亦均除以同數。

37. 保持被除數不變，假設除數乘以某數時，則商須以同數除之，而剩餘仍不變，試證

之。

圖 設被除數為 a ，除數為 b ，商為 q ，剩餘為 r ，則 $a = (b \times q) + r$ ，今 $b \times q$ 積中之一因數 b 為某數 m 乘後，則須破壞等式之成立，欲仍保持等式之成立，則非以同數除其積中之他一因數 q 不可。故 $a = (b \times m) \times (q \div m) + r$ ，而與題言吻合。

圖 在本題中， q 必得為 m 所整除，否則剩餘顯然須發生變化。

38. 以甲數先後除乙數及丙數，所得二剩餘之和，等於以甲數除乙丙二數之和時，所得之剩餘，或再加入甲數而得之和，其證法如何？

圖 設乙為甲除時所得之剩餘為 R ，則‘乙 = 甲之倍數 + R ’，又丙為甲除時所得之剩餘為 r ，則‘丙 = 甲之倍數 + r ’，因此，則‘乙 + 丙 = 甲之倍數 + 甲之倍數 + $R + r$ ’，但以兩甲數之倍數之和仍為甲之倍數，故‘乙 + 丙 = 甲之倍數 + $R + r$ ’。若 $R + r < \text{甲}$ ，則 $R + r$ 即為以甲除乙 + 丙時所得之剩餘。若 $R + r > \text{甲}$ ，則因 $R < \text{甲}$ ， $r < \text{甲}$ ，而 $R + r < \text{甲} \times 2$ 。因此， $R + r$ 即等於以甲除乙 + 丙時所得之剩餘加甲數。故如題所言。

39. 以甲數除乙數及丙數所得二剩餘之差等於以甲數除乙丙二數之差時之剩餘，或等於此時所得之剩餘與甲數之差。試證之。

圖 設以甲數除乙數及丙數時，所得之二剩餘各為 R, r ，則‘乙 = 甲之倍數 + R ’，‘丙 = 甲之倍數 + r ’，因而若設乙大於丙， $R > r$ ，並因甲之二個倍數之差仍為甲之倍數，故‘乙 - 丙 = 甲之倍數 + $(R - r)$ ’，因知 $R - r$ 即為以甲除乙 - 丙時所得之剩餘。若

設乙 $>$ 丙，且 $R < r$ ，則甲 + $R > r$ ，且‘乙 - 丙 = 甲之倍數 + 甲 + $R - r$ ’，因而‘甲 + $R - r < \text{甲}$ ’，且‘甲 + $R - r = \text{甲} - (r - R)$ ’。是乃乙 - 丙除以甲時，所得之剩餘也；故 $r - R$ 等於以甲除乙 - 丙時之剩餘與甲之差。即如題所言。

40. 設以甲數除乙數及丙數所得之二剩餘之和等於甲數，則乙丙二數之和得為甲數所整除，試證之。

圖 1. 設以甲除乙丙時所得之二剩餘各為 R, r ，則‘乙 = 甲之倍數 + R ’，‘丙 = 甲之倍數 + r ’，因而‘乙 + 丙 = 甲之倍數 + $R + r$ ’。然依題意， $R + r$ 與甲相等，故‘乙 + 丙 = 甲之倍數 + 甲 = 甲之倍數’，因知‘乙 + 丙’得為甲所整除。

圖 2. 由 38 題，可知以甲除乙及丙所得之二剩餘之和，等於以甲除乙丙之和所得之剩餘，或等於再加上甲之和，然依題意，前二剩餘之和既等於甲，則以甲除乙丙之和所得之剩餘仍等於甲，是乃不可能者，且剩餘加甲後仍等於甲，是可知剩餘為 0 也，即‘乙 + 丙’得為甲所整除。

圖 與本題同理，設以甲數除乙數及丙數所得之二剩餘相等時，則乙丙二數之差得為甲數所整除，亦得證之。

41. 以一數除諸他數之相乘積之剩餘，等於以該數各別除諸數所得之諸剩餘之相乘積，或等於此乘積再除該數所得之剩餘，試證之。

圖 例如求 24, 26, 34 之相乘積除以 7 時所得之剩餘，因 $24 = 7$ 之倍數 + 3, $26 = 7$ 之倍數 + 5，故 $24 \times 26 = (7 \text{ 之倍數}$

$+3) \times (7\text{-之倍數}+5)$, 然此式之右邊, 即等於 7-之倍數 與他 7-之倍數 之積, 7-之倍數 與 3-之積 , 7-之倍數 與 5-之積 , 及 3×5 等四數相加之和, 此四數中, 始三者皆為 7-之倍數 , 故知 $24 \times 26 = 7\text{-之倍數} + 3 \times 5$; 次因 $34 = 7\text{-之倍數} + 6$, 故 $24 \times 26 \times 34 = (7\text{-之倍數} + 3 \times 5) \times (7\text{-之倍數} + 6) = 7\text{-之倍數} + 3 \times 5 \times 6$, 因知以 7 除 $24 \times 26 \times 34$ 時所得之剩餘, 即等於以 7 除 $3 \times 5 \times 6$ 時所得之剩餘, 故以一數除諸他數之相乘積所得之剩餘, 等於以該數各別除諸數時所得之剩餘之相乘積, 若此乘積小於除數, 設或此乘積不小於除數, 則所求之剩餘等於此相乘積為除數所除時之剩餘。

42. 試求 825491 之四乘幂為 7 及 9 所除時所得之兩剩餘。

圖 825491^4 , 即四 825491 之連乘積, 為 7 除時所得之剩餘, 等於 825491 為 7 除時所得剩餘之四乘幂, 或等於此乘幂為 7 除時所得之剩餘 (41 題), 825491 為 7 之倍數 $+2$, 故所求之剩餘為 $2^4 = 16$ 被 7 所除而得之剩餘, 即 2 。同理, 可求以 9 除時所得之剩餘, 因 825491 為 9 之倍數 $+2$, 故所求之剩餘為 $2^4 = 16$ 除以 9 時所得之剩餘, 即 7 。

43. 某數設以 391 除之, 則得剩餘 300 , 然則以 17 除時, 其剩餘為幾何?

圖 因 391 為 17 之倍數, 故 391 之倍數加 300 所得之數, 亦即 17 之倍數加 300 所得之數, 其理甚明。故某數為 17 除時所得之剩餘, 即等於 300 以 17 除時所得之剩餘, 即 11 。

44. 若於某數字之右, 添若干個 0 , 其個數較某質數 [2 及 5 除外] 少 1 , 則如是所得之數除以該質數時所得之剩餘, 必等於首位數字, 例如 5000000 除以 7 時, 得剩餘 5 。求證。

圖 $5000000 = 5 \times (999999 + 1) = 5 \times 999999 + 5 \times 1$, 而 $999999 = 10^6 - 1$, 其中 10 與 7 互質, 故為 7 之倍數, 因此, 由 Fermat 氏定理 [1749 題], 剩餘為 5 。關於其他質數 $11, 13$, 等, 亦可如是證之。

圖 本題中所以將 2 及 5 除外者, 因 2 或 5 不與 10 互質, 故不能應用 Fermat 氏定理也。

E. 一 數

45. 試求 13436928 之全部約數之和。

圖 $13436928 = 2^{11} \times 3^3$, 故本題之全部約數乃係 $(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{11}) \times (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^3)$ 積中之各項, 故欲求所求之和, 祇須求得此積中之各項之和即積之值已可。然前一括號中, 乃以 1 為初項, 2 為公比之 12 項之等比級數之和, 其和為 $\frac{2^{12}-1}{2-1} = 4095$, 同理, 後一括號中之數式之值為 $\frac{3^4-1}{3-1} = 9841$, 因而其乘積為 4095×9841 , 即為 **40298895**, 是乃所求之和也。

46. 求 12564 之全部約數之和。

圖 因 $12564 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 349$, 由 45 題, 可知其全部約數之和為 $(1 + 2 + 2^2) \times (1 + 3 + 3^2) \times (1 + 349) = 7 \times 13 \times 350 = 31350$ 。

47. 設 $12345 \triangle \odot$ 得為 234 所整除, 問

△◎ 應為何二數字?

圖 以 234 除 12345△◎ 所得之商, 當不小於以 23 除 1234500 而得之商, 亦當不大於以 234 除 1234599 所得之商, 其理甚明, 而以 1234500 為 234 除時, 得商 5275, 剩餘 150, 又以 1234599 為 234 除時, 得商 5276, 剩餘 15, 故若設 12345△◎ 能為 234 所整除, 其商應為 5276, 而被除數應為 $1234599 - 15 = 1234584$, 因知設 △◎ 為 84 即可.

48. $6**9$ 一數, 若得為 257 所整除時, 其商如何?

圖 257 之 20 倍為 5140, 其 30 倍為 7710, 是以所求之商必在 20 與 30 之間, 即商之十位數字為 2. 又因除數與商之積等於被除數, 則除數之個位數字 7 與商之個位數字之相乘積中之個位數字非等於 9 不可. 然與 7 相乘而得之積之個位數為 9 者, 僅 7 一數, 故知所求之商為 27.

49. $15***6$ 為 36 整除時, 其所得之商須為最大之整數, 問 *** 應書何三數字以代始可?

圖 1. 得為 36 所整除之數, 亦能為 9 及 4 所整除, 因得為 9 所整除之數, 其列位數字之和亦必為 9 所能整除, 故始自最大數字 159996, 順次書列得為 9 所整除之數, 有 159966, 159876, 等; 而得為 4 所整除之數, 其末二位之數亦應得為 4 所整除者, 然因 66 不能為 4 所整除, 76 則能為 4 所整除, 是故適合條件之諸數中, 最大者即為 159876, 是以所求之數字為 987.

圖 2. $15***6$ 當不大於 159996, 今

設以 36 除 159996, 則得商 4444, 剩餘 12. 而一數乘 36 後, 所得之積之個位數字為 6 者, 其個位數字應為 1 或 6, 故以 36 除 $15***6$ 後所得之商, 既應小於 4444, 且其個位數字應為 1 或 6, 是知其商應在 4441, 4436 等數之中, 而最大者, 乃為 4441, 故可知 $15***6$ 應為 $4441 \times 36 = 159876$, 即 *** 為 987 也.

50. 某學生以 467 乘某數, 得積 1925817, 然此積中之 9 與 7 二數字乃屬錯誤者, 問正確之數字為何?

圖 由誤得之積 1925817 減第六位之若干倍, 加或減第一位之若干倍, 而令所得之數為 467 之倍數即可. 今 $1925817 \div 467$ 之剩餘 = 376, $100000 \div 467$ 之剩餘 = 62, 而 $376 = 62 \times 6 + 4$. 故 $1925817 - 600000 - 4 = 1325813 = 467$ 之倍數, 故 9 及 7 俱應變為 3.

51. 自 87 減去某數之 5 倍, 其餘數等於自 27 減去某數之 2 倍時所得餘數之 4 倍, 求某數.

圖 自 27 減去某數 2 倍所得之餘數之 4 倍, 等於自 27 之 4 倍減去某數之 2 倍之 4 倍所得之餘數, 即等於自 108 減去某數 8 倍時所得之餘數. 故自 87 減去某數 5 倍所得之餘數與自 108 減去某數 8 倍所得之餘數相等. 由是依次反對計算之, 87 等於自 108 減去某數之 8 倍所得之餘數, 加某數之 5 倍所得之和, 亦即等於自 108 減去某數之 3 倍, 故 $108 - 87 = 21$ 等於某數之 3 倍, 故某數為 $21 \div 3 = 7$.