航空结构矩陣分析

说　　明

由于电子计算机的出现，从五十年代初期开始，矩阵法和/或有限元素法的新结构分析方法有了急剧的发展，并且逐渐地向着支配结构工程界的趋势发展。

一般地说，这种结构分析方法就是将给出的结构理想化，当作有限个元素的集合体，利用能量分析原理列出加在结构上的外载荷和对应这些外载荷而产生的位移或由力之间关系的线性联立方程组，利用矩阵代数把它组织起来这就是矩阵法。另一方面，这些联立方程组是把整个结构看成是满足平衡方程和位移连续条件的有限个小元素组合而成的集合体而建立起来的，所以就产生了有限元素法这个名称。

矩阵法和/或有限元素法原来是在航空工程方面的应用而发展起来的，以后很快被土木工程方面所采用，同时最近已渗透到流体力学，热传导，电磁学等科学部门，已经成为代替差分法数值求解偏微分方程的手段，广泛地用于各工程部门。

在毛主席**“中国人民有志气、有能力、一定要在不远的将来，赶上和超过世界先进水平。”**的伟大号召指引下，在国内，首先在航空领域开展了这方面的研究工作，我国广大科学技术工作者在毛主席无产阶级革命路线指引下，走与工农兵相结合的道路，在工人阶级领导下、在三大革命实践中对此作了大量理论和实验工作，使这种分析方法成功地应用于我国自行设计的各类型飞机的各个设计阶段，进行了强度校核，局部屈曲，振动计算和极限分析等工作，经受了严格的实验考验，取得了令人满意的成果。其他各个工业技术部门工人群众和技术人员也作了很多工作，取得了不少成绩，这里就不再列举了。

由于这一分析方法在生产实践中证明是一种行之有效的方法，因此这一学科在世界近几年获得很快发展，年年都有大量的文献和资料发表，但从目前所发表的文章来看，大多是编重于概念的本身和繁杂的数学推导，联系实际问题较少。因此颇令人生畏，尤其对年轻的航空工作者更颇有困难之感，本总结拟从航空工程实际问题出发，结合我国具体情况，着重于解决实际应用中的问题，而不强调数学上的严密性。

本报告分为如下四个部分：

第一部分：初步知识

由于在结构分析中充分利用了矩阵代数，矩阵方法对于解决大型线性方程组问题是一个极为有效的工具，因此先在第一章介绍矩阵代数某些基本原理。

另一方面，这个分析法是建立在变分原理上，为此，在第二章以简单方式叙述了力学中的变分原理。

这一部分实际上是为下面展开的讨论作准备。

第二部分：结构分析的矩阵方法

矩阵法早在1959年我国就开始进入实际使用的尝试，目前已成为行之有效的分析方法，国内外都有大量文献介绍了这种分析法，因此在这里将强调矩阵法的一些特点，以及如何解决在实践中所遇到的一系列问题，为此先在第三章介绍了矩阵力法，为了表示理想化结构受

到单位载荷作用下的内力矩阵可写成

$$b=b_0-b_1D^{-1}D_0$$

一种理论的真正实用性，在于如何引导由电子计算机自动形成静力相当内力系统的矩阵b_0和自平衡内力系统的矩阵 b_1，并使之自动完成整个分析工作，为此要解决下面一些问题。

1. 用统一分析方法由机器来分析结构的超静定度数，
2. 用典型的最少量的单位系统来分析机翼、机身结构，
3. 由机器自动选取和形成 b_0、b_1 矩阵，并使之良型化，
4. 压缩原始矩阵阶数，以减少机器容量不足的矛盾，
5. 扭曲鈑的处理。

在矩阵位移法的第四章中，以双重性原理来推演矩阵位移法全部公式，提出了超形定结构的概念和分析方法，给出了形定化的措施，导出了所谓的直接刚度法，解决了在结构中采用轴力—剪切元件的一些实际问题如：多点鈑，断端鈑和扭曲鈑等问题，指出了超形定结构化为形定结构的处理方法，最后又给出梁—抗扭盒元件在实用中的方法和提高精度的措施。

第三部分：连续体中有限元素法

这一部分分为两章：

第五章介绍了有限元素的概念，详细地探讨了直接构成在实际中所遇到的各种复杂元素的形状函数的方法。

在第六章讨论了有限元素法在结构动力分析中的应用，处理了平板局部屈曲和液体振动问题，显然这种方法有它巨大的实用性，现正在迅速发展过程之中。

第四部分：大型复杂结构分析方法

本部分分为三章着重于结合我国具体情况讨论在实践中需要解决的一些重要问题。

第七章讨论了在上机计算中需要处理的几个问题：先是如何省略对矩阵中另部分的记录，形成易于求解的方程组，其次是利用对称性问题，以降低矩阵阶数，接着是约束条件的处理。

第八章研究了大型线性方程组的各种处理方法，针对不同结构和所使用的电子计算机，介绍了四种方法：子结构分析法，一端等效载荷法，两端等效载荷法和搬移矩阵法，前三种方法还讨论影响系数的计算。

第九章探讨了结构更改的各种方法，并指出并联元素法是实现结构最佳化和非线性分析的一种现实途径，讨论了各种特殊型式分析问题，最后对这些方法作了分析比较。

在南航同志的力促和鞭策下，在我所室领导关怀和支持下，在同志们的帮助下，终于完成了这份总结报告，但是由于在编写过程中时间较为紧迫，加上自己水平限制，因此错误在所难免，这里渴诚希望老师们和同志们给予批评指正。

目　录

第一部分　初 步 知 识

目前结构分析是在力学的变分原理基础上发展起来的，自始至终是靠矩阵代数来组织的，为此，需要对有关力学中简单的一些变分原理和矩阵代数的某些基本知识有所了解，因此，这里首先在第一章介绍了所需要的矩阵代数方面的基本知识，接着在第二章里讨论了力学的基本变分原理，这样为下面展开的讨论作些必要的准备。

第一章　矩阵代数的基本知识

随着电子计算机的发展，以线性代数理论为基础的矩阵代数计算法在飞机结构力学中获得了愈来愈广泛的应用，并且显示了它的巨大的优越性，本章具有辅助的性质，其中简要地介绍一下矩阵代数的知识，而未加以详细证明，这些知识对于了解以后几章的材料来讲是必要的。

§1—1　矩阵及其主要形式

排成 m 行 n 列矩形格式的数的集合称为矩阵。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1—1}$$

这矩阵有 m 行和 n 列称为 $m\times n$ 阶矩阵

定义：若两个矩阵的阶数相同，并且对应元素都相等，则这两个矩阵称为相等，即

$$A=B \qquad 时 \qquad a_{ij}=b_{ij}$$

矩阵的主要形式有：

1. 方阵——行数 m 与列数 n 相等的矩阵，例如：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

2. 列阵——由一列组成的阵，例如：

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3. 行阵——由一行组成的矩阵。例如

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

4. 另矩阵——所有元素都为零的矩阵。例如：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. 对角矩阵——只有对角线元素不为零的矩阵，例如：

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

6. 单位方阵——若对角矩阵所有数都为1的方阵，例如：

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（注：单位方阵在矩阵乘法运算中相当于普通数中的1，即任何矩阵与之相乘仍得原矩阵）

7. 对称方阵——即元素 $a_{ij}=a_{ji}$ 的方阵，例如：

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

§1—2 矩阵的加减，矩阵与数的乘法

矩阵的加减：当两个同阶矩阵的加减时，就是对应元素的加减。

$$c=A\pm B \quad 即 \quad c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij} \tag{1—2}$$

例如：

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

矩阵与数的乘法：当矩阵与数相乘时，就是所有元素乘以该数：

$$c=\alpha A \quad 即 \quad c_{ij}=\alpha a_{ij} \tag{1—3}$$

例如：

$$2\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

不难看出，上面所得出的运算，具有下列性质：

1. $A+(B+C)=(A+B)+C$
2. $A+B=B+A$
3. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
4. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
5. $\alpha(\beta A)=\alpha\beta A$

§1—3　矩阵的乘法

两个矩阵相乘要有一定次序

$$c=AB \tag{1—4}$$

并且要满足这样的条件：矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数。在这种条件下，乘积 c 的元素，c_{ij} 等于矩阵 A 的第 i 行元素，分别与矩阵 B 的第 j 列各对应元素的乘积之和，即

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj} \tag{1—5}$$

例如：

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 11 \\ -1 & 8 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

显然矩阵乘法有如下几个性质：

1. $A(BC)=(AB)C$
2. $A(B+C)=AB+AC$

但是在一般情况下，

$$AB\neq BA$$

例如：

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

求出

$$AB=\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 8 & 22 \end{bmatrix},\qquad BA=\begin{bmatrix} 22 & -1 \\ -16 & -7 \end{bmatrix}$$

是一个完全不同的结果

乘法的几个特例：

1. 行阵×列阵＝数。例如

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}=34$$

2. 列阵×行阵＝矩阵，例如

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

3. 行阵×矩阵＝行阵。例如

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 17 & +1 & 25 \end{bmatrix}$$

4. 矩阵×列阵＝列阵，例如

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 28 \\ 20 \end{bmatrix}$$

5. $(A\pm B)^2=(A\pm B)(A\pm B)=A^2\pm AB\pm BA+B^2\neq A^2\pm 2AB+B^2$

6. 两个不为零的矩阵相乘可能得零，例如

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 2b \\ -a & -2a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

§1—4 逆 方 阵

用一矩阵除另一矩阵的运算，在矩阵代数中是不存在的，但是与除法等价的运算在多数情况中，是用一种叫做矩阵求逆来完成的，一个方阵 A 的逆方阵，是一个同阶的方阵 A^{-1}，能使

$$AA^{-1}=I \tag{1—6}$$

成立，实际上，计算逆方阵 A^{-1} 相当于求解线性代数方程组，例如方程组：

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{array}\right\}$$

用矩阵表达为

$$AX=B$$

两边各用 A^{-1} 乘在前面，

$$A^{-1}AX=A^{-1}B$$

得

$$X=A^{-1}B$$

因此，要解线性联立方程组，就在于求出系数方阵 A 的逆方阵 A^{-1}。

§1—5 求逆的方法

方阵 A 的行列式不为零，称为满秩矩阵或非奇异矩阵，否则矩阵称为降秩矩阵，可以证明，矩阵 A 非奇异是逆方阵存在的必要和充分条件，这里，为了同志们易于理解，简单介绍一下作逆方阵的方法——消去法。

把方阵 A 与单位矩阵并写成一个矩阵 C。例如

$$c=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

对矩阵 c 进行消去法，如果把方阵 A 化为 I，则右端形成一新方阵 B，$B=A^{-1}$，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

具体作法如下：

矩阵 c 的第 1 行乘以 $1/a_{11}$ 后，再分别用 $-a_{i1}$ 乘它加上第 i 行（$i=2$，$\cdots n$ 作为新矩阵的第 i 行），经过这一系列运算后，使矩阵第一列除第 1 个元素为 1，其余均为零，新矩阵的第 2 行照同样方法进行消去，使矩阵第二列除第 2 个元素为 1，其余均为零，继续这个过程直到将给定矩阵化为单位矩阵止，则右端生成的矩阵就是 A 的逆方阵。

例如，设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

则 c 矩阵为

$$c=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

第 1 行乘以 (1/2)，得

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

第 1 行乘以（-2）与第 2 行相加以及第 1 行乘以（1）与第 3 行相加，得

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

第 2 行乘以$\left(\frac{1}{5}\right)$，得

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

第 2 行乘以（1）与第 1 行相加以及第 2 行乘以（0）与第 3 行相加，得

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

第 3 行乘以$\left(-\frac{8}{5}\right)$与第 1 行相加，第 3 行乘以$\left(\frac{2}{5}\right)$与第 2 行相加，得

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

故

$$A^{-1}=B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

§1—6 转 置 矩 阵

由矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

中的行与列对调，结果便得到转置矩阵

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

同时，乘积转置规则成立：

$$(AB)'=B'A' \tag{1—7}$$

例如

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right)'=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

是一个完全相同的结果。

§1—7 矩 阵 的 分 块

一个矩阵可以用分割线（虚线）分成几块，每块称为子阵，例如

$$A=\left(\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

在下列给出的一些分割要求下，分割的矩阵在运算时可以把子阵看作普通元素那样进行。

1． 两个同阶矩阵相加时，可以按同样方式分割为子阵，后再相加，例如

$$\left(\begin{array}{cc:c} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc:c} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

2． 两个矩阵 A 与 B 相乘时，A 矩阵列分割线必须与 B 矩阵行分割线相对应，例如

$$\left(\begin{array}{cc:c} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ \hdashline 1 & 0 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ \hdashline 3 & 2 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}[3 \quad 2] \\ [1 \quad 0]\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+[2]\,[3 \quad 2] \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{array}{cc} 12 & 1 \\ 2 & -4 \\ \hdashline 8 & 3 \end{array}\right)$$

在求逆方阵时，有时最好利用分块求逆。

设某方阵为

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \tag{1—8}$$

求分块形式的逆方阵

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}P & Q \\ R & S\end{pmatrix} \tag{1—9}$$

根据分块矩阵的乘法规则，得

$$\left.\begin{aligned}\alpha P+\beta R&=I\\ \alpha Q+\beta S&=0\\ \gamma P+\delta R&=0\\ \gamma Q+\delta S&=I\end{aligned}\right\}$$

将第三式左乘以 $\beta\delta^{-1}$，并由第一式减去所得乘积，得到

$$(\alpha-\beta\delta^{-1}\gamma)P=I$$

从而

$$P=(\alpha-\beta\delta^{-1}\gamma)^{-1}$$

其次，由第三式得

$$R=-\delta^{-1}\gamma P$$

同样，由第二式与第四式得

$$S=(\delta-\gamma\alpha^{-1}\beta)^{-1}$$
$$Q=-\alpha^{-1}\beta S$$

于是，高阶矩阵的求逆就归结为四个低阶矩阵的求逆以及若干矩阵的乘积。

§1—8 矩阵的特征值和特征向量

若

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \quad 或 \quad Ax=\lambda x \tag{1—10}$$

其中 x 叫做矩阵 A 的特征向量，λ 叫做矩阵 A 的特征值。

上式即

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n&=0\end{aligned}\right\}$$

如 x 不为零，即

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1—11}$$

称为特征方程，展开后便得到 λ 的多项式

$$\lambda^n + B_1\lambda^{n-1} + B_2\lambda^{n-2} + \cdots + B_n = 0 \tag{1—12}$$

故知有 n 个根 λ_1，$\lambda_2 \cdots \lambda_n$。

§1—9 初 等 变 换

经常须对矩阵作下列运算

1．将矩阵的某一行元素，乘上一个数，例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2．对某一行元素，加上与前面某一行对应元素，成同样比例的数。例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\alpha a_{21} & a_{32}+\alpha a_{22} & a_{33}+\alpha a_{23} \end{pmatrix}$$

3．对某一行元素，加上与后面某一行对应元素，成同一比例的数，例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\alpha a_{31} & a_{22}+\alpha a_{32} & a_{23}+\alpha a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

由此可见，任何一个对于行的初等变换等价于左乘以某一个特殊类型的满秩矩阵。若对列作运算1，2，3，则需以同样的矩阵右乘。

第二章　力学中的基本变分原理

§2—1　广义坐标：

任何一组足以表示一个系统的位置形态的量称为这系统的广义坐标。

例如图 2—1 所示，球摆质点 m 离原点 O 的距离始终要保持常数（等于摆长 l），即其直角坐标 (x, y, z) 之间存在着关系：

$$x^2+y^2+z=l^2$$

可用任意两个量，如图中所示的两个角度 φ 和 θ 就是以表达这系统的位置，φ 和 θ 就称为这系统的广义坐标，它们与 (x, y, z) 的关系为

$$x=l\sin\theta\cos\varphi$$
$$y=l\sin\theta\sin\varphi$$
$$z=l\cos\theta$$

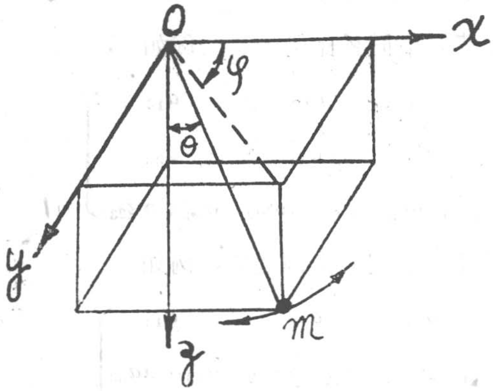

图 2—1

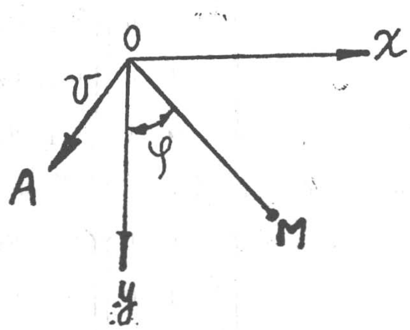

图 2—2

注意，这个系统所受的约束不随时间而变，这里再举一个随时间变化的约束，例如图 2—2 所示变长度的数学摆，假设以常速度 v 抽动细绳 A 端，用 l 表示长度 OM，于是得

$$l=l_0-vt$$

式中 l_0 表示 $t=0$ 时摆的长度。

在每一瞬时 t，点 M 的位置只决定于图中所示的角 φ，而角 φ 可以为广义坐标，它们与 (x, y) 的关系为

$$x=l\sin\varphi=(l_0-vt)\sin\varphi$$
$$y=l\cos\varphi=(l_0-vt)\cos\varphi$$

通常，若由 N 个质点组成的非自由系统的位形，在任一时刻都可以用某一广义坐标

$\{q_1\cdots q_r\}$ 确定，则各点的直角坐标 $(x_i\, y_i\, z_i)$ 与 $\{q_1\cdots q_r\}$ 之间必定有下列关系

$$\left.\begin{aligned} x_i&=x_i(t,\ q_1\cdots q_r)\\ y_i&=y_i(t,\ q_1\cdots q_r)\\ z_i&=z_i(t,\ q_1\cdots q_r)\end{aligned}\right\}\quad i=(1,\ 2\cdots N)\qquad (2-1)$$

由于系统有约束存在，广义坐标之间还可能存在约束条件

$$\psi_k(t,\ q_1\cdots q_r,\ \dot{q}_1\cdots\dot{q}_r)=0\qquad (k=1,\ \cdots m)\qquad (2-2)$$

若约束方程不显含时间 t，则这些约束称为“定恒的”，反之为“非定恒”的，只具有定恒约束的系统称为定恒系统。

若约束方程中不显含速度 $\dot{q}$ 或者可以用积分化为不显含 $\dot{q}$ 的，则这些约束称为完整的，反之为非完整的。

只具有完整约束的系统称为完整系统。

在工程力学中常见的是定恒的完整系统，下面也主要研究这类系统，在此情况下，

$$\left.\begin{aligned} x_i&=x_i(q_1\cdots q_r)\\ y_i&=y_i(q_1\cdots q_r)\\ z_i&=z_i(q_1\cdots q_r)\end{aligned}\right\}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots N)\qquad (2-3)$$

$$\psi_k(q_1,\ \cdots q_r)=0\qquad (k=1,\ 2,\ \cdots m)\qquad (2-4)$$

说一个系统有 n 个自由度，就是说要唯一表示这系统的位形，需要而且只需要 n 个独立的广义坐标。例如 $(q_1\cdots q_r)$ 之间存在 m 个关系，其中只有 $r-m$ 个广义坐标是独立的，这系统的自由度数等于 $n=r-m$，一般，只取独立的广义坐标。

§2—2 广义力，功函数

设一系统的质点 m_i 上作用的主动力（为单值有势的力）

$$X_i,\ Y_i,\ Z_i$$

所谓主动力是指外力与内力，但不包括约束反力，若给每一质点坐标的无限小的为约束许可的改变 $(\delta x_i,\ \delta y_i,\ \delta z_i)$，则所有主动力作功之和为

$$\delta A=\Sigma(x_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i)\qquad (2-5)$$

把直角坐标（$x_i,\ y_i,\ z_i$）用独立的广义坐标 $\{q_1\cdots q_n\}$ 表示后得

$$\delta A=Q_1\delta q_1+\cdots+Q_n\delta q_n\qquad (2-6a)$$

$\{Q_1\cdots Q_n\}$ 称为与广义坐标 $\{q_1,\ \cdots q_n\}$ 或广义位移 $\{\delta q_1,\ \delta q_n\}$ 相对应的广义力。

若用矩阵表达向量，则

$$\delta A=(\delta q)'Q=Q'\delta q\qquad (2-6b)$$

由方程式 (2—6) 可以决定广义力或广义位移。

若只求某一个广义力的分量 Q_i 则只要令其对应的独立坐标 q_i 有一增量 δq_i，而其余的独立广义坐标不变，而后计算所有主动力所作功之和。$\delta A_i=Q_i\,\delta q_i$，由此可得

$$Q_i=\frac{\delta A_i}{\delta q_i}$$

元功 δA 称为功函数

在常见情况下，功函数只是坐标的函数。

$$A=A(q_1\cdots q_n) \tag{2—7}$$

写出（7）式的变分

$$\delta A=\frac{\partial A}{\partial q_1}\delta q_1+\cdots+\frac{\partial A}{\partial q_n}\delta q_n$$

与方程式（2—6）比较，得

$$Q_i=\frac{\partial A}{\partial q_i} \tag{2—8}$$

若功函数只是坐标的函数，功函数冠以负号则称为系统的总位能Π（或称势能）

$$\Pi=-A=\Pi(q_1,\ \cdots q_n) \tag{2—9}$$

于是方程式（2—8）可以写为

$$Q_i=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\qquad (i=1,\ \cdots n) \tag{2—10}$$

广义力 Q_1，$\cdots Q_n$ 就完全由这个函数导出。

对于弹性体，主动力包括外力及内力，功函数 A 也包括：外力的功函数及内力的功函数，同样，位能包括外力位能和内力位能（或称应变能）

$$\Pi=V+U \tag{2—11}$$

例题1：图 2—3 所示双摆，求与坐标 φ_1 及 φ_2 对应的广义力

先求力 Q_1

给角 φ_1 一个增量 $\delta\varphi_1$（角 φ_2 不变），点 A 得一个位移 $\varepsilon_1=$ $=l_1\delta\varphi_1$，点 B 得一个位移 $\varepsilon_2=\varepsilon_1=l_1\delta\varphi_1$

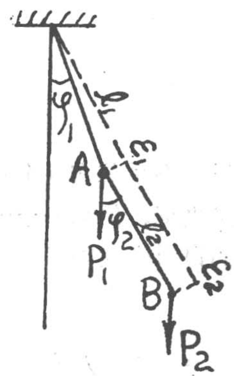

图 2—3

所有主动力作功为

$$\delta A=-P_1\varepsilon_1\sin\varphi_1-P_2\,\varepsilon_2\sin\varphi_1$$

所以

$$Q_1=-(P_1+P_2)\,l_1\sin\varphi_1$$

再求力 Q_2

现给角 φ_2 一个增量 $\delta\varphi_2$，点 A 的位移等于零，点 B 得1个位移 $\varepsilon_2=l_2\,\delta\varphi_2$ 所有主动力作功为

$$\delta A=-P_2\,\varepsilon_2\sin\varphi_2$$

所以

$$Q_2=-P_2l_2\sin\varphi_2$$

例题2，设选用下列线性变换决定广义力 Q

$$\phi=BQ \tag{2—12}$$

已知外力 ϕ 与位移 δ 之间的柔度方阵，即

$$\delta=F_\phi\phi \tag{2—13}$$