高等数学概要

陆传务 主编

华中工学院出版社

高等数学概要

陆传务　主编

胡适耕　陈祖浩　李立鹏　编

華中工学院出版社

内 容 提 要

本书以较高的观点与简洁的形式系统地概述了高等数学课程的内容，并通过约240个例题详细介绍了高等数学中常用的方法与技巧。其中，第一、二章概述了解析几何与分析引论；第三章至第七章叙述了微积分学与线性代数，最后一章是关于高等数学的思想方法与解题技巧的综合评注。本书集录的约830道习题选自中外文教材及近年来的研究生试题，并给出了答案或提示。

本书可作为高等工科院校高年级大学生特别是准备报考研究生者的复习指南，

高等学校数学教师参考。

高 等 数 学 概 要

陆传务　主编

胡适耕　陈祖浩　李立鹏　编

责任编辑　郑兆昭

华中工学院出版社出版

（武昌喻家山）

湖北省新华书店发行　各地新华书店经售

武汉市江汉印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32　印张：15.25　字数：356,000

1982年11月第一版　1984年4月第二次印刷

印数：20,001－51,000

统一书号：13255－007　　定价：1.65元

前　言

高等工科院校的学生是以循序渐进的方式逐章逐节地学完高等数学的。对初学者来说，这种学习方式不仅可行，而且几乎不可替代。但是，要使学生从这种学习中获得对高等数学的综合印象与系统了解，就颇为困难了。而一个希望在自己的专业上能自如地运用数学工具的大学生，恰恰需要对他们零散地学过的数学知识有一个融会贯通的了解。现代科学技术的复杂性对大学生的数学修养的要求几乎每天都在提高。他们不仅要熟悉微积分学的基本方法，而且应在一定程度上了解高等数学的基本精神，洞悉数学各部分之间的有机联系，具备解决各种综合性问题的能力。那些在大学毕业后将在研究班中进一步深造的优秀大学生尤其需要较高的数学修养，这种修养是他们在初入大学的阶段难以达到的。对于已经学过高等数学的大学生来说，基本训练固然仍须补足，但主要的问题已转入到如何提高通晓基本理论的本领与加强综合解题的能力。高年级大学生在参加实际工作或研究生考试之前，如希望在数学方面受到较高要求的综合性训练，阅读原有教材显然已不够，而且那种供入门用的教材还会降低一个已有相当基础的人的学习效率，甚至限制了他的眼光。这就需要一种适应高年级大学生特点的书，用以帮助他们通过简捷的途径就整个高等数学来一次系统的复习与深化。这样一种书应当既有对基本材料的系统且简明扼要的总结，又有关于各种数学方法的综合性阐述；既有对重要数学思想的切中要害的剖析，又有关于解题技巧的详细启示；既

能突出每个专题的特点，又能处处提示不同内容间的相互联系，等等。无疑，这些要求只可接近而无法完全达到，当然更非编者力所能及。不过，作为一种尝试，我们力图达到上述要求。倘若贡献给读者的这本书幸而能部分地使读者满意，我们也就聊以自慰了。

本书内容与现行高等数学教材大体相当，但在材料安排上力求体现出各种概念和方法之间的自然的逻辑联系。例如，对各种类型的积分以统一方式处理，意在帮助读者更好理解积分概念的本质。再如，对平面解析几何、空间解析几何以及一元微分学与多元微分学，都是在某种统一或相互对照的形式下进行叙述的。我们希望以这种方式引导读者将纷繁的内容纳入一简明的框架之内，即使是从解题方法上着眼，这样作看来亦甚有好处。本书包括约240个例题，我们力求使这些例题有一定的典型性与综合性。每个例题都尽可能给出了最简单的解法，但我们也注意到提示读者，有时一些不一定很简单却较可靠的方法更值得采用。因为我们假定读者已初步学过高等数学，所以在解某一问题时有时也用到后文中的材料，这样作可能有助于打破章节的界限，促进各种知识的灵活运用。

本书采用如下记号：§1·1表示第一章第一节，§1·1·1表示第一章第一节第一目，§1·1·1之1表示第一章第一节第一目之第一款。

编者希望本书将为非数学专业的高年级大学生（包括电大与业余大学的学生）特别是准备报考研究生者提供某种复习指南。当然，低年级大学生在学习高等数学时也可适当利用本书。在某些方面本书对数学专业学生亦会有所帮助，对于从事高等数学教学工作的教师或许也有某种参考价值。

编　者　　1982.6.

目　　录

第一章 解析几何

§1 坐标·矢量·曲线与曲面方程

1.1.1 坐标

1 三种常用坐标系（如表1）

注：（1）在柱面坐标与球面坐标中，角θ可代以任何角$\theta+2n\pi$（n是整数），有些书上，球面坐标中的φ代以$\varphi+\frac{\pi}{2}$（$-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$），后者相当于地理坐标中的纬度（$\theta$则相当于经度）。

（2）三种坐标系中令$z=0$ 或$\varphi=\frac{\pi}{2}$，得到xy平面上的直角坐标与极坐标。

（3）坐标概念的要点在于用一组数来表示空间中点的位置，从而建立几何事实与数量关系之间的联系。原则上可由无限多种方式导入坐标系，其中以直角坐标系最为通用，其它坐标系（习称曲线坐标，包括斜角坐标）都可相对于直角坐标系而得到说明。

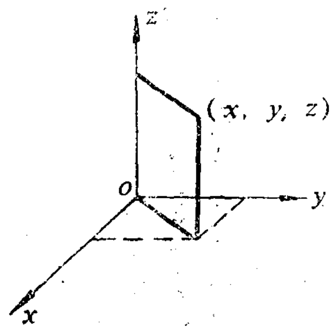
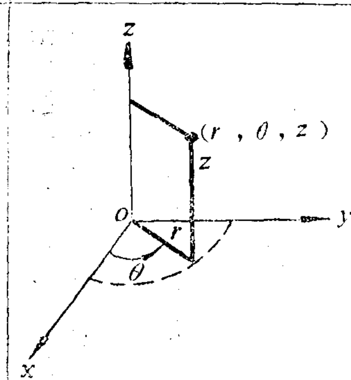
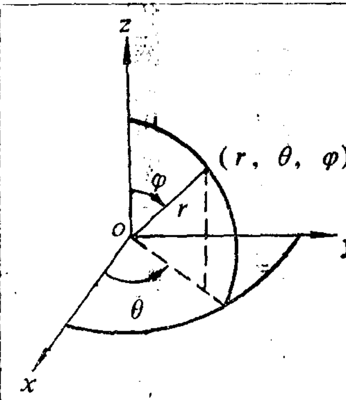
2 直角坐标之变换

设在Oxy平面上导入新直角坐标系$O'x'y'$，$O'(a, b)$是新的原点，Ox轴到$O'x'$轴转过角度α（$\alpha>0$时是反时针方向旋转），则新旧坐标依以下公式转换：

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha+a \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha+b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=(x-a)\cos\alpha+(y-b)\sin\alpha \\ y'=(a-x)\sin\alpha+(y-b)\cos\alpha \end{cases}$$

表 1

	直角坐标(x, y, z) $-\infty<x, y, z<\infty$	柱面坐标(r, θ, z) $0\leqslant r<\infty, 0\leqslant\theta<2\pi, -\infty<z<\infty$	球面坐标(r, θ, φ) $0\leqslant r<\infty, 0\leqslant\theta<2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$
图示			
变换公式		$x=r\cos\theta$ $y=r\sin\theta$ $z=z$	$x=r\cos\theta\sin\varphi$ $y=r\sin\theta\sin\varphi$ $z=r\cos\varphi$
坐标面	平行于 yz平面、xz平面、xy平面的三族平面：$x=$常数，$y=$常数，$z=$常数。	$r=$常数：以z轴为心轴之圆柱面；$\theta=$常数：过z轴之半平面；$z=$常数同左。	$r=$常数：以原点为心之球面；$\theta=$常数：同左；$\varphi=$常数：以原点为顶点以z轴为心轴之圆锥面。
	以上三种坐标系下，三族坐标面互相正交。		

可借复数写法记住以上公式：

$$z=z_0+z'e^{i\alpha};\qquad z'=(z-z_0)e^{-i\alpha},$$

其中，$z=x+iy$；$z_0=a+ib$；$z'=x'+iy'$。

空间直角坐标系的平移是简单的，旋转则宜用线性代数方法处理（§6·2·2）。

1.1.2 矢量

1 矢量及其坐标

既有大小又有方向的量谓之矢量，它与数量一起成为数学中两类最重要的量。以下凡矢量用黑体字表示。

A 模长与交角 矢量模长$|\mathbf{a}|$类似于绝对值：$|\lambda\mathbf{a}|=|\lambda||\mathbf{a}|$，$|\mathbf{a}\pm\mathbf{b}|\leqslant|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$。与轴 u 同向的单位矢量记为 $\mathbf{u}^0$（$|\mathbf{u}^0|=1$），由取定的直角坐标系三坐标轴决定的单位矢量记为$\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$。矢量$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$的交角（$\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}$）是$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$共起点时的夹角。

B 投影 矢量$\mathbf{a}$在轴u上的投影$a_u=|\mathbf{a}|\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{u}^0})$。令$(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{i}})=\alpha$，$(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{j}})=\beta$，$(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{k}})=\gamma$，则

$$\mathbf{a}=|\mathbf{a}|(\mathbf{i}\cos\alpha+\mathbf{j}\cos\beta+\mathbf{k}\cos\gamma)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k},$$

式中，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$称为$\mathbf{a}$ 的方向余弦，任何与（$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$）成比例的一组数（m,n,p）称为$\mathbf{a}$的方向数。$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{|\mathbf{a}|^2}=1$。本书中，符号$x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$与$\{x,y,z\}$表示同一矢量。

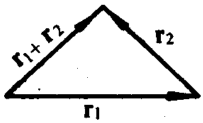
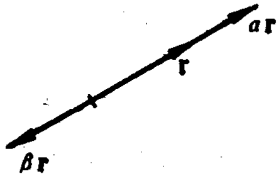
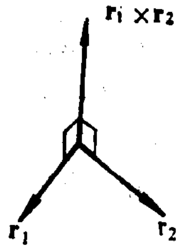
C 矢量与点的对应 空间中任一点$M(x,y,z)$唯一地对应起于原点终于点M的矢径$\mathbf{r}_M$，反之每一矢量 $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$对应点（$x,y,z$）。这种一一对应关系使解析几何中的矢算法与坐标法可以互相转化。

2 矢量代数

关于矢量运算之定义及其规则的讨论谓之矢量代数，它是

关于数的代数的一种推广。基本矢量运算有如表 2 的四种：

表 2

	算　　　式	图　　　示
加法	$\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2=\{x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2\}$ $\mathbf{r}_i=\{x_i, y_i, z_i\}$，下同	
与数乘	$a\mathbf{r}=\{ax, ay, az\}$ $\mathbf{r}=\{x, y, z\}$，a是实数。	（$a>0$，$\beta<0$）
矢积	$\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ $\lvert\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2\rvert=\lvert\mathbf{r}_1\rvert\lvert\mathbf{r}_2\rvert\sin(\widehat{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2})$	
内积	$\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ $=\lvert\mathbf{r}_1\rvert\cdot\lvert\mathbf{r}_2\rvert\cos(\widehat{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2})$ $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}=\mathbf{r}^2$	

以上运算服从通常数运算的许多规则，如加法的交换律、结合律，三种乘法（与数乘，矢积，内积）对加法的分配律。但须注意：$\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2=-(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_1)$，且矢积不满足结合律。以下公式将经常用到：

$$(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)^2=\mathbf{r}_1{}^2\mathbf{r}_2{}^2-(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)^2;$$

$$\mathbf{r}_1\times(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)=(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_3)\mathbf{r}_2-(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)\mathbf{r}_3;$$

$$\mathbf{r}_1\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)=(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix},\ \mathbf{r}_i=\{x_i,y_i,z_i\}。$$

3 用矢量或坐标解决的几个基本问题

A 两点$A_i(x_i,\ y_i,\ z_i)$（$i=1,\ 2$）之间的距离

$$=|\mathbf{r}_{A_1}-\mathbf{r}_{A_2}|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

B 设点$A_i(x_i,\ y_i,\ z_i)$（$i=1,2,\cdots,n$）处有质量m_i，$B(\overline{x},\ \overline{y},\ \overline{z})$是此质量系的重心，则

$$\mathbf{r}_B=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\mathbf{r}_{A_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i};\quad \overline{x}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i};\quad \overline{y},\ \overline{z}\text{仿}\overline{x}。$$

当$m_1=m_2=\cdots=m_n$时，$\mathbf{r}_B=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbf{r}_{A_i}$；当$n=2$，3时$B$分别是线段$A_1A_2$之中点与$\triangle A_1A_2A_3$之几何重心。又当$n=2$时，

$$\mathbf{r}_B=\frac{\mathbf{r}_{A_1}+\lambda\mathbf{r}_{A_2}}{1+\lambda};\quad \overline{x}=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad \overline{y},\ \overline{z}\text{仿}\overline{x}。$$

其中，$\lambda=\dfrac{m_2}{m_1}=\dfrac{A_1B}{BA_2}$（分线段为定比之公式）。

C 两轴u，v的夹角$=(\widehat{\mathbf{u}^\circ,\mathbf{v}^\circ})$，后者由$\cos(\widehat{\mathbf{u}^\circ,\mathbf{v}^\circ})=\mathbf{u}^\circ\cdot\mathbf{v}^\circ$决定。两矢量$\mathbf{a},\mathbf{b}$平行$\Leftrightarrow\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0\Leftrightarrow$有不全为0的数$\lambda$，$\mu$：$\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}=0$；$\mathbf{a},\mathbf{b}$正交$\Leftrightarrow\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$；$\mathbf{a}$，$\mathbf{b},\mathbf{c}$共面$\Leftrightarrow(\mathbf{abc})=0$。

D 设$A_i(x_i,\ y_i)$（$i=1,2,3$）是xy平面上三点。则

$\triangle A_1A_2A_3$之面积$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}|$

$$=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix};$$

A_1，A_2，A_3共线$\Leftrightarrow\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=0\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=0$$

E　设$A_i(x_i,\ y_i,\ z_i)$（$i=1,2,3,4$）是空间四点，则以A_1A_2，A_1A_3，A_1A_4为棱的平行六面体之体积

$$=\pm(\overrightarrow{A_1A_2}\overrightarrow{A_1A_3}\overrightarrow{A_1A_4})=\pm\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix};$$

A_1,A_2,A_3,A_4四点共面$\Leftrightarrow(\overrightarrow{A_1A_2}\overrightarrow{A_1A_3}\overrightarrow{A_1A_4})=0$

4　坐标法与矢算法

通过坐标计算或矢量计算来解决几何问题（以及借几何形象描述的分析问题）的方法分别谓之坐标法与矢算法，这两种方法在解析几何与分析中都有广泛应用，矢算法与坐标系的选择无关，且常能实现最简捷的推理和使许多公式一般化与简单化，因此尽可能采用矢算法是有益的。但矢算法有其局限性，而且对具体问题的计算结果通常要求表为坐标形式。方法的选用须依具体情况决定。鉴于现行高等数学教材中矢算法运用偏少，本书中将略为偏重，使读者补足这方面的训练。

1.1.3　曲线与曲面方程

1　曲线曲面方程的各种形式

曲线与曲面可解释为动点的轨迹。将限制动点的条件表达为动点坐标（或矢径）须适合的关系式，就得到曲线与曲面的

解析表示或方程。曲线曲面方程可分坐标式与矢量式两大类。就坐标式而言又可将各种坐标表成显式、隐式、参数式三种形式。现将直角坐标式与矢量式对照列于表 3：

表 3

		曲线方程		曲面方程
		平面曲线	空间曲线	
直角坐标式	显式	$y=f(x)$	$\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$	$z=f(x,y)$
	隐式	$F(x,y)=0$	$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$	$F(x,y,z)=0$
	参数式	$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$	$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$	$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$
矢量式	参数式	$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$		$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$
	隐式	例：平面直线：$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}=0$		例：球面：$\lvert\mathbf{r}\rvert=a$

对任一种坐标式方程，曲线只含一个独立变元，称一维图形；曲面含两个独立变元，称二维图形。对于曲线曲面的理论研究，含参数的矢量式方程可能是最有价值的。对于计算来说，选用何种方程则应依具体情况而定。必须熟悉不同类型方程之间的互相转换。例如，若平面曲线C由极坐标的显式方程$r=f(\theta)$给定，则C可表为参数方程：$x=f(\theta)\cos\theta$，$y=f(\theta)\sin\theta$。

2　关于曲线曲面方程的两大基本问题

A　一曲线（面）已从几何上给定，求其方程。一般步骤是：首先选定方程类型。如采用直角坐标下的隐式方程，则应适当地放置坐标系，将几何条件转化为动点坐标满足的等式，经整理化简后得到所求方程。如采用参数式，首先应根据图形形成特点适当地选定参数。要顺利地得到所求的方程，必须熟悉有关的几何学定理并具有变换解析式的一定技巧。

B　已知曲线（面）方程，求其几何形状。首先应明了用的是何种坐标系，因同一方程在不同坐标系下可能表示很不相同的图形。接着对方程的解析特征作一般性分析，大致确定图形的整体形状（如对称性、分布范围、分枝情况等），然后通过描点进一步决定细部的形状。不过，这一问题的深入解决有赖于微分学的方法。

3　用曲线与曲面方程解决的问题示例

A　求平面曲线$F(x,y)=0$与$G(x,y)=0$之交点：直接求解方程组或求出其中一曲线如$F(x,y)=0$的参数式$x=x(t)$，$y=y(t)$，再从$G(x(t),\ y(t))=0$解出t。求空间曲线$F(x,y,z)=0$，$G(x,y,z)=0$与曲面$H(x,y,z)=0$的交点可类似处理。

B　求空间曲线$F(x,y,z)=0$，$G(x,y,z)=0$在xy平面上之投影曲线：从所给方程组消去z得方程$H(x,y)=0$，这是曲线的"投影柱面"方程，于是所求投影曲线是$H(x,y)=0$，$z=0$。若能求出原曲线之参数式$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$，则投影曲线是$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=0$。

C　判定曲线C在曲面$F(x,y,z)=0$上：求出C的参数式$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$，验证$F(x(t),y(t),z(t))\equiv 0$。

D　曲面束方程：对任何常数λ，$F_1+\lambda F_2=0$是过曲线

$F_1(x,y,z)=0$，$F_2(x,y,z)=0$的曲面。类似地，$G_1+\lambda G_2=0$是过平面曲线$G_1(x,y)=0$与$G_2(x,y)=0$的交点的一族曲线。曲面（线）束中某一特定的曲面（线）由选取λ来决定。

【例题】

1．空间中点A,B,C之矢径分别为$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$，$O$是原点，求点$C$在$\triangle OAB$所在平面上的投影D。

解 只须求出$\overrightarrow{OD}$。$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CD}$同时正交于$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$。因此$\overrightarrow{CD}=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$，而λ决定于条件：

$$0=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OD}=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot[\mathbf{c}+\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]$$
$$=\lambda(\mathbf{abc})+\lambda^2(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2$$

解出$\lambda=-\dfrac{(\mathbf{a\,b\,c})}{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2}$，于是$\overrightarrow{OD}=\mathbf{c}-\dfrac{(\mathbf{abc})}{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$。

注：求某一个矢量时，通常将它表为含已知矢量与待定系数的式子，并作适当的内积运算来决定待定系数。上例亦可写出$\overrightarrow{OD}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$，而λ、μ由方程组$\overrightarrow{CD}\cdot\mathbf{a}=0$，$\overrightarrow{CD}\cdot\mathbf{b}=0$决定。$D$也可以通过求$C$到$\triangle OAB$所在平面的最短距离得出，但计算比较复杂。

2．若矢量$\mathbf{a}+3\mathbf{b}$与$7\mathbf{a}-5\mathbf{b}$正交，$\mathbf{a}-4\mathbf{b}$与$7\mathbf{a}-2\mathbf{b}$正交，求$(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$。

解 由所给条件得出方程组

$$\begin{cases}(\mathbf{a}+3\mathbf{b})\cdot(7\mathbf{a}-5\mathbf{b})=7\mathbf{a}^2+16\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-15\mathbf{b}^2=0\\(\mathbf{a}-4\mathbf{b})\cdot(7\mathbf{a}-2\mathbf{b})=7\mathbf{a}^2-30\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+8\mathbf{b}^2=0\end{cases}$$

然后解出$46\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=23\mathbf{b}^2$，$\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}^2}=\dfrac{1}{2}$。类似地$\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}^2}=\dfrac{1}{2}$，因此

$\dfrac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2}=\dfrac{1}{4}$，故$\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\dfrac{1}{2}$ $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}>0)$，

$(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=\dfrac{\pi}{3}$。

许多初等几何命题可用坐标法或矢算法证明，其中尤以矢算法为简便。

3．若平面四边形$ABCD$中$\angle A=\angle C=90°$，则四边形必内接于某个圆。（图1.1）

证　设O是BD之中点，今证$OA=OB$，（同理必有$OB=OC$，因此四顶点共圆）。为此计算

$$\overrightarrow{OA}^2=\left(\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA})^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{DA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DA})$$

$$=\frac{1}{4}BD^2=OB^2$$

于是所要结论得证。

4．求证$\triangle ABC$之三高交于一点D（垂心）。（图1.2）

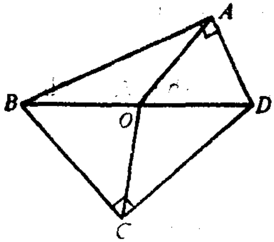


图1.1

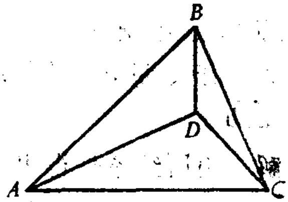


图1.2

证　设D是AB与BC上的高的交点，今证$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$：

$$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$$
$$=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})$$
$$=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$$

注：例3若以O为原点直线BD为x轴导入坐标系，则结论不难从坐标法得证。但用坐标法证明例4就显得复杂。用矢算法证明则根本不