
有限元法 (第2版) · 下 · 理论、格式与求解方法

Finite Element Procedures

[德] Klaus-Jürgen Bathe 著
轩建平 译

高等教育出版社

有限元法 (第2版) · 下 · 理论、格式与求解方法

Finite Element Procedures

[德] Klaus-Jürgen Bathe 著

轩建平 译

图书在版编目 (C I P) 数据

有限元法: 第2版. 下, 理论、格式与求解方法 /
(德) 巴特著; 轩建平译. -- 北京: 高等教育出版社,
2016. 8

Finite Element Procedures
ISBN 978-7-04-045485-7

I. ①有… II. ①巴… ②轩… III. ①有限元法
IV. ①O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 096006 号

策划编辑	冯 英	责任编辑	冯 英	封面设计	王 洋	版式设计	王艳红
插图绘制	黄建英	责任校对	陈旭颖	责任印制	韩 刚		

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	保定市中画美凯印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787 mm×1092 mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	39	版 次	2016年8月第1版
字 数	800千字	印 次	2016年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	89.00元
咨询电话	400-810-0598		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 45485-00

图字：01-2016-4808号

Translation from English Language edition:

Finite Element Procedures, 4th printing of 2nd edition, 2016

by Klaus-Jürgen Bathe

This book was previously published by Pearson Education, Inc.

All Rights Reserved

内容简介

有限元法是当今工程分析和科学研究不可或缺的方法。有限元法在科学计算领域不仅实用，而且高效，应用广泛。本书共12章，分上、下卷，上卷包括1~5章，下卷包括6~12章。本卷主要内容包括：基于固体力学和结构力学的非线性有限元分析，传热、场和不可压缩流体流动问题的有限元分析，静态分析中平衡方程组的求解，动力学分析中平衡方程求解，特征问题的求解基础，特征问题的解法和有限元法的实现。本书所介绍的方法通用、可靠和有效，虽然是最基本的，但在将来很长一段时间仍会得到不断应用。这些方法也将成为该领域最新发展的基础。本书原著作者克劳斯-佑庚·巴特(Klaus-Jürgen Bathe)教授在美国麻省理工学院(MIT)的网页(<http://meche.mit.edu/people/faculty/kjb@mit.edu>)有大量的资料，如学术论文、讲课视频、习题解答和电子教案等，可供读者学习、研究与应用。

本书内容全面，实例丰富，适合高年级本科生和研究生的课程学习，也可作为从事有限元研究的专业人员和工程技术人员的参考资料，还可供在模拟科学和工程领域的应用数学家和工程师阅读使用。

献给我的学生

新型结构设计的进步将是无限的。

—— 克劳斯 - 佑庚 · 巴特在本科生时所写的《计算机在结构分析中的应用》(*The Use of the Electronic Computer in Structural Analysis*) 论文中的最后一句话, 出版于 *Impact, Journal of the University of Cape Town Engineering Society*, pp. 57-61, 1967.

Bathe 教授为中文版撰写的前言

有限元法今天已广泛地应用于科学和工程问题分析之中, 而且其应用还将不断扩展. 因此, 该领域需要各种教科书. 我希望中国关注有限元法的学生、研究人员和从业人员能够发现本书的价值, 特别是该书现在有了中文版.

2013 年本书译者轩建平教授在我的 MIT 研究团队访学一年, 而本书的翻译工作在此之前就已经开始. 我非常感谢轩教授无比热忱地完成了该译著, 这项工作需要良好的专业知识和巨大的努力. 同时我对本书第 2 版在中国的广泛发行感到非常欣慰.

K. J. Bathe

原著第 2 版前言

本书第 1 版第 1 次印刷已近 20 年, 迄今已经重印 16 次. 尽管第 1 版仍有很大需求, 但我认为很有必要对该书进行更新.

通常一本书的修订版会比前一版的内容增加很多. 但我并不希望本书篇幅扩大. 因此, 增加新内容的同时要删去一些先前已出版的章节, 把重要的材料补充进来.

这种安排体现了本书的宗旨: 重点介绍我认为非常有用的并将在很长时间仍然使用的那些有限元法.

尽管在过去 20 年中发表了大量关于有限元法研究与发展的论文, 但本书所阐述的基本格式和方法并没有根本改变. 因此, 新版本的更新并不特别多. 只对一些最新的重要工作进行简要介绍和参考, 新版本还补充了一些最近发展的新方法.

我要感谢在有限元法研究中与我合作的同事和学生, 感谢 ADINA R&D 公司的 Victor Lee 帮助打印更新的版本. 从事有限元法的工作是令我兴奋和满足的, 并且会持续下去, 相关内容在我的《丰富人生》(*To Enrich Life*) 一书中有所介绍.

Klaus-Jürgen Bathe

原著第 1 版前言

目前,有限元法是工程分析和设计必不可少的重要组成部分.有限元计算机软件现已广泛应用于结构、固体和流体分析的工程各个领域.

我写这本书的目的是为高年级本科生和研究生学习有限元分析课程提供教材,并为科技工作者自学提供参考书.

为此目的,我根据我的早期出版物《工程分析中的有限元法》(*Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, 1982)扩充成本书.我保持了同样的表述方式,但是统一、更新和增强了早期版本,以适应有限元法发展的现状.另外,我增添了新的章节,为表述完整性而增加了一些重要的主题,同时(通过练习)有利于本书所讨论内容的课堂教学.

本书并没有给出有限元法的综述.对这些内容,需要大量的篇幅.因而,本书专注于某些有限元法,即我认为在工程实践中十分有用、并将在若干年后可能还一直使用的方法.同时,采用对学生教学效果好、新鲜有趣的方式介绍这些方法.

有限元法的一个重要方面是它的可靠性,因而要确保这种方法可在计算机辅助设计中可信地应用.本书自始至终重点阐述对工程分析来说是通用且可靠的有限单元.

因此,本书只介绍某些有限元法,并且按某种方式介绍这些方法,明显地有所取舍.在这点上,本书反映了我对讲授和应用有限元法的思考.

本书的基本主题强调数学方法,只有充分注重方法的物理和数学意义,才能获得对工程应用中的有限元法的兴趣和透彻理解.物理和数学相结合的全面理解极大地增强了我们应用和进一步发展有限元法的信心,因而在本书中得到重点关注.

这些思想还表明,在工程师和数学家之间的合作对加深我们对有限元法的理解和进一步推动该领域的研究发展具有极大的益处.在此我十分感谢数学家 Franco Brezzi 为秉持此精神而进行的合作研究和对本书提出的有价值的建议.

我认为对教育工作者来说,写一本有价值的书是最大的成就之一.在当代,各个工程领域日新月异,实际上,所有工程领域的学生都需要新的书籍.我因此感谢麻省理工学院机械工程系给我提供了从事教学、科研和学术写作的良好环境.写这本书对我来说需要巨大的努力,但我要完成该任务作为对

我过去的和将来的学生、对该领域感兴趣的教育者和研究人员的承诺,当然,也是为了提高我在 MIT 的教学工作.

我已经非常幸运地与麻省理工学院的许多杰出的学生一起工作,我很感激他们.成为他们的教师和与他们一起工作是我莫大的荣幸.在我的公司 AD-INA R&D, Inc.,我一直密切参与有限元法的工业应用开发,这些工作具有极大的价值.这种参与对我的教学、科研和撰写本书也是十分有益的.

要编写只出现几十年和经历了巨大发展的主题,并且具有显著深度和广度的教材,只有得到该领域的许多人帮助并作过有益交流的作者才能实现.我要感谢我所有的学生和已经和将要继续对我有限元法的知识和理解所作出的贡献,与他们的交流给了我很大的快乐和满足.

我也要感谢我的秘书 Kristan Raymond,她特别努力地完成本手稿的录入工作.

最后,我感谢我的妻子 Zorka、孩子 Ingrid 和 Mark,他们对我的爱和我努力工作的理解支持我写作这本书.

Klaus-Jürgen Bathe

目 录

· 上 卷 ·

第 1 章

有限元法应用导论	1
1.1 引言	1
1.2 物理问题、数学模型和有限元解	2
1.3 有限元分析是计算机辅助工程的组成部分	9
1.4 一些最新研究成果	12

第 2 章

向量、矩阵和张量	15
2.1 引言	15
2.2 矩阵概述	15
2.3 向量空间	32
2.4 张量的定义	38
2.5 对称特征问题 $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$	49
2.6 Rayleigh 商和特征值的极小极大特性	59
2.7 向量模和矩阵模	66
2.8 习题	73

第 3 章

工程分析的基本概念及有限元法导论	77
3.1 引言	77
3.2 离散系统数学模型的解	78
3.2.1 稳态问题	78
3.2.2 传播问题	87
3.2.3 特征值问题	89
3.2.4 关于解的性质	95
3.2.5 习题	99

3.3	连续系统数学模型的求解	102
3.3.1	微分形式	102
3.3.2	变分形式	106
3.3.3	加权余量法和里茨法	112
3.3.4	微分形式、Galerkin 形式、虚位移原理和有限元解法简介	119
3.3.5	有限差分法和能量法	124
3.3.6	习题	133
3.4	约束的施加	137
3.4.1	Lagrange 乘子法和罚函数法概述	138
3.4.2	习题	141
第 4 章		
有限元法的构造: 固体力学和结构力学中的线性分析		
4.1	引言	143
4.2	基于位移的有限元方法构造	143
4.2.1	有限元平衡方程组的一般推导	148
4.2.2	位移边界条件的施加	178
4.2.3	某些具体问题的广义坐标模型	183
4.2.4	结构特性和载荷的集总	201
4.2.5	习题	203
4.3	分析结果的收敛性	213
4.3.1	模型问题和收敛性的定义	213
4.3.2	单调收敛准则	217
4.3.3	单调收敛有限元解: Ritz 解	220
4.3.4	有限元解的性质	222
4.3.5	收敛率	230
4.3.6	应力计算和误差估计	238
4.3.7	习题	243
4.4	非协调有限元和混合有限元模型	245
4.4.1	基于位移的非协调模型	246
4.4.2	混合格式	252
4.4.3	不可压缩分析的混合插值位移/压力格式	259
4.4.4	习题	276
4.5	不可压缩介质和结构问题分析的 inf-sup 条件	280
4.5.1	从收敛性导出 inf-sup 条件	280
4.5.2	从矩阵方程推导 inf-sup 条件	291
4.5.3	常 (物理) 压力模式	294
4.5.4	伪压力模式: 完全不可压缩情况	295
4.5.5	伪压力模式: 几乎不可压缩情况	297

4.5.6	Inf-sup 检验	301
4.5.7	在结构单元中的应用: 等参梁元	308
4.5.8	习题	312

第 5 章

等参有限单元矩阵的构造与计算 317

5.1	引言	317
5.2	杆单元等参刚度矩阵的推导	317
5.3	连续介质单元的构造	319
5.3.1	四边形单元	320
5.3.2	三角形元	341
5.3.3	收敛性考虑	354
5.3.4	总体坐标系中的单元矩阵	363
5.3.5	不可压缩介质的基于位移/压力的单元	365
5.3.6	习题	365
5.4	结构单元的构造	373
5.4.1	梁单元和轴对称壳单元	374
5.4.2	板单元和一般壳体单元	395
5.4.3	习题	423
5.5	数值积分	428
5.5.1	使用多项式插值	429
5.5.2	牛顿 - 柯特斯公式 (一重积分)	430
5.5.3	高斯公式 (一重积分)	434
5.5.4	二重和三重积分	437
5.5.5	合适的数值积分阶	440
5.5.6	降阶积分和选择性积分	448
5.5.7	习题	451
5.6	等参有限元计算机程序的实现	452

参考文献	459
------	-----

索引	491
----	-----

译者后记	513
------	-----

· 下 卷 ·

第 6 章

基于固体力学和结构力学的非线性有限元分析 1

6.1	非线性分析引言	1
-----	---------	---

6.2	连续介质力学增量运动方程的推导	12
6.2.1	基本问题	13
6.2.2	变形梯度、应变张量和应力张量	16
6.2.3	连续介质力学的增量完全和更新 Lagrange 格式, 仅材料非线性分析	37
6.2.4	习题	43
6.3	基于位移的等参连续介质有限单元	53
6.3.1	对有限单元变量进行虚功原理线性化	53
6.3.2	基于位移的连续介质单元的一般矩阵方程	55
6.3.3	桁架和缆线单元	58
6.3.4	二维轴对称单元、平面应变单元和平面应力单元	65
6.3.5	三维实体单元	70
6.3.6	习题	73
6.4	大变形的位移/压力格式	77
6.4.1	完全 Lagrange 格式	77
6.4.2	更新 Lagrange 格式	81
6.4.3	习题	82
6.5	结构单元	84
6.5.1	梁和轴对称壳单元	84
6.5.2	板和一般壳单元	91
6.5.3	习题	94
6.6	本构关系的使用	97
6.6.1	弹性材料性质: 广义 Hooke 定律	99
6.6.2	类橡胶材料特性	109
6.6.3	非弹性材料特性: 弹塑性、蠕变和黏塑性	111
6.6.4	大应变弹塑性	129
6.6.5	习题	133
6.7	接触状态	139
6.7.1	连续介质力学方程	139
6.7.2	接触问题的一种求解方法: 约束函数法	143
6.7.3	习题	145
6.8	一些实际考虑	145
6.8.1	非线性分析的一般方法	145
6.8.2	坍塌和屈曲分析	146
6.8.3	单元扭曲的影响	152
6.8.4	数值积分的影响	152
6.8.5	习题	155

第 7 章

传热、场和不可压缩流体流动问题的有限元分析 157

7.1 引言	157
7.2 传热分析	157
7.2.1 传热基本方程	157
7.2.2 增量方程	161
7.2.3 传热方程组的有限元离散化	165
7.2.4 习题	173
7.3 场问题分析	176
7.3.1 渗流	176
7.3.2 不可压缩无黏性流体	177
7.3.3 扭转	178
7.3.4 声流体	180
7.3.5 习题	184
7.4 黏性不可压缩流体流动的分析	186
7.4.1 连续介质力学方程	188
7.4.2 有限元控制方程	191
7.4.3 高雷诺数和高贝克来数的流动	196
7.4.4 流固耦合	203
7.4.5 习题	204

第 8 章

静态分析中平衡方程组的求解 209

8.1 引言	209
8.2 基于 Gauss 消去法的直接求解法	210
8.2.1 Gauss 消去法概述	210
8.2.2 LDL ^T 解法	218
8.2.3 Gauss 消去法的计算机实现: 活动列求解法	221
8.2.4 Cholesky 分解、静态凝聚法、子结构法和波前法	231
8.2.5 正定、半正定和 Sturm 序列性质	240
8.2.6 解的误差	248
8.2.7 习题	256
8.3 迭代求解方法	259
8.3.1 Gauss-Seidel 法	261
8.3.2 预处理的共轭梯度法	264
8.3.3 习题	267

8.4	非线性方程组的求解	268
8.4.1	Newton-Raphson 方法	269
8.4.2	BFGS 法	273
8.4.3	载荷 - 位移 - 约束方法	275
8.4.4	收敛准则	278
8.4.5	习题	279
第 9 章		
<hr/>		
	动力学分析中平衡方程求解	283
9.1	引言	283
9.2	直接积分法	284
9.2.1	中心差分法	284
9.2.2	Houbolt 法	289
9.2.3	Newmark 法	292
9.2.4	Bathe 法	294
9.2.5	不同的积分算子的组合	298
9.2.6	习题	299
9.3	模态叠加法	300
9.3.1	基转变为振型的广义位移	301
9.3.2	忽略阻尼的分析	304
9.3.3	有阻尼分析	311
9.3.4	习题	316
9.4	直接积分法的分析	316
9.4.1	直接积分的近似算子和载荷算子	318
9.4.2	稳定性分析	321
9.4.3	精度分析	325
9.4.4	一些实际的考虑	327
9.4.5	习题	335
9.5	在动态分析中非线性方程的求解	337
9.5.1	显式积分	337
9.5.2	隐式积分	339
9.5.3	使用模态叠加求解	341
9.5.4	习题	342
9.6	非结构问题的求解: 传热和流体流动	343
9.6.1	时间积分的 α 法	343
9.6.2	习题	348

第 10 章

特征问题的求解基础 351

10.1 引言 351

10.2 求解特征系统所用的基本性质 353

10.2.1 特征向量的性质 353

10.2.2 特征问题 $\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \lambda\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}$ 及其相伴约束问题的特征多项式 358

10.2.3 平移 364

10.2.4 零质量的影响 366

10.2.5 将 $\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \lambda\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}$ 的广义特征问题转换为标准形式 367

10.2.6 习题 373

10.3 近似求解方法 374

10.3.1 静态凝聚 375

10.3.2 Rayleigh-Ritz 分析 382

10.3.3 部件模态综合法 390

10.3.4 习题 393

10.4 求解误差 394

10.4.1 误差界 394

10.4.2 习题 401

第 11 章

特征问题的解法 403

11.1 引言 403

11.2 向量迭代法 405

11.2.1 逆迭代法 405

11.2.2 正迭代法 413

11.2.3 向量迭代法中的平移 415

11.2.4 Rayleigh 商迭代 420

11.2.5 矩阵收缩与 Gram-Schmidt 正交 423

11.2.6 关于向量迭代法的一些实际考虑 425

11.2.7 习题 426

11.3 变换方法 428

11.3.1 Jacobi 法 429

11.3.2 广义 Jacobi 法 436

11.3.3 Householder-QR- 逆迭代法 446

11.3.4 习题 458

11.4 多项式迭代和 Sturm 序列方法 458

11.4.1 显式多项式迭代法 459

11.4.2 隐式多项式迭代法 460

11.4.3	基于 Sturm 序列性质的迭代法	464
11.4.4	习题	466
11.5	Lanczos 迭代法	466
11.5.1	Lanczos 变换	467
11.5.2	Lanczos 变换迭代法	472
11.5.3	习题	475
11.6	子空间迭代法	476
11.6.1	基本考虑因素	477
11.6.2	子空间迭代	480
11.6.3	初始迭代向量	483
11.6.4	收敛性	485
11.6.5	子空间迭代法的实现	486
11.6.6	习题	505
第 12 章		
<hr/>		
	有限元法的实现	507
12.1	引言	507
12.2	计算系统矩阵的计算机程序结构	508
12.2.1	节点和单元信息的读入	508
12.2.2	单元刚度、单元质量和单元等效节点力的计算	511
12.2.3	矩阵组装	511
12.3	单元应力的计算	514
12.4	示例程序 STAP	515
12.4.1	计算机程序 STAP 的数据输入	517
12.4.2	STAP 源代码表	520
12.5	习题与项目	542
12.5.1	习题	542
12.5.2	项目	543
	参考文献	547
	索引	579
	译者后记	601